

Mass- und Integrationstheorie – Probeklausur (Dr. Gess) SoSe 2015

1. Aufgabe

(3 Punkte)

- (a) Sei Ω eine Menge, sei $\mathcal{R}$ ein Ring über Ω und μ ein Maß auf $\mathcal{R}$. Definieren Sie das zu μ assoziierte äußere Maß.
- (b) Definieren Sie den Begriff einer μ^* -messbaren Menge.
- (c) Sei m das eindimensionale Lebesguemaß auf dem Ring aller endlichen Vereinigungen rechtshalboffener Intervalle der Form $[a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sei m^* das zu m assoziierte äußere Maß. Zeigen Sie die m^* -Messbarkeit der Menge $\mathbb{Q}$.

2. Aufgabe

(3 Punkte)

- (a) Formulieren Sie den Satz der dominierten Konvergenz.
- (b) Sei m das eindimensionale Borel-Lebesguemaß auf $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ und seien $f, f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, Borel-messbare Funktionen, so dass $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass

(i) $\int_{[0,1]} f_n dm$ nicht notwendig gegen $\int_{[0,1]} f dm$ konvergiert;

(ii) aber es gilt

$$\int_{[0,1]} f_n e^{-f_n} dm \rightarrow \int_{[0,1]} f e^{-f} dm.$$

3. Aufgabe

(3 Punkte)

- (a) Formulieren Sie den Satz von Fubini.
- (b) Sei m das eindimensionale Borel-Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, x \leq y < x + 1 \\ -1, & x \geq 0, x + 1 \leq y < x + 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dm(x) \right] dm(y) \text{ und } \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dm(y) \right] dm(x).$$

Erklären Sie, warum das Ergebnis Ihrer Rechnung nicht im Widerspruch zum Satz von Fubini steht.

Viel Erfolg!