SS 2015
Dr. B. Gess

Präsenzübungsaufgaben zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

Blatt 1

Aufgabe 1. (i) Ein System $\mathcal{A}$ von Untermengen einer Menge Ω ist genau dann eine σ-Algebra über Ω, wenn gilt:

(a) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(b) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^C \in \mathcal{A}$,

(c) $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

(ii) Ist die Vereinigung zweier $\sigma-$Algebren wieder eine $\sigma-$Algebra?

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma-$Algebra auf einer Menge Ω und $\Omega' \subseteq \Omega$. Zeigen Sie: Dann ist $\mathcal{A} \cap \Omega' := \{A \cap \Omega' | A \in \mathcal{A}\}$ eine $\sigma-$Algebra auf Ω', die sogenannte *Spur$-\sigma-$Algebra* von $\mathcal{A}$ auf Ω'.

Aufgabe 3. Geben Sie über den entsprechenden Grundmengen Ω die erzeugten $\sigma-$Algebren $\sigma(M_i)$ der folgenden Mengen an:

$$M_1 = \{\{1\}, \{2\}\} \text{ über } \Omega = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$M_2 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\} \text{ über } \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ und}$$

$$M_3 = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}\} \text{ über } \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Aufgabe 4. Sei $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen Ω_1 und Ω_2. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathcal{B}$ eine $\sigma-$Algebra auf Ω_2, so stellt

$$\mathcal{A} := \{T^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}$$

eine $\sigma-$Algebra auf Ω_1 dar.

(b) Ist $\mathcal{A}$ eine $\sigma-$Algebra auf Ω_1, so stellt

$$\mathcal{B} := \{B | T^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

eine $\sigma-$Algebra auf Ω_2 dar.