Aufgaben zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme

W.–J. Beyn

Sommersemester 2016

Abgabe: Montag, 11.7.2016, bis 10:15 Uhr, Postfach 114 (Alina Girod) in V3-128

Übungsgruppe: Mi. 8-10, V4-119

Aufgabe 23: [Invariante Mannigfaltigkeiten und Einschrittverfahren]

(a) Gegeben sei ein partitioniertes autonomes System

$$\dot{u} = f(u,v), \quad \dot{v} = g(u,v), \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, v(t) \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R}^{m+k}, \mathbb{R}^m), g \in C^1(\mathbb{R}^{m+k}, \mathbb{R}^k)$ und eine Funktion $h \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$. Zeigen Sie, dass der Graph von h

$$M = \{(u, h(u)) : u \in \mathbb{R}^m\}$$

genau dann unter dem Fluss von (1) invariant ist, wenn die folgende Beziehung gilt:

$$g(u, h(u)) = Dh(u) f(u, h(u)) \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^m.$$

Zeigen Sie außerdem, dass im Fall eines partitionierten diskreten Systems

$$u_{n+1} = f(u_n, v_n), \quad v_{n+1} = g(u_n, v_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

die Invarianzbedingung lautet

$$g(u, h(u)) = h(f(u, h(u))) \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^m.$$

(b) Bestimmen Sie für das Beispiel

$$\dot{u} = -u, \quad \dot{v} = 2(v - u^2) \tag{2}$$

eine geeignete Funktion h, die zu einem invarianten Graphen gehört (die stabile Mannigfaltigkeit des Nullpunktes). Bestimmen Sie entsprechende Funktionen $h_{\Delta t}$ von invarianten Graphen zum expliziten bzw. impliziten Euler-Verfahren mit Schrittweite Δt für (2). Berechnen Sie $e(\Delta t) = \sup\limits_{|u| \le 1} |h(u) - h_{\Delta t}(u)|$ und zeigen $|e(\Delta t)| = \mathcal{O}(\Delta t)$.

Hinweis: Man wähle für h einen quadratischen Ansatz.

(8 Punkte)

Aufgabe 24: [Oberhalbstetigkeit und Kollabieren von Attraktoren]

Das dynamische System aus Kapitel II, Beispiel 3.3 der Vorlesung lautet in Polarkoordinaten

$$\dot{r} = -r\left((r-1)_+\right)^2, \quad \dot{\varphi} = 1, \quad \text{wobei } x_+ = \max(x, 0), x \in \mathbb{R}.$$

Man zeige, dass die Kreisscheibe $M = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\|_2 \le 1\}$ globaler Attraktor dieses Systems ist. In der Vorlesung wurde $M_{\Delta t} = \{0\}$ als Attraktor des impliziten Euler-Verfahrens identifiziert. Man nutze diese Rechung, um einen entsprechenden Attraktor $M_{\Delta t}$ des expliziten Euler-Verfahrens zur Schrittweite Δt zu bestimmen. Wie verhält sich der Hausdorff-Abstand $\operatorname{dist}_H(M, M_{\Delta t})$?

(7 Punkte)