SS 2015
Dr. B. Gess

Übungsaufgaben zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt
Ihren Namen und den Namen Ihres Tutors an.)

Blatt 6
Abgabe am Freitag, 18.09

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

(i) Finden Sie zwei messbare Räume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$, und eine Menge $Q \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ mit $Q_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$ für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ und $Q_{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$ für alle $\omega_2 \in \Omega_2$, aber $Q \notin \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

(ii) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass auf die Voraussetzung „$E_{i,k} \uparrow \Omega_i$" in Satz 11.3 aus der Vorlesung nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)* Sei $\Omega_1 = \Omega_2 = [0, 1]$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}([0, 1])$, $\mu_1 = \mu_2 = m$, das Lebesguemaß (der Einfachheit halber, $m(dx) = dx$ und $m(dy) = dy$). Sei

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy \right) dx = \frac{\pi}{4} = -\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Zeigen Sie weiter, dass

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x, y)|\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) = +\infty.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Identität $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) = f(x, y)$, um das Doppelintegral auszurechnen.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)* Sei m_2 das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. Benutzen Sie den Satz von Fubini und den Transformationssatz, um die folgenden Integrale zu bestimmen:

(i)

$$\int_A x_1^2 + x_2^2 \,\mathrm{d}m_2(x_1, x_2) \ \text{ mit } A = \{x_1 + x_2 \leq 2, x_1, x_2 \geq 0\};$$

bitte wenden

(ii)
$$\int_A e^{\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}}\, \mathrm{d}m_2(x_1,x_2) \text{ mit } A = \{x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_2+1 \leq x_1 \leq x_2+2\}.$$

Aufgabe 4. *(6 Punkte)*

(i) Zeigen Sie: Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$ und sind $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gegeben, so gilt $\mathcal{L}^p(\mu) \supseteq \mathcal{L}^q(\mu)$.

(ii) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) = 1$. Zeigen Sie, dass für jedes $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ gilt
$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

(iii) Geben Sie ein Beispiel eines Maßraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ an, in dem für $1 \leq p < q \leq \infty$ weder $\mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathcal{L}^q(\mu)$ noch $\mathcal{L}^q(\mu) \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$ erfüllt ist.

Aufgabe 5. *(3 Punkte)* Sei $d \in \mathbb{N}$, seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offene Mengen und sei $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ genau dann m-integrierbar über V ist, wenn $(f \circ \varphi)|\det D\varphi|$ m-integrierbar über U ist und dass in diesem Fall
$$\int_V f\, dm = \int_U (f \circ \varphi)|\det D\varphi|\, dm.$$

Aufgabe 6. *(3 Punkte)* Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \nu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \nu_2)$ zwei Maßräume und μ_1 bzw. μ_2 σ-endliche Maße auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ bzw. $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ mit ν_i absolut stetig bzgl. μ_i, mit Dichte φ_i (d.h. $\nu_i = \varphi_i \mu_i$), $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass $\nu_1 \otimes \nu_2$ absolut stetig bzgl. $\mu_1 \otimes \mu_2$ ist mit Dichte $\varphi_1 \cdot \varphi_2$.

Zusatzaufgabe* 1. *(4 Punkte)* Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) = 1$ und sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie:

(i) $\varphi \restriction_{]a,b[}$ ist stetig. Insbesondere ist φ Borel-messbar.

(ii) Für eine μ-integrierbare Funktion $f : \Omega \to [a, b]$ ist $\int_\Omega f(\omega) d\mu(\Omega) \in [a, b]$ und es gilt
$$\varphi\left(\int_\Omega f(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega)\right) \leq \int_\Omega \varphi(f(\omega))\mathrm{d}\mu(\omega).$$

Zusatzaufgabe* 2. *(2 Punkte)* Geben Sie ein Beispiel eines Maßraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und einer gleichgradig μ-integrierbaren Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ an, so dass es keine integrierbare Funktion g mit $|f| \leq g$ μ-f.ü. für alle $f \in \mathcal{F}$ gibt.