Aufgaben zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme

W.–J. Beyn

Sommersemester 2016

Abgabe: Dienst, 17.5.2016, bis 10:15 Uhr, Postfach 114 (Alina Girod) in V3-128

Übungsgruppe: Mi. 8-10, V4-119

Aufgabe 7: [Hénon Abbildung]

Die Hénon-Abbildung $f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wird definiert durch

$$f_{a,b} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 + y - ax^2 \\ bx \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie für $b \geq 0,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ die Fixpunkte der Hénon Abbildung und die Eigenwerte von $Df_{a,b}$ an diesen Fixpunkten.

   Sind die Fixpunkte für $a = 1.4$ und $b = 0.3$ stabil?

b) Setze $a = 1.4$ und $b = 0.3$.

   Approximieren Sie numerisch den Attraktor des durch die Hénon-Abbildung erzeugten diskreten dynamischen Systems $(\mathbb{R}^2, \mathbb{N}, \{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{N}})$, $\varphi^1 = f_{a,b}$ mit dem folgenden Algorithmus:

   Plotten Sie die Trajektorie $\varphi^t(u_0)$ für $t \in [100, T]$, wobei T hinreichend groß zu wählen ist. Verwenden Sie Startwerte $u_0 \in \big\{(0,0), (1, -\frac{1}{2})\big\}$.

   Wie unterscheiden sich die Trajektorien?

Senden Sie Ihr Programm (inkl. Grafiken) per Email an agirod@uni-bielefeld.de

(6 Punkte)

Aufgabe 8: [Stabilität in einem Populationsmodell]

Die folgenden Differentialgleichungen modellieren eine Futterkette mit drei Spezies u_1, u_2, u_3: u_3 frisst u_2, u_2 frisst u_1, u_1 ist Vegetarier und vermehrt sich:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \alpha - \alpha u_1 - u_2 f_1(u_1) \\ \dot{u}_2 &= -\alpha u_2 + u_2 f_1(u_1) - u_3 f_2(u_2) \\ \dot{u}_3 &= -\alpha u_3 + u_3 f_2(u_2) \end{aligned}$$

Dabei ist $\alpha > 0$ und die Futterraten sind von der Form $f_i(v) = \frac{v}{a_i + b_i v},\ i = 1, 2$ mit Parametern $a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$.

a) Zeigen Sie, dass die Hyperebene $H = \big\{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_1 + u_2 + u_3 = 1\big\}$ invariant und der nichtnegative Quadrant $\mathbb{R}^3_+$ sowie das Dreieck $D_+ = H \cap \mathbb{R}^3_+$ positiv invariant unter dem Fluss dieses Systems sind.

b) Zeigen Sie, dass D_+ bzgl. des auf $\mathbb{R}^3_+$ eingeschränkten Flusses asymptotisch stabil ist.

c) Bestimmen Sie alle Fixpunkte des zugehörigen dynamischen Systems in $\mathbb{R}^3_+$ in Abhängigkeit von α.

d) Diskutieren Sie die (asymptotische) Stabilität des Fixpunktes $(u_1, u_2, u_3) = (1, 0, 0)$, bei dem nur die Spezies 1 überlebt!

(8 Punkte)