SS 2015
Dr. B. Gess

Übungsaufgaben zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt
Ihren Namen und den Namen Ihres Tutors.)

Blatt 3
Abgabe am Freitag, 28.08

Aufgabe 1. *(4 Punkte)* Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei $\mathcal{A}$-messbare Funktionen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Aus $f, g \geq 0$ und $f \leq g$ μ-f.ü. folgt, dass $\int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu$ gilt.

(ii) Sind f und g beide μ-integrierbar mit $f \leq g$ μ-f.ü., so folgt $\int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu$.

(iii) Ist g μ-integrierbar mit $|f| \leq g$ μ-f.ü., so folgt, dass f μ-integrierbar ist.

(iv) Ist g μ-integrierbar und $f = g$ μ-f.ü., so ist f ebenfalls μ-integrierbar und es gilt $\int f \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu$.

Aufgabe 2. *(3 Punkte)* Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ die Vervollständigung von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und sei $P : \Omega \to \{\text{wahr, falsch}\}$ eine Eigenschaft von Punkten in Ω (ein sog. *Prädikat*), so dass P μ-f.ü. gilt. Zeigen Sie, dass $N_P := \{\omega \in \Omega \mid P(\omega) \text{ gilt}\}$ in $\bar{\mathcal{A}}$ liegt.

Aufgabe 3. *(2 Punkte)* Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Desweiteren sei $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ seine Vervollständigung. Sei zudem $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion und sei $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion mit $f = g$ μ-f.ü.. Zeigen Sie, dass g dann $\bar{\mathcal{A}}$-messbar, aber im Algemeinen nicht $\mathcal{A}$-messbar ist.

Aufgabe 4. *(3 Punkte)* Geben Sie eine nichtleere Menge Ω, einen Ring $\mathcal{R}$ auf Ω sowie ein endlich additives, aber nicht σ-additives Maß $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ an, welches "stetig von oben in $\emptyset$" ist.

(Zum Erinnerung: μ ist stetig von oben in $\emptyset$, falls für alle $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $A_n \downarrow \emptyset$ und $\mu(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0.)$$

Aufgabe 5. *(4 Punkte)*

(i) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen mit $0 \geq f_n(\omega) \geq f_{n+1}(\omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

und alle $\omega \in \Omega$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \, \mathrm{d}\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, \mathrm{d}\mu$$

gilt.

(ii) Sei $E \in \mathcal{A}$. Betrachten Sie die Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} \mathbb{I}_E(x), & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 1 - \mathbb{I}_E(x), & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu$ und $\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu$.

Aufgabe 6. *(4 Punkte)* Sei m das eindimensionale Borel-Lebesguemaß auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ und sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ eine beschränkte Borel-messbare Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\int_{[0,1]} f \mathrm{d}m = \inf\left\{ \int_{[0,1]} u \mathrm{d}m \;\middle|\; u \text{ ist Borel-messbare Elementarfunktion, } u \geq f \right\}.$$

Aufgabe 7. *(4 Punkte)* Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass für alle $\mathcal{A}$-messbare Funktionen $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} n \int_\Omega \log\left(1 + \frac{1}{n} f\right) \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \mathrm{d}\mu.$$