SS 2015
Dr. B. Gess

Übungsaufgaben zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt
Ihren Namen und den Namen Ihres Tutors.)

Blatt 2
Abgabe am Freitag, 21.08

Aufgabe 1. *(4 Punkte)* Seien $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen.

(i) Zeigen Sie: Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1})/\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_2})$-messbar. (Hinweis: Die Borel-σ-Algebra ist die kleinste σ-Algebra, die die offenen Mengen enthält.)

(ii) Zeigen Sie: Jede monoton wachsende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar.

(iii) Geben Sie eine $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die nicht stetig und nicht monoton wachsend ist.

Aufgabe 2. *(5 Punkte)* (Charakterisierung messbarer Funktionen) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum (= messbarer Raum), sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion und sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist $\mathcal{A}$-messbar.

(ii) $\forall \alpha \in D \ : \ \{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$.

(iii) $\forall \alpha \in D \ : \ \{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$.

(iv) $\forall \alpha \in D \ : \ \{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$.

(v) $\forall \alpha \in D \ : \ \{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)* Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $A \in \mathcal{A}$. Erinnern Sie sich daran, dass $\mathcal{A} \cap A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra auf A ist.

(i) Zeigen Sie, dass die Restriktion $\mu \restriction_{\mathcal{A} \cap A}$ von μ auf $\mathcal{A} \cap A$ ein Maß auf $\mathcal{A} \cap A$ ist. ($\mu \restriction_{\mathcal{A} \cap A}$ ist definiert durch $\mu \restriction_{\mathcal{A} \cap A} (E) = \mu(E)$, für alle $E \in \mathcal{A} \cap A$.)

(ii) Zeigen Sie, dass für eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$, $f \cdot \mathbb{I}_A$ genau dann $\mathcal{A}$-messbar ist, wenn $f \restriction_A$ $\mathcal{A} \cap A$-messbar ist und dass in diesem Fall gilt

$$\int f \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{A}} \, d\mu = \int f \, d\mu \restriction_{\mathcal{A} \cap A} .$$

bitte wenden

Aufgabe 4. *(3 Punkte)* Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Bestimmen Sie alle messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ im Falle, dass

(a) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

(b) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$.

(c) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$, für eine Menge $A \subset \Omega$.

Aufgabe 5. *(4 Punkte)* Sei $m : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \bar{\mathbb{R}}$ das eindimensionale Borel-Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(a) Geben Sie eine Folge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren Elementarfunktionen mit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, dm = 1$$

an.

(b) Geben Sie eine Folge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren Elementarfunktionen mit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, dm = \infty$$

an.

Aufgabe 6. *(4 Punkte)* (Vervollständigung von Maßräumen) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Ein Maßraum $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ mit $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$ und $\bar{\mu} \restriction_{\mathcal{A}} = \mu$ heißt *Vervollständigung* von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, falls $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ vollständig ist (s. Aufgabe 6, Blatt1 und Definition 4.9) und falls für jeden vollständigen Maßraum $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ mit $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mu} \restriction_{\mathcal{A}} = \mu$ folgt, dass $\bar{\mathcal{A}} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mu} \restriction_{\bar{\mathcal{A}}} = \bar{\mu}$ gilt.

Zeigen Sie: Jeder Maßraum hat eine Vervollständigung.