

Übungen zur Vorlesung

Praktische Mathematik für Medieninformatiker

Sommersemester 2015

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 13
8.7.2015

Abgabe: Mittwoch, 15.7.2015, 10:00 Uhr in V3-128, Postfach 180

Tutor: Julius Hülsmann, E-Mail: jhuelsma@math.uni-bielefeld.de

Aufgabe 37:

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen. Diese Fragen sprechen viele Themen der Vorlesung kurz an und eignen sich insbesondere zur Vorbereitung auf die mündliche Prüfung.

1. Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Norm $\|x\|_2$, dem Skalarprodukt $\langle x, x \rangle$ und $x^T x$?
2. Sei A eine symmetrische $n \times n$ -Matrix. Gilt dann $\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle$?
3. Wann ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal?
4. Beweisen Sie: Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $A^T A = I$, dann gilt $\|Ax\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
5. Sind Dreh- und Spiegelungsmatrizen orthogonal?
6. Erhalten Skalierungen bzw. Scherungen im $\mathbb{R}^2$ den Flächeninhalt?
7. Welche Werte kann die Determinante einer orthogonalen Matrix annehmen?
8. Folgt aus $\det(Q) = 1$, dass die Matrix Q orthogonal ist?
9. Wie kann man anhand der Determinante erkennen, dass eine 2×2 Matrix eine Spiegelung bzw. eine Drehung beschreibt?
10. Welche Informationen liefert die Determinante für orthogonale 3×3 -Matrizen?
11. Wie kann man anhand der Eigenwerte einer orthogonalen 3×3 -Matrix erkennen, welche geometrische Operation diese beschreibt?
12. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenwerten und dem charakteristischen Polynom einer Matrix?
13. Welche Eigenwerte besitzt die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$?
14. Geben Sie eine 3×3 -Matrix an, für die der Eigenwert 5 die algebraische Vielfachheit 3 und die geometrische Vielfachheit 2 besitzt.

15. Welche Eigenwerte besitzen orthogonale Matrizen?

16. Geben Sie die Eigenwerte und die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ an.

17. Beweisen Sie, dass eine positiv definite Matrix – mit ausschließlich reellen Eigenwerten – nur positive Eigenwerte besitzt. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

18. Beweisen Sie, dass die Matrix A positiv definit ist, falls $(-A)$ negativ definit ist.

19. Untersuchen Sie, ob jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ausschließlich reelle Eigenwerte besitzt?

20. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Imag}(\lambda) \neq 0$ ein Eigenwert von A . Zeigen Sie, dass dann auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A ist.

21. Untersuchen Sie, welche der 3 Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

zueinander ähnlich sind.

22. Untersuchen Sie, ob Drehungen / Spiegelungen orientierungserhaltend oder umkehrend sind.

23. Welche geometrische Operation beschreibt die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

24. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine invertierbare Matrix. Kann A in das Produkt einer orthogonalen Matrix und einer rechten oberen Dreiecksmatrix zerlegt werden?

25. Beschreiben Sie kurz die Idee der QR -Zerlegung nach Householder.

26. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,m}$. Skizzieren Sie die Idee der QR -Zerlegung nach Householder im Fall $n > m$.

27. Wie kann man unter Verwendung der QR -Zerlegung den Betrag der Determinante einer Matrix berechnen?

28. Zeigen Sie, dass $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ein Projektor ist und geben Sie Bild und Kern von P an.

29. Sei $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ ein Projektor, ist dann auch P^T ein Projektor?

30. Geben Sie zwei unterschiedliche Projektionsmatrizen P_1 und $P_2 \in \mathbb{R}^{2,2}$ an, mit $\text{bild}(P_1) = \text{bild}(P_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0 \right\}$.

31. Warum kann nicht jede Kurve in der Ebene mit Hilfe einer Abbildung F der Form $F(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ beschrieben werden?
32. Sei $F(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \cos(uv) \end{pmatrix}$. Berechnen Sie Tangential- und Normalenvektoren im Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
33. Geben Sie jeweils eine Abbildung an, durch die der Einheitskreis explizit bzw. implizit definiert wird.
34. Wie kann der Einheitskreis in $\mathbb{C}$ formal beschrieben werden?
35. Ist die Berechnung eines Normalenvektors an eine Oberfläche O aufwändig, wenn diese eine implizite Darstellung der Form $O = \{x \in \mathbb{R}^3 : G(x) = 0\}$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt?
36. Welches geometrische Objekt wird durch die folgende Menge beschrieben: $\{x \in \mathbb{R}^3 : x^T x = 2\}$?
37. Werten Sie das Polynom $f(t) = t^2 + 2t + 3$ mit dem Horner-Schema an der Stelle $\bar{t} = 2$ aus.
38. Seien (t_i, s_i) , $i = 0, \dots, m$ gegebene Datenpaare mit paarweise verschiedenen t_i . Zählen Sie drei Ansätze auf, um das Interpolationspolynom, das durch diese Daten verläuft, zu berechnen.
39. Sei $L_2(t)$ das Lagrangesche Basispolynom zu den Stützstellen t_0, t_1, t_2 und t_3 . Berechnen Sie $L_2(t_0)$ und $L_2(t_2)$.
40. Welchen Grad besitzt das Interpolationspolynom?
41. Warum existiert zu den gegebenen Daten immer ein Interpolationspolynom?
42. Warum ist das Interpolationspolynom eindeutig?
43. Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu den Daten $(-1, 14)$, $(1, 0)$ und $(2, -1)$.
44. Wie kann das Interpolationspolynom in der Newtonschen Darstellung effizient ausgewertet werden?
45. Geben Sie die Taylor-Entwicklung des Kosinus an der Stelle $t = 0$ an.
46. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wie verwendet man den Interpolationsansatz zum Erhalt einer Approximation der Ableitung von f ?
47. Geben Sie eine Fehlerabschätzung für den vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten an und beweisen Sie diese.

48. Beschreiben Sie, wie man die Schrittweite h beim vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten optimal wählt.
49. Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wie erhält man – unter Verwendung des zentralen Differenzenquotienten eine Approximation der Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$?
50. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zwei-mal stetig differenzierbare Funktion. Geben Sie Bedingungen an, die sicherstellen, dass f im Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ ein Minimum besitzt.
51. Sei $f(x) = \sin(x_1) \cdot x_2^2$. Berechnen Sie die Hessematrix von f .
52. Wie kann man eine Hessematrix relativ schnell auf positive Definitheit überprüfen?
53. Skizzieren Sie die Idee des Sintflutalgorithmus.
54. Seien (x_i, w_i) , $i = 1, \dots, n$ gegebene Punkte. Mit welchem Ansatz findet man eine Gerade der Form $f(x) = a_0 + a_1 x$, die möglichst nah an diesen Datenpaaren liegt.
55. Geben Sie die Gerade an, die möglichst nah an den drei Datenpaaren $(0, 3)$, $(1, 0)$ und $(2, 3)$ liegt.
56. Seien (x_i, w_i) , $i = 1, \dots, n$ gegebene Datenpaare. Für welches Polynom vom Grad $\leq n - 1$ ist die Summe der Fehlerquadrate minimal?
57. Ist das in Aufgabenteil 56 gesuchte Polynom eindeutig?
58. Beweisen Sie für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Formel $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.
59. Beweisen Sie unter Verwendung der Euler-Formel die Aussage:

$$|e^{ix}| = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

60. Seien Datenpaare $(t_k = \frac{k}{m+1}, s_k)$, $k = 0, \dots, m$ gegeben. Wie findet man die Koeffizienten der Interpolationsaufgabe

$$p(t_k) = s_k, \quad k = 0, \dots, m, \quad \text{mit} \quad p(t) = \sum_{j=0}^m a_j \frac{1}{\sqrt{m+1}} e^{2\pi i j t} ? \quad (1)$$

61. Beschreiben Sie Unterschiede und Zusammenhänge zwischen der Polynominterpolation und der Fourier-Transformation.
62. Beschreiben Sie die Idee der schnellen Fourier-Transformation.
63. Begründen Sie, dass bei Verwendung des Ansatzes (1) Oszillationen auftreten. Wie kann dieses Problem vermieden werden?
64. Entwickeln Sie eine Formel für die zweidimensionale Fourier-Transformation.

(Bonuspunkte nach Ermessen)