Übungen zur Vorlesung
CHAOTISCHE DYNAMIK
Wintersemester 2015/2016

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 9
17.12.2015

Abgabe: Donnerstag, 7.1.2016, 14:00 Uhr in Postfach 114
Tutorin: Alina Girod, E-Mail: agirod@uni-bielefeld.de

Aufgabe 25:

Gegeben sei das durch die Abbildung

$$f(x) = \frac{\lambda x}{1+x}, \quad \lambda \in [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}].$$

erzeugte parameterabhängige zeit-diskrete dynamische System $\big(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{N}, (f^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$.

(1) Berechnen Sie alle Fixpunkte dieses Systems und bestimmen Sie deren Stabilitätseigenschaften in Abhängigkeit vom Parameter λ. Erstellen Sie eine Abbildung, in der die stabilen und instabilen Fixpunkte über λ aufgetragen sind.

(2) Untersuchen Sie – in Abhängigkeit von λ – die Konvergenzrate, mit der Orbits gegen die anziehenden Fixpunkte konvergieren.

Hinweis: Diese nichtlineare Abbildung hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass die Iterierten zum Anfangswert $x_0 \geq 0$ explizit angegeben werden können (ist zu beweisen):

$$x_n = \frac{x_0 \lambda^n}{1 + x_0 \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 26:

Gegeben seien die Funktionen

$$F(x) = 4x(1-x),\ x \in [0,1] \quad \text{und} \quad G(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Beweisen Sie die folgende Aussage:

- Die Abbildung $H : [0,1] \to [0,1]$, definiert durch $H(x) = \dfrac{1-\cos(\pi x)}{2}$ ist stetig und bijektiv und es gilt die Identität

$$H \circ G(x) = F \circ H(x), \quad \text{für alle } x \in [0,1].$$

Ist F eine D-, BC- bzw. LY-chaotische Abbildung?

(6 Punkte)

Aufgabe 27:

Die Differenzengleichung

$$u_{n+1} = A_n u_n, \quad A_n \text{ invertierbar}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

besitze eine exponentielle Dichotomie auf $\mathbb{Z}$ mit den Daten $(K, \alpha_s, \alpha_u, P_n^s, P_n^u)$.

(1) Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{Z}$ die folgende Aussage gilt:

$$\mathcal{R}(P_n^s) = \big\{ u \in \mathbb{R}^d : \sup_{j \geq n} \|\Phi(j,n)u\| < \infty \big\}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst für $j \geq n$ und jedes $u \in \mathbb{R}^d$

$$\|\Phi(j,n)P_n^s u\| \leq K \mathrm{e}^{-\alpha_s(j-n)} \|P_n^s u\| \quad \text{und} \quad \|\Phi(j,n)P_n^u u\| \geq K^{-1} \mathrm{e}^{\alpha_u(j-n)} \|P_n^u u\|$$

und schließlich mit $u = P_n^s u + P_n^u u$ die Aussage.

(2) Entsprechend zu (1) folgt die Aussage (die nicht zu beweisen ist):

$$\mathcal{R}(P_n^u) = \big\{ u \in \mathbb{R}^d : \sup_{j \leq n} \|\Phi(j,n)u\| < \infty \big\}.$$

Beweisen Sie:

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine beliebige beschränkte (d. h.: $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|u_n\| < \infty$) Lösung der obigen Differenzengleichung, dann gilt $u_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(6 Punkte)

FROHE WEIHNACHTEN