Übungen zur Vorlesung
Praktische Mathematik für Medieninformatiker
Sommersemester 2015

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 3
29.4.2015

Abgabe: Mittwoch, 6.5.2015, 10:00 Uhr in V3-128, Postfach 180
Tutor: Julius Hülsmann, E-Mail: `jhuelsma@math.uni-bielefeld.de`

Aufgabe 7:

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine Matrix, die die Eigenwerte

$$1 = \lambda_1 > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

besitzt. Seien $v_1,\ v_2, \ldots, v_n$ die zugehörigen Eigenvektoren.
Sei $x^0 := \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ mit reellen Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\alpha_1 \neq 0$ und

$$x^{k+1} = Ax^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Beweisen Sie: $\lim_{k\to\infty} x^k = \alpha_1 v_1$.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} -0.2 & -0.6 \\ 0.6 & 1.3 \end{pmatrix}$ und sei $x^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Geben Sie unter Verwendung von Aufgabenteil (a), den Grenzwert der Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ an, die durch (1) definiert wird.

(10 Punkte)

Aufgabe 8:

Schreiben Sie ein SCILAB-Programm, das die folgenden Schritte durchführt:

(1) Konstruktion einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n = 10$ mit zufällig gewählten Einträgen in $[0, 1]$.

(2) Wahl eines Zufallsvektors $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

(3) Iteration dieses Vektors:

$$x^{k+1} := \frac{Ax^k}{\|Ax^k\|_2}, \quad \text{für} \quad k = 0, \ldots, 99.$$

(4) Ausgabe von $\langle Ax^{100}, x^{100}\rangle$.

(5) Wiederholen der Schritte (1) bis (4) für die Matrixdimensionen

$$n \in \{100, 1000, 10000\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Befehl `stacksize('max')`, damit SCILAB ausreichend viel Speicher zur Verfügung stellt.

(6) Welche Abhängigkeit besteht zwischen der Matrixdimension n und dem größten Eigenwert der Zufallsmatrix. Stellen Sie anhand der numerischen Daten eine Vermutung auf.

(7) Berechnen Sie in den Fällen $n \in \{10, 100, 1000\}$ sämtliche Eigenwerte der Matrix A aus Schritt (1) unter Verwendung der SCILAB-Funktion `spec`. Erstellen Sie für jedes n eine Abbildung, die die berechneten Eigenwerte in der komplexen Ebene zeigt.

(10 Punkte)

Aufgabe 9:

(i) Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen positiv definit sind:

(i.i) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

(i.ii) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(i.iii) $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,

(i.iv) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

(i.v) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$.

(ii) Untersuchen Sie, ob Spiegelungsmatrizen im $\mathbb{R}^2$ positiv bzw. negativ definit sind.

(10 Punkte)