SS 2015
Dr. B. Gess

# Übungsaufgaben zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt
Ihren Namen und den Namen Ihres Tutors.)

Blatt 1
Abgabe am Freitag, 14.08

**Aufgabe 1.** *(4 Punkte)* Sei $X$ eine Menge. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A} := \{A \subseteq X | A$ endlich oder $X \setminus A$ endlich$\}$ ist eine Algebra.

(b) Die Algebra $\mathcal{A}$ aus Aufgabenteil (a) ist genau dann eine $\sigma-$Algebra, wenn $X$ eine endliche Menge ist.

(c) Ist $\mathcal{A}$ eine beliebige Algebra, so gehört die *symmetrische Differenz*

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

zweier Elemente $A, B \in \mathcal{A}$ ebenfalls zu $\mathcal{A}$.

**Aufgabe 2.** *(4 Punkte)* Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Seien $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ zwei $\sigma-$Algebren über $X$, dann ist der Durchschnitt $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ wieder eine $\sigma-$Algebra über $X$.

(b) Allgemeiner gilt: Sei $\mathcal{S}_i$, $i \in \mathcal{I}$ eine (endliche oder unendliche) Menge von $\sigma-$Algebren über $X$, so ist der (endliche oder unendliche) Schnitt

$$\mathcal{S} \equiv \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{S}_i$$

wieder eine $\sigma-$Algebra über $X$.

**Aufgabe 3.** *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{S})$ für die folgenden Teilmengensysteme $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(a) $\mathcal{S} = \{]a,b[ : -\infty \leq a < b \leq \infty\}$. Hinweis: Schreibe jede offene Menge als Vereinigung von $]a,b[$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$.

(b) $\mathcal{S} = \{[a,b[ : -\infty \leq a < b \leq \infty\}$. Hinweis: Benutze Aufgabenteil (a).

(c) $\mathcal{S} = \{K \subset \mathbb{R} : K$ kompakt $\}$.

**Aufgabe 4.** *(5 Punkte)* Sei $\mu$ ein endlich additives Maß auf einem Ring $\mathcal{R}$ über einer Menge $\Omega$. Seien $A, B, A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{R}$ . Dann gilt:

(i) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

**bitte wenden**

(ii) Für $A \subset B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(iii) Für $A \subset B$ und $\mu(A) < \infty$ gilt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(iv) Es gilt
$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

(v) Für paarweise disjunkte Mengen $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, gilt
$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

**Aufgabe 5.** *(3 Punkte)* Sei $(K_n)_{n\geq 1}$ eine Folge kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ mit $\cap_{n=1}^{N} K_n \neq \emptyset$ für alle $N \geq 1$. Zeige, dass $\cap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

**Aufgabe 6.** *(5 Punkte)* (Vollständige Maßräume). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine $\mu$-Nullmenge ist eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$. Der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **vollständig**, falls jede Teilmenge einer $\mu$-Nullmenge in $\mathcal{A}$ liegt. Zeigen Sie: Ist $\mu^*$ ein äußeres Maß und ist $\mathcal{A}_{\mu^*}$ die $\sigma$-Algebra der $\mu^*$-messbaren Mengen, so ist $(\Omega, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}})$ vollständig.