SS 2015
Dr. B. Gess

Übungsaufgaben zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt
Ihren Namen und den Namen Ihres Tutors an.)

Blatt 7
Abgabe am Freitag, 25.09

Aufgabe 1. *(6 Punkte)*

(i) Seien $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ und sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass M genau dann eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist, wenn es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit $M \cap U = f^{-1}(0)$, so dass $Df(a)$ surjektiv ist, gibt.

(ii) Seien $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ und sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass M genau dann eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist, wenn es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ relativ M gibt, die eine $k-$dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

(a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y, z) = (x^2 + xy - y - z, 2x^2 + 3xy - 2y - 3z)$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(0, 0)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x, y, z, w) = (xz - y^2, yw - z^2, xw - yz)$$

für alle $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ gegeben. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(0, 0, 0) \setminus \{0\}$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 3. *(3 Punkte)* Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ und sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass dann

$$\Big\{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+m} : (x_1, \dots, x_n) \in M\Big\}$$

eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+m}$ ist. Insbesondere ist $S_1 \times \{0\}$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

bitte wenden

Aufgabe 4. *(3 Punkte)* Sei $n, m \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, offen. Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass der Graph $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+m}$ ist.

Aufgabe 5. *(4 Punkte)* Seien $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ und sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Seien zudem $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $M \subset U$ und sei $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass $\Phi(M)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist, und dass insbesondere $M + a := \{m + a \in \mathbb{R}^n \mid m \in M\}$ für jedes $a \in \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 6. *(4 Punkte)* Seien $k, n \in \mathbb{N}$, sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen und sei $\phi : T \to \mathbb{R}^n$ eine injektive Immersion. Zeigen Sie, dass $\phi : T \to \phi(T)$ ein Homöomorphismus ist und dass $\phi(T)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

Zusatzaufgabe* 1. *(4 Punkte)* Finden Sie eine Untermannigfaltigkeit, die eine globale Karte besitzt (d.h. im Satz 14.11 $V = M$ nehmen), aber nicht als Graph $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A \subseteq \mathbb{R}\}$ oder $\{(f(y), y) \in \mathbb{R}^2 : y \in A \subseteq \mathbb{R}\}$ einer Funktion aufgefasst werden kann.