Übungen zur Vorlesung
CHAOTISCHE DYNAMIK
Wintersemester 2015/2016

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 13
28.1.2016

Abgabe: Donnerstag, 4.2.2016, 14:00 Uhr in Postfach 114
Tutorin: Alina Girod, E-Mail: agirod@uni-bielefeld.de

Aufgabe 35:

Seien $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ ein Diffeomorphismus, $f(\xi) = \xi$ und $\bar{x}_{\mathbb{Z}}$ ein homokliner f-Orbit bezüglich des Fixpunktes ξ. Die Variationsgleichung

$$u_{n+1} = Df(\xi)u_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

habe eine exponentielle Dichotomie auf $\mathbb{Z}$ mit den Projektoren $Q^{s,u}$.
Gegeben seien periodische bzw. Projektions-Randbedingungen

$$b_{\text{per}}(x,y) = x - y,\; b_{\text{proj}}(x,y) = \begin{pmatrix} Y_s^T(x-\xi) \\ Y_u^T(y-\xi) \end{pmatrix} \text{ wobei } Y_{s,u} \text{ Basen von } \big(\mathcal{R}(Q^{u,s})\big)^\perp \text{ sind.}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Randbedingungen die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

(a.1) $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$,

(a.2) $b(\xi,\xi) = 0$,

(a.3) $\big(D_1 b(\xi,\xi)_{|\mathcal{R}(Q^s)} \;\; D_2 b(\xi,\xi)_{|\mathcal{R}(Q^u)}\big) : \mathcal{R}(Q^s) \oplus \mathcal{R}(Q^u) \to \mathbb{R}^d$ ist invertierbar.

(b) Die Randbedingung b besitzt die Ordnung p, falls eine Konstante $C > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$\|b(\bar{x}_{n_-}, \bar{x}_{n_+}) - b(\xi,\xi)\| \le C\left(\|\bar{x}_{n_-} - \xi\|^p + \|\bar{x}_{n_+} - \xi\|^p\right) \text{ für alle } -n_-, n_+ \ge N$$

gilt.

Beweisen Sie, dass periodische Randbedingungen die Ordnung $p = 1$ und Projektions-Randbedingungen die Ordnung $p = 2$ besitzen.

Hinweis: Punkte des homoklinen Orbits liegen auf der stabilen und der instabilen Mannigfaltigkeit. Lokal besitzen diese Mannigfaltigkeiten jeweils eine Graphendarstellung, wobei die zugehörigen Funktionen $h_{s,u}$ zweimal stetig differenzierbar sind.

(9 Punkte)

Aufgabe 36:

(1) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, mit Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}$.

Der zugehörige Lyapunov-Exponent wird definiert durch

$$\lambda_f(x_0) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\prod_{j=0}^{n-1} |f'(x_j)|\right).$$

Sei $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein C^1-Diffeomorphismus und $g(x) = H^{-1} \circ f \circ H(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Untersuchen Sie, ob ein Startwert $y_0 \in \mathbb{R}$ eines g-Orbits $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass

$$\lambda_g(y_0) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\prod_{j=0}^{n-1} |g'(y_j)|\right) = \lambda_f(x_0)$$

gilt.

(2) Gegeben sei die nicht-autonome, skalare, lineare Differenzengleichung

$$u_{n+1} = a_n u_n, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Untere und obere Lyapunov-Exponenten werden definiert durch

$$\begin{aligned} \lambda^- &= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\prod_{j=0}^{n-1} |a_j|\right), \\ \lambda^+ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\prod_{j=0}^{n-1} |a_j|\right). \end{aligned}$$

- Geben Sie im autonomen Fall (d. h. $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$) die unteren und oberen Lyapunov-Exponenten explizit an.
- Zeigen Sie an einem selbstgewählten Beispiel, dass untere und obere Lyapunov-Exponenten nicht übereinstimmen müssen.

(9 Punkte)