Aufgaben zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme

W.–J. Beyn

Sommersemester 2016

Abgabe: Montag, 18.7.2016, bis 10:15 Uhr, Postfach 114 (Alina Girod) in V3-128

Übungsgruppe: Mi. 8-10, V4-119

Aufgabe 25: [Konsistenzordnung der impliziten Mittelpunktsregel]
Gegeben sei das Liniensystem

$$v' = F_{\Delta x}(v,t),\ t \in [0,T], \quad v(0) = v^0 \tag{1}$$

zum klassischen Differenzenverfahren mit Schrittweite Δx für die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t =& u_{xx} + f(u,x,t), \quad x \in (a,b), t \in (0,T), \\ u(x,0) =& u_0(x), \quad x \in (a,b), \quad u(a,t) = \gamma_a, \quad u(b,t) = \gamma_b, \quad t \in (0,T). \end{aligned} \tag{2}$$

Verwenden Sie anstelle der Trapezmethode (Crank-Nicolson) die implizite Mittelpunktsregel zur Diskretisierung von (1) auf dem Gitter $\{t_j = j\Delta t : j = 0,\ldots,N\}, \Delta t = \frac{T}{N}$,

$$\frac{1}{\Delta t}(v^j - v^{j-1}) = F_{\Delta x}(\tfrac{1}{2}(v^j + v^{j-1}), \tfrac{1}{2}(t_j + t_{j-1})), \quad j = 1,\ldots,N. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass die so entstehende vollständige Diskretisierung einen Konsistenzfehler der Form $\mathcal{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)$ bzgl. der Maximumnorm hat, falls die Lösung von (2) und die Nichtlinearität f hinreichend glatt sind.
Hinweis: Es ist hilfreich, zunächst den linearen Fall mit $f(x,t)$ statt $f(u,x,t)$ zu betrachten.

(8 Punkte)

Aufgabe 26: [Gleichgewichte und Mannigfaltigkeiten eines Populationsmodells]

Betrachten Sie noch einmal das Modell einer Futterkette aus Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass sich das System mit Hilfe der Beziehung $u_1 + u_2 + u_3 = 1$ auf zwei Variablen zu

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \alpha(1-u_1) - u_2 f_1(u_1), \quad f_1(u_1) = \frac{u_1}{a_1 + b_1 u_1}, \\ \dot{u}_2 &= -\alpha u_2 + u_2 f_1(u_1) - (1-u_1-u_2) f_2(u_2), \quad f_2(u_2) = \frac{u_2}{a_2 + b_2 u_2} \end{aligned}$$

reduzieren lässt. Fertigen Sie für das reduzierte System mit der Numlab-Toolbox `DGL 2D Phasenbild` Phasenbilder an, die alle Gleichgewichte und für die Sättel auch die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten sowie einige typische Orbits zeigen. Verwenden Sie $a_1 = b_1 = b_2 = 1, a_2 = 2$ und die folgenden Werte für α sowie die Fenster $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \alpha = 0.1, &\quad \Omega = [-0.2, 1.2] \times [-0.2, 1.2], \\ \alpha = 0.4, &\quad \Omega = [-0.2, 1.2] \times [-0.2, 2], \\ \alpha = 0.7, &\quad \Omega = [-0.2, 3] \times [-1.5, 5]. \end{aligned}$$

Verwenden Sie ggfs. die Option $\mathrm{arclength} = d$ mit dem Durchmesser d von Ω, um die gezeichnete Länge der stabilen/instabilen Mannigfaltigkeiten zu begrenzen.

(6 Punkte)