SS 2015
Dr. B. Gess

Übungsaufgaben zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt
Ihren Namen und den Namen Ihres Tutors an.)

Blatt 5
Abgabe am Freitag, 11.09

Aufgabe 1. *(2 Punkte)* Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, sei $p \in [1, \infty[$, sei $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und sei $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen mit $|f_n| \leq g$ μ-f.ü. für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei zudem $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ im Maß μ. Zeigen Sie, dass dann $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ gilt.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)* Im folgenden sollen je ein Maßraum und ein Gegenbeispiel angegeben werden.

(i) Zeigen Sie für alle $1 \leq p < \infty$, dass „f.ü.-Konvergenz" nicht „$\mathcal{L}^p$-Konvergenz" impliziert.

(ii) Zeigen Sie für alle $1 \leq p < \infty$, dass „$\mathcal{L}^p$-Konvergenz" nicht „f.ü.-Konvergenz" impliziert.

Aufgabe 3. *(6 Punkte)* Ist folgendes wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort (d.h. Beweis oder Gegenbeispiel).

(a) Sei m das eindimensionale Borel-Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und seien $p, r \in [1, \infty[$ und $f_n \in \mathcal{L}^p(m) \cap \mathcal{L}^r(m)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ in $\mathcal{L}^p(m)$ und $f_n \xrightarrow{n\to\infty} h$ in $\mathcal{L}^r(m)$. Dann $g(x) = h(x)$ m-f.ü.

(b) Sei m das eindimensionale Borel-Lebesguemaß auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ und sei $f_n \in \mathcal{L}^1(m) \cap \mathcal{L}^2(m)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

  (i) Wenn $\|f_n\|_1 \to 0$, dann $\|f_n\|_2 \to 0$.

  (ii) Wenn $\|f_n\|_2 \to 0$, dann $\|f_n\|_1 \to 0$.

Aufgabe 4. *(2 Punkte)* Sei m das eindimensionale Borel-Lebesguemaß auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ und sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion auf $[0,1]$, so dass $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 2g(x) - g(y)$ $m \otimes m$-integrierbar auf $[0,1] \times [0,1]$ ist. Zeigen Sie, dass g m-integrierbar auf $[0,1]$ ist.

Aufgabe 5. *(2 Punkte)* Sei m das eindimensionale Borel-Lebesguemaß auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} 2xe^{x^2+y} \mathrm{d}m \otimes m.$$

bitte wenden

Aufgabe 6. *(8 Punkte)* Betrachten Sie den messbaren Raum $([0,1]\times[0,1], \mathcal{B}([0,1])\otimes\mathcal{B}([0,1]))$. Sei m das eindimensionale Borel-Lebesguemaß und μ das Zählmaß auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ (d.h. $\mu(A)$ ist die Anzahl der Elemente in $A \in \mathcal{B}([0,1])$) und sei $D = \{(x,y) \in [0,1]\times[0,1] : x = y\}$. Zeigen Sie, dass

(i) $D \in \mathcal{B}([0,1])\otimes\mathcal{B}([0,1])$;

(ii) $m \otimes m(D) = 0$;

(iii) μ nicht σ-endlich ist;

(iv) folgendes gilt

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbb{I}_D \mathrm{d}\mu \right) \mathrm{d}m \neq \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbb{I}_D \mathrm{d}m \right) \mathrm{d}\mu.$$

Merken Sie sich, warum in diesem Fall der Satz von Fubini nicht gilt.