Aufgaben zur Vorlesung
Numerik dynamischer Systeme

W.–J. Beyn

Sommersemester 2016

Abgabe: Montag, 20.6.2016, bis 10:15 Uhr, Postfach 114 (Alina Girod) in V3-128

Übungsgruppe: Mi. 8-10, V4-119

Aufgabe 15: [Kronecker-Produkt und Stabilitätsfunktion]

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Kronecker Produkts für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und diskutieren Sie den Zusammenhang mit der Stabilitätsfunktion (siehe Vorlesung Kap.II, §1.2).

(i) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$, für $A \in \mathbb{K}^{r,s}$, $B \in \mathbb{K}^{k,\ell}$,

(ii) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ für $A \in \mathbb{K}^{r_1,r_2}$, $C \in \mathbb{K}^{r_2,r_3}$, $B \in \mathbb{K}^{s_1,s_2}$, $D \in \mathbb{K}^{s_2,s_3}$.

(iii) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$, falls $A \in \mathbb{K}^{s,s}$, $B \in \mathbb{K}^{\ell,\ell}$ invertierbar,

(iv) Durch eine Ähnlichkeitstransformation zeige man für die Spektren

$$\sigma(A \otimes B) = \{\lambda\mu : \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}, \quad \text{falls } A \in \mathbb{K}^{s,s},\ B \in \mathbb{K}^{\ell,\ell}.$$

(v) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass ein implizites Runge-Kutta Verfahren mit Schrittweite Δt für ein System $u' = Au$ mit $A \in \mathbb{K}^{m,m}$ auf eine Rekursion $u^{n+1} = R(\Delta t A)u^n$, $n \in \mathbb{N}$ führt, wobei sich $R(\Delta t A)$ durch Kroneckerprodukte und die Runge-Kutta Koeffizienten $\gamma \in \mathbb{R}^s, \beta \in \mathbb{R}^{s,s}$ ausdrücken lässt. Man zeige, dass sich dieselbe Darstellung ergibt, wenn man $R(Z) = p(Z)q(Z)^{-1}$ für Matrizen $Z \in \mathbb{K}^{m,m}$ definiert und die Polynome $p, q \in \mathcal{P}_s$ aus der Darstellung der skalaren rationalen Stabilitätsfunktion

$$R(z) = 1 + z\gamma^T(I_s - z\beta)^{-1}\mathbb{1}_s = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{C}, z^{-1} \notin \sigma(\beta)$$

gewinnt.

(8 Punkte)

Aufgabe 16: [Stabilitätsgebiet eines Mehrschrittverfahrens]

Das BDF-2-Schrittverfahren ist gegeben durch die Rekursionsvorschrift

$$\frac{3}{2}u_{n+2} - 2u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n = \Delta t f(t_{n+2}, u_{n+2}), n = 0, 1, \ldots.$$

Zeigen Sie, dass das BDF-2-Schrittverfahren absolut stabil ist, und zeichnen Sie das Gebiet absoluter Stabilität.
Anleitung: Bestimmen Sie wie im Vorlesungsskript das zugehörige Polynom $q(z, \xi)$ und dann eine Funktion $\xi \mapsto z(\xi)$, die die Gleichung $q(z(\xi), \xi) = 0$ erfüllt. Diskutieren Sie anschließend den Realteil der Kurve $\{z(\xi) : |\xi| = 1\}$ in Polarkoordinaten.

(6 Punkte)