Übungen zur Vorlesung
CHAOTISCHE DYNAMIK
Wintersemester 2015/2016

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 2
29.10.2015

Abgabe: Donnerstag, 5.11.2015, 14:00 Uhr in Postfach 114
Tutorin: Alina Girod, E-Mail: agirod@uni-bielefeld.de

Aufgabe 4:

Sei $\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{N}, (\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ ein zeitdiskretes dynamisches System, wobei die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ stetig ist.
Sei $\{u_1, u_2\}$ ein zwei-periodischer Orbit und wir nehmen an, dass Umgebungen U^1 von u_1 und U^2 von u_2 existieren mit der Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{2n}x = u_1 \; \forall x \in U^1, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi^{2n}x = u_2 \; \forall x \in U^2.$$

Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen nicht jeder Punkt des $\mathbb{R}^k$, unter Iteration mit der Abbildung φ, gegen den zwei-periodischen Orbit konvergiert.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & A_{0,2} \\ A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Menge

$$\Sigma_A := \{(s_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}} : A_{s_n, s_{n+1}} = 1 \; \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

(a) Geben Sie eine Metrik d auf Σ_A an.

(b) Zeigen Sie, dass (Σ_A, d) ein vollständiger metrischer Raum ist.

(c) Sei σ der Shift-Operator auf Σ_A. Beweisen Sie, dass $(\Sigma_A, \mathbb{Z}, \sigma^n)$ ein dynamisches System definiert.

(d) Überprüfen Sie, ob das dynamische System $(\Sigma_A, \mathbb{Z}, \sigma^n)$ auf dem gesamten Raum Σ_A chaotisch (im Sinne von Devaney) ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 6:

In Polarkoordinaten sei die folgende Abbildung gegeben

$$f(r,\varphi) = (r^2, 2\varphi),$$

wobei $r \in (0,\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.
Geben Sie eine invariante Menge an, auf der das durch f erzeugte zeitdiskrete dynamische System eine chaotische Dynamik besitzt. Hierbei ist insbesondere der Nachweis von Chaos (nach Devaney) formal zu führen.

(6 Punkte)