SS 2015
Dr. B. Gess

Präsenzübungsaufgaben zur Vorlesung
Maß- und Integrationstheorie

Blatt 3

Aufgabe 1. Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die auf $\mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $\forall x, y \in]a, b[,\ \forall \lambda \in]0, 1[$: $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$;

(b) $\forall l \in \mathbb{N}, \forall x_1, \ldots, x_l \in]a, b[, \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_l \in]0, 1[$ mit $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1$ gilt

$$f\Big(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i x_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{l} f(\lambda_i x_i).$$

Aufgabe 3. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei die Abbildung

$$\| \cdot \|_\infty : \mathcal{L}^\infty(\mu) \to \mathbb{R}_+$$

durch

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \in \mathbb{R} : c \geq |f| \quad \mu\text{-f.ü.}\}$$

für alle $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ gegeben. Zeigen Sie, dass dann

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

für alle $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ gilt.