SS 2015
Dr. B. Gess

Präsenzübungsaufgaben zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

Blatt 2

Aufgabe 1. (Translationsinvarianz des Lebesguemaßes).

Für $d \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^d$ und $r \in \mathbb{R}$ seien $T_a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und $H_r : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ gegeben durch $T_a(x) = x + a$ und $H_r(x) = r \cdot x$, für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildungen T_a und H_r sind $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)-$messbar.

(b) Es gilt $m^*(B) = m^*(a + B)$ und $|r|^d \cdot m^*(B) = m^*(r \cdot B)$ für alle $B \subset \mathbb{R}^d$.

Aufgabe 2. (Charakterisierung des Lebesguemaßes).

Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}$ ein translationsinvariantes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Zeigen Sie, dass aus $\mu([0,1[) = 1$ bereits folgt, dass μ das eindimensionale Lebesguemaß ist.

Aufgabe 3. (Charakterisierung von m-Nullmengen des $\mathbb{R}^d$).

Sei m das d-dimensionale Lebesguemaß. Zeigen Sie, dass für eine Menge $N \subset \mathbb{R}^d$ folgende Bedingungen äquivalent sind:

(i) $m^*(N) = 0$

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Folge von Quadern $]a_n, b_n[$, $n \geq 1$, so dass $N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{d} (b_{n,i} - a_{n,i}) < \varepsilon$, für $a_n = (a_{n,1}, \ldots, a_{n,d})$ und $b_n = (b_{n,1}, \ldots, b_{n,d})$, $n \geq 1$.