Übungen zur Vorlesung
CHAOTISCHE DYNAMIK
Wintersemester 2015/2016

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 3
5.11.2015

Abgabe: Donnerstag, 12.11.2015, 14:00 Uhr in Postfach 114
Tutorin: Alina Girod, E-Mail: agirod@uni-bielefeld.de

Aufgabe 7:

Sei $\bar{x}$ ein Fixpunkt des dynamischen Systems $(\mathbb{R}^d, \mathbb{Z}, (\varphi^n)_{n\in\mathbb{Z}})$. Zusätzlich existiere eine ε-Umgebung $B_\varepsilon(\bar{x})$ von $\bar{x}$ mit

$$d(\varphi(y), \bar{x}) < d(y, \bar{x}) \quad \text{für alle} \quad y \in B_\varepsilon(\bar{x}),\ y \neq \bar{x}.$$

Überprüfen Sie, ob dieses System auf dem gesamten $\mathbb{R}^d$ eine der Eigenschaften

(i) sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert,

(ii) topologische Transitivität,

(iii) Dichtheit periodischer Punkte

besitzen kann. (6 Punkte)

Aufgabe 8:

(1) Zeigen Sie, dass topologisch äquivalente Systeme die gleiche Anzahl von Fixpunkten und periodischen Orbits besitzen.

(2) Gegeben sei die Abbildung

$$f: \begin{array}{rcl} [-1,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & 4x^3 - 3x. \end{array}$$

Konstruieren Sie eine Abbildung $g : [0,1] \to [0,1]$ (die explizit angegeben werden soll), so dass die durch f und g erzeugten dynamischen Systeme topologisch äquivalent zueinander sind.

Illustrieren Sie das Ergebnis aussagekräftig.

(6 Punkte)

Aufgabe 9:

Untersuchen Sie jeweils, ob die beiden zeitdiskreten dynamischen Systeme, die durch die Abbildungen f und g erzeugt werden, topologisch äquivalent zueinander sind:

(a) $f(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x, \quad g(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x,$

(b) $f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x, \quad g(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x.$

(6 Punkte)

Bonusaufgabe:

Seien (X, d_x), (Y, d_y) zwei metrische Räume, wobei die Mengen X und Y kompakt sind.
Seien $f : X \to X$ und $g : Y \to Y$ zwei stetige Abbildungen, die topologisch konjugiert zueinander sind. Darüber hinaus nehmen wir an, dass das durch f erzeugte dynamische System sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert zeigt.

Beweisen Sie, dass im g-System sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert vorliegt.

Hinweis: Ist $h : X \to Y$ stetig, so liefert die Kompaktheitsannahme die gleichmäßige Stetigkeit von h.

(6 Bonuspunkte)