Une approche par les polynômes orthogonaux pour des classes de matrices aléatoires orthogonalement et symplectiquement invariantes : application à l'universalité de la statistique locale des valeurs propres

Alexandre STOJANOVIC

Université Paris 7, Institut de Mathématiques,
Physique-mathématique et géométrie, case 7012,
2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France

janvier 2000

Résumé

Dans ce travail, nous développons une approche par les polynômes orthogonaux pour des matrices aléatoires de loi orthogonalement et symplectiquement invariantes, qui sont une généralisation des matrices aléatoires gaussiennes. Nous obtenons successivement des formules exprimant les probabilités marginales de la distribution des valeurs propres en fonction de noyaux matriciels, puis des formules, généralisant celles connues pour les matrices aléatoires gaussiennes, exprimant ces noyaux matriciels essentiellement en fonction du noyau reproduisant de la théorie des polynômes orthogonaux. Enfin, nous utilisons ces expressions pour prouver l'universalité de la statistique locale des valeurs propres à l'intérieur et au bord du spectre, dans un cas particulier, grâce aux formules asymptotiques des polynômes orthogonaux correspondants récemment trouvées.

1 Introduction générale

Les matrices aléatoires étudiées dans ce travail appartiennent à trois classes définies comme suit. Considérons les espaces vectoriels réels $\mathcal{E}_{n1}$ des matrices symétriques réelles de taille $n \times n$, $\mathcal{E}_{n2}$ des matrices hermitiennes complexes de taille $n \times n$ et $\mathcal{E}_{n4}$ des matrices auto-duales quaternioniques de taille $n \times n$ (voir la section 2.1). Les matrices aléatoires en rapport avec notre étude sont définies sur chacun de ces trois espaces vectoriels réels $\mathcal{E}_{n\beta}$, $\beta = 1{,}2$ ou 4, par la mesure de probabilité

$$P_{n\beta}(\mathrm{d}M) = \frac{1}{Z_{n\beta}} \exp(-n\mathrm{Tr}V(M))\mathrm{d}M, \quad M \in \mathcal{E}_{n\beta}, \tag{1.1}$$

où $Z_{n\beta}$ est la constante de normalisation, $\mathrm{d}M$ la mesure de Lebesgue sur l'espace $\mathcal{E}_{n\beta}$ considéré et V un polynôme réel d'une variable relle de degré pair, noté $d+1 \geq 2$, à coefficient dominant strictement positif. Les matrices aléatoires gaussiennes correspondent au cas où $V(\lambda)$ est proportionnel λ^2. La présence de la trace dans l'expression de la densité de la mesure de probabilité (1.1) montre que la loi est invariante sous l'action par conjugaison du groupe orthogonal, si $\beta = 1$, du groupe unitaire, si $\beta = 2$ et du groupe symplectique unitaire, si $\beta = 4$. Ainsi, les vecteurs propres de la matrice aléatoire M définie par (1.1) sont distribués uniformément et c'est l'étude des valeurs propres qui rend ces classes intéressantes. D'après [9], les valeurs propres sont toutes réelles et selon [10], la densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ des valeurs propres $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ de la matrice aléatoire M définie par (1.1) est donnée par

$$p_\beta^{(n)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \frac{1}{Q_{n\beta}} \prod_{1\leq j<k\leq n} |\lambda_j - \lambda_k|^\beta \prod_{j=1}^{n} \exp(-nV(\lambda_j)), \tag{1.2}$$

où $Q_{n\beta}$ est la nouvelle constante de normalisation. Pour le cas $\beta = 2$, l'utilisation des polynômes orthogonaux pour exprimer les probabilités marginales de (1.2) en fonction du noyau reproduisant est relativement simple (voir [9, 10]). En revanche, les cas $\beta = 1$ ou 4 posent problème. Cependant, pour le cas particulier des matrices aléatoires gaussiennes, F. Dyson et M. Mehta (voir [9, 10] et les références qui s'y trouvent) ont développé la technique du déterminant quaternionique pour exprimer les probabilités marginales associées à (1.2) à l'aide de noyaux matriciels (ou quaternioniques). Les éléments des noyaux matriciels sont exprimés à l'aide des polynômes d'Hermite, qui sont les polynômes orthogonaux intervenant naturellement pour les matrices aléatoires gaussiennes.

Récemment, dans [13], C. Tracy et H. Widom ont obtenu des formules générales pour les noyaux matriciels en utilisant la méthode de la fonctionnelle génératrice (voir [8] et l'appendice A.17 de [10]), mais ils ne se sont pas intéressés à la technique du déterminant quaternionique.

Dans la deuxième partie, nous vérifions précisément que la technique du déterminant quaternionique fonctionne avec les formules données dans [13] pour exprimer les probabilités marginales de (1.2). Il suffit d'adapter le schéma des preuves de [9, 10]. Les résultats sont énoncés à la section 2.2.

Les noyaux matriciels sont donc intéressants lorsqu'ils s'expriment à l'aide de polynômes orthogonaux et notamment en fonction du noyau reproduisant, comme c'est le cas pour les matrices aléatoires à loi unitairement invariantes (cas $\beta = 2$ dans (1.2)) et pour les matrices aléatoires gaussiennes, voir les chapitres 6 et 7 de [10]. Cela permet en effet d'utiliser les formules asymptotiques de la théorie des polynômes orthogonaux pour étudier le comportement spectral asymptotique des matrices aléatoires, lorsque $n \to +\infty$.

Dans la troisième partie, à la section 3.4, nous obtenons des formules pour les noyaux matriciels qui généralisent celles connues pour les matrices aléatoires gaussiennes. Plus précisément, les éléments du noyau matriciel sont composés d'une partie principale, déterminant les régimes asymptotiques, lorsque $n \to +\infty$, s'exprimant simplement en fonction du noyau reproduisant et d'une partie négligeable. Pour obtenir ces formules, l'aspect polynômial de V est très important, car il implique que la matrice infinie de l'opérateur de dérivation dans la base des fonctions orthonormales est multidiagonale avec d diagonales de chaque côté de la diagonale principale. Et la méthode de calcul est entièrement basée sur cette propriété. Notons que H. Widom a obtenu dans [14] des expressions des noyaux matriciels en fonction du noyau reproduisant, pour des classes de matrices aléatoires plus générales.

En application, dans la quatrième partie, à la section 4.6, nous montrons que les formules précédemment obtenues, permettent de prouver l'existence de la densité d'états et le comportement universel de la statistique locale des valeurs propres à l'intérieur et au bord du spectre, pour une certaine famille de polynômes pairs V de degré quatre, en utilisant les formules asymptotiques de [2].

Enfin, pour terminer cette introduction, nous rappelons que les classes de matrices aléatoires étudiées dans ce travail s'appellent des *modèles matriciels à une matrice* en physique thorique (voir par exemple [6] et les références qui s'y trouvent) et que dans cette terminologie, le polynôme V s'appelle le *potentiel* et les densités de probabilités marginales s'appellent les *fonctions de corrélations*.

2 Expressions des probabilités marginales par la technique du déterminant quaternionique

2.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons considérer plus généralement que (1.2) le calcul des probabilités marginales de la mesure de probabilité totalement symétrique sur $\mathbb{R}^n$, (n entier > 0)

$$p_\beta^{(n)}(\mathrm{d}\lambda_1,\ldots,\mathrm{d}\lambda_n) = \frac{1}{Q_{n\beta}} \prod_{1\le j<k\le n} |\lambda_j-\lambda_k|^\beta \prod_{j=1}^n m(\mathrm{d}\lambda_j), \tag{2.1}$$

où $\beta = 1$ ou 4 et m est une mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que (2.1) définisse une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire telle que m possède des moments absolus d'ordre $\le \beta(n-1)$ i.e.

$$\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^k m(\mathrm{d}\lambda) < +\infty, \quad \text{pour} \quad k \in \{0,\ldots,\beta(n-1)\}$$

et que la constante de normalisation (qui est donc finie)

$$Q_{n\beta} = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{1\le j<k\le n} |\lambda_j-\lambda_k|^\beta \prod_{j=1}^n m(\mathrm{d}\lambda_j)$$

soit strictement positive (la constante de normalisation est aussi appelée *fonction de partition* en mécanique statistique). Les probabilités marginales de (2.1) sont définies par

$$p_{k\beta}^{(n)}(\mathrm{d}\lambda_1,\ldots,\mathrm{d}\lambda_k) = \int_{\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}} p_\beta^{(n)}(\mathrm{d}\lambda_1,\ldots,\mathrm{d}\lambda_k,\mathrm{d}\lambda_{k+1},\ldots,\mathrm{d}\lambda_n), \tag{2.2}$$

avec $k \in \{1,\ldots,n\}$. Les résultats de cette partie consistent à exprimer les probabilités marginales à l'aide de déterminants quaternioniques de matrices auto-duales selon la théorie exposée dans [9, 10]. Voici un rappel, directement issu des chapitre 8 de [9] et chapitre 6 de [10], de quelques faits de cette théorie utiles pour ce travail.

Un quaternion q est défini comme une combinaison linéaire à coefficients complexes des quatre matrices complexes de taille 2×2 suivantes

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

où i est un nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$. Donc

$$q = q^{(0)} + q^{(1)}e_1 + q^{(2)}e_2 + q^{(3)}e_3, \quad \text{avec} \quad q^{(j)} \in \mathbb{C}. \tag{2.3}$$

Le quaternion q est un quaternion complexe. Si les $q^{(j)}$ sont réels, le quaternion est réel. Un quaternion peut donc être représenté par une matrice complexe de taille 2×2. $q^{(0)}$ est la partie scalaire et $\sum_{j=1}^3 q^{(j)}e_j$ est la partie quaternionique pure. Le quaternion dual du quaternion (2.3) est défini par

$$\overline{q} = q^{(0)} - \sum_{j=1}^3 q^{(j)}e_j.$$

Nous considérerons des matrices quaternioniques, i.e. des matrices à coefficients quaternioniques. Si une matrice quaternionique de taille $n\times n$ est notée

$$Q_n = (q_{jk})_{1\le j,k\le n},$$

la matrice duale de Q_n est définie par

$$\overline{Q_n} = \left(q'_{jk}\right)_{1\leq j,k\leq n}, \quad \text{avec} \quad q'_{jk} = \overline{q_{kj}}, \quad \text{pour} \quad j,k \in \{1,\ldots,n\}.$$

Une matrice est auto-duale si $\overline{Q_n} = Q_n$. Le déterminant quaternionique de Q_n est défini par

$$\operatorname{Qdet} Q_n = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{\substack{\text{tous les cycles } (j_1 \to j_2 \to \cdots j_r \to j_1) \text{ de} \\ \text{la décomposition en cycles disjoints de } \sigma}} \left(q_{j_1 j_2} q_{j_2 j_3} \cdots q_{j_r j_1}\right)^{(0)},$$

où $\mathcal{S}_n$ est le groupe symétrique d'ordre n et $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ. Une matrice quaternionique Q_n peut être vue comme une matrice complexe de taille $2n \times 2n$. Elle est alors notée $C(Q_n)$. Si Q_n est auto-duale et que ses éléments matriciels sont représentés par

$$q_{jk} = \begin{pmatrix} a_{jk} & b_{jk} \\ c_{jk} & d_{jk} \end{pmatrix},$$

alors, les relations suivantes sont vérifiées

$$a_{jk} = d_{kj}, \quad b_{jk} = -b_{kj} \quad \text{et} \quad c_{jk} = -c_{kj}, \quad \text{pour} \quad j,k \in \{1,\ldots,n\}. \tag{2.4}$$

Pour terminer cette introduction, énonçons les deux résultats que utiliserons par la suite. Posons

$$Z = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

matrice de taille $2n \times 2n$ diagonale par blocs, avec n blocs diagonaux. On a

Proposition 2.1 [9, 10]. — Soit Q_n une matrice quaternionique. Alors Q_n auto-duale si et seulement si $ZC(Q_n)$ est antisymétrique (complexe) et dans ce cas

$$\operatorname{Qdet} Q_n = \operatorname{Pf}(ZC(Q_n)) \quad \text{et} \quad \det C(Q_n) = (\operatorname{Qdet} Q_n)^2, \tag{2.5}$$

où Pf désigne le pfaffien d'une matrice antisymétrique d'ordre pair.

Proposition 2.2 [9, 10]. — Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs quaternioniques complexes et soit m une mesure sur $\mathbb{R}$ telles que (en supposant que toutes les intégrales écrites existent)

$$f(x,y) = \overline{f(y,x)}, \tag{2.6}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,x)\, m(\mathrm{d}x) = c, \tag{2.7}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, f(y,z)\, m(\mathrm{d}y) = f(x,z) + c' f(x,z) - f(x,z)\, c', \tag{2.8}$$

où c est une constante scalaire complexe et c' est une constante quaternionique. Alors, étant donnés des réels $x_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq N$, la matrice

$$\left(f(x_j,x_k)\right)_{1\leq j,k\leq N}$$

est auto-duale et

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{Qdet} \left(f(x_j,x_k)\right)_{1\leq j,k\leq N} m(\mathrm{d}x_N) = (c - N + 1) \operatorname{Qdet} \left(f(x_j,x_k)\right)_{1\leq j,k\leq N-1}. \tag{2.9}$$

2.2 Énoncés des théorèmes 2.1, 2.2 et 2.3

Nous traitons d'abord le cas $\beta = 1$, qui se subdivise, pour des raisons techniques, en deux sous-cas selon que n est pair ou impair, puis le cas $\beta = 4$. Définissons la fonction

$$\varepsilon \, : \, x \mapsto \varepsilon(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ -1/2 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. Posons

$$(\varepsilon \star f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \varepsilon(\lambda - \mu) f(\mu) m(\mathrm{d}\mu).$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}} g(\varepsilon \star f) \mathrm{d}m = - \int_{\mathbb{R}} f(\varepsilon \star g) \mathrm{d}m.$$

De plus, on désigne par f' la fonction dérivée de f.

Théorème 2.1 *(le cas $\beta = 1$, n pair). — Soit $(p_j(\lambda))_{j \in \{0,\ldots,n-1\}}$ une famille de polynômes réels, linéairement indépendants et de degrés $\leq n - 1$. Définissons*

$$a_{jk} = \int_{\mathbb{R}} (\varepsilon \star p_j)(\lambda) p_k(\lambda) m(\mathrm{d}\lambda), \quad \textit{pour} \quad j,k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Alors $A = (a_{jk})_{0 \leq j,k \leq n-1}$ est une matrice antisymétrique réelle inversible. Soit $B = (b_{jk})_{0 \leq j,k \leq n-1}$ son inverse. Posons, d'après [13],

$$\begin{aligned} S(\lambda,\mu) &= \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} p_j(\lambda)(\varepsilon \star p_k)(\mu), \\ D(\lambda,\mu) &= -\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} p_j(\lambda) p_k(\mu), \\ I(\lambda,\mu) &= \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} (\varepsilon \star p_j)(\lambda)(\varepsilon \star p_k)(\mu). \end{aligned} \tag{2.10}$$

De plus, on définit S^T et J par $S^T(\lambda,\mu) = S(\mu,\lambda)$ et $J(\lambda,\mu) = I(\lambda,\mu) - \varepsilon(\lambda - \mu)$. Enfin, définissons le noyau matriciel (ou fonction quaternionique)

$$\sigma_1 \,(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} S(\lambda,\mu) & D(\lambda,\mu) \\ J(\lambda,\mu) & S^T(\lambda,\mu) \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Alors, les probabilités marginales (2.2) sont données par

$$p_{k1}^{(n)}(\mathrm{d}\lambda_1, \ldots, \mathrm{d}\lambda_k) = \frac{(n-k)!}{n!} \operatorname{Qdet} \left(\sigma_1 \,(\lambda_p,\lambda_q)\right)_{1 \leq p,q \leq k} \prod_{p=1}^{k} m(\mathrm{d}\lambda_p) \tag{2.12}$$

et en particulier, pour $k = n$,

$$p_1^{(n)}(\mathrm{d}\lambda_1, \ldots, \mathrm{d}\lambda_n) = \frac{1}{n!} \operatorname{Qdet} \left(\sigma_1 \,(\lambda_p,\lambda_q)\right)_{1 \leq p,q \leq n} \prod_{p=1}^{n} m(\mathrm{d}\lambda_p).$$

Théorème 2.2 *(le cas $\beta = 1$, n impair). — Avec les notations ci-dessus, définissons*

$$a_{jk} = \int_{\mathbb{R}} (\varepsilon \star p_j)(\lambda) p_k(\lambda) m(\mathrm{d}\lambda) \quad si \quad j,k \in \{0, \ldots, n-1\},$$

$$a_{nj} = -a_{jn} = \int_{\mathbb{R}} p_j(\lambda) m(\mathrm{d}\lambda) \quad si \quad j \in \{0, \ldots, n-1\} \quad et \quad a_{nn} = 0.$$

Alors $A = (a_{jk})_{0 \le j,k \le n}$ est une matrice antisymétrique réelle inversible. Soit $B = (b_{jk})_{0 \le j,k \le n}$ son inverse. Posons

$$\begin{aligned}
S(\lambda,\mu) &= S^T(\mu,\lambda) = \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} p_j(\lambda)(\varepsilon \star p_k)(\mu) + \sum_{j=0}^{n-1} b_{jn} p_j(\lambda), \\
D(\lambda,\mu) &= -\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} p_j(\lambda) p_k(\mu), \\
I(\lambda,\mu) &= \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} (\varepsilon \star p_j)(\lambda)(\varepsilon \star p_k)(\mu) + \sum_{j=0}^{n-1} b_{jn}((\varepsilon \star p_j)(\lambda) - (\varepsilon \star p_j)(\mu))
\end{aligned} \tag{2.13}$$

et $J(\lambda,\mu) = I(\lambda,\mu) - \varepsilon(\lambda - \mu)$. De plus, définissons le noyau matriciel

$$\sigma_1(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} S(\lambda,\mu) & D(\lambda,\mu) \\ J(\lambda,\mu) & S^T(\lambda,\mu) \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Alors les probabilités marginales (2.2) sont données par

$$p_{k1}^{(n)}(\mathrm{d}\lambda_1, \ldots, \mathrm{d}\lambda_k) = \frac{(n-k)!}{n!} \operatorname{Qdet}(\sigma_1(\lambda_p,\lambda_q))_{1 \le p,q \le k} \prod_{p=1}^{k} m(\mathrm{d}\lambda_p) \tag{2.15}$$

et en particulier, pour $k = n$,

$$p_1^{(n)}(\mathrm{d}\lambda_1, \ldots, \mathrm{d}\lambda_n) = \frac{1}{n!} \operatorname{Qdet}(\sigma_1(\lambda_p,\lambda_q))_{1 \le p,q \le n} \prod_{p=1}^{n} m(\mathrm{d}\lambda_p).$$

Théorème 2.3 *(le cas $\beta = 4$). — Soit $(p_j(\lambda))_{j \in \{0,\ldots,2n-1\}}$ une famille de polynômes réels, linéairement indépendants et de degrés $\le 2n-1$.Définissons*

$$a_{jk} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (p_j(\lambda) p_k'(\lambda) - p_j'(\lambda) p_k(\lambda)) m(\mathrm{d}\lambda), \quad pour \quad j,k \in \{0, \ldots, 2n-1\}.$$

Alors $A = (a_{jk})_{0 \le j,k \le 2n-1}$ est une matrice antisymétrique réelle inversible. Soit $B = (b_{jk})_{0 \le j,k \le 2n-1}$ son inverse. Posons, d'après [13],

$$\begin{aligned}
S(\lambda,\mu) &= S^T(\mu,\lambda) = \sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{jk} p_j'(\lambda) p_k(\mu), \\
D(\lambda,\mu) &= -\sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{jk} p_j'(\lambda) p_k'(\mu), \\
I(\lambda,\mu) &= \sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{jk} p_j(\lambda) p_k(\mu).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Définissons le noyau matriciel

$$\sigma_4(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} S(\lambda,\mu) & D(\lambda,\mu) \\ I(\lambda,\mu) & S^T(\lambda,\mu) \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Alors les probabilités marginales (2.2) sont données par

$$p_{k4}^{(n)}(\mathrm{d}\lambda_1,\ldots,\mathrm{d}\lambda_k) = \frac{(n-k)!}{n!}\,\mathrm{Qdet}\,(\sigma_4\,(\lambda_p,\lambda_q))_{1\le p,q\le k}\prod_{p=1}^{k} m(\mathrm{d}\lambda_p) \tag{2.18}$$

et en particulier, pour $k=n$,

$$p_4^{(n)}(\mathrm{d}\lambda_1,\ldots,\mathrm{d}\lambda_n) = \frac{1}{n!}\,\mathrm{Qdet}\,(\sigma_4\,(\lambda_p,\lambda_q))_{1\le p,q\le n}\prod_{p=1}^{n} m(\mathrm{d}\lambda_p).$$

2.3 Preuves des théorèmes 2.1, 2.2 et 2.3

Remarquons d'abord que, d'une manière générale, toutes les intégrales écrites existent d'après les hypothèses faites à la section 2.1 sur la mesure m. De plus, si on note T la matrice formée des coefficients des $(p_j(\lambda))_{0\le j\le N_\beta}$ (avec $N_1 = n-1$ et $N_4 = 2n-1$) dans la base des monômes, cette matrice est carrée de déterminant non nul car les $(p_j(\lambda))_{0\le j\le N_\beta}$ sont linéairement indépendants et de degré $\le N_\beta$. De plus, les résultats du chapitre 8 de [9] et de [13] montrent que

$$\mathrm{Pf} A = Q_{n\beta}\,\det T \neq 0,$$

donc $\det A \neq 0$ et A est inversible. Ainsi, d'après les propositions 2.1 et 2.2, il suffit de prouver que la matrice quaternionique $Q_n = (\sigma_\beta\,(\lambda_j,\lambda_k))_{1\le j,k\le n}$ est auto-duale (2.6), puis, avec (2.5), que son déterminant quaternionique $\mathrm{Qdet}\,Q_n$ est proportionnel (à une constante multiplicative non nulle près) à $\prod_{1\le j<k\le n}|\lambda_j-\lambda_k|^\beta$ et enfin que la matrice Q_n satisfait aux deux dernières hypothèses (2.7) et (2.8) de la proposition 2.2. Enfin, une application itérée de (2.9) donnera (2.12), (2.15) et (2.18).

Le caractère auto-duale de la matrice quaternionique Q_n, qui équivaut à (2.4), correspond aux propriétés suivantes, immédiates, d'après l'antisymétrie de B : $D(\lambda,\mu) = -D(\mu,\lambda)$, $I(\lambda,\mu) = -I(\mu,\lambda)$, $J(\lambda,\mu) = -J(\mu,\lambda)$ et par définition $S^T(\lambda,\mu) = S(\mu,\lambda)$.

Preuve du théorème 2.1 (le cas $\beta = 1$, n pair). —

Premièrement : Considérons Q_n comme une matrice complexe de taille $2n\times 2n$, notée $C(Q_n)$ et montrons que $\det C(Q_n)$ est proportionnel au carré de $\prod_{1\le j<k\le n}|\lambda_j-\lambda_k|$, pour $\lambda_1<\cdots<\lambda_n$. Remarquons d'abord que d'après (2.10), on a

$$\det\,(D(\lambda_j,\lambda_k))_{1\le j,k\le n} = \det B\left(\det\,(p_j(\lambda_k))_{0\le j\le n-1,1\le k\le n}\right)^2 = c\prod_{1\le j<k\le n}|\lambda_j-\lambda_k|^2,$$

où $c = \det B\times(\det T)^2 \neq 0$. De plus, d'après (2.10) et (2.11), il vient

$$\begin{aligned} C(Q_n) &= \begin{pmatrix} S(\lambda_j,\lambda_k) & D(\lambda_j,\lambda_k)\\ I(\lambda_j,\lambda_k) & S^T(\lambda_j,\lambda_k)\end{pmatrix}_{1\le j,k\le n}\\ &= \begin{pmatrix} p_j(\lambda_k)\\ (\varepsilon\star p_j)(\lambda_k)\end{pmatrix}_{0\le j\le n-1,1\le k\le n} B\begin{pmatrix} (\varepsilon\star p_j)(\lambda_k) & -p_j(\lambda_k)\end{pmatrix}_{0\le j\le n-1,1\le k\le n}.\end{aligned}$$

Ainsi, $C(Q_n)$ est une matrice de rang $\le n$ et comme $\det\,(D(\lambda_j,\lambda_k))_{1\le j,k\le n}$ est un mineur non nul d'ordre n, les n lignes indexées par $j\in\{1,\ldots,n\}$, $\begin{pmatrix} I(\lambda_j,\lambda_k) & S^T(\lambda_j,\lambda_k)\end{pmatrix}_{1\le k\le n}$ sont combinaisons linéaires des n lignes $\begin{pmatrix} S(\lambda_j,\lambda_k) & D(\lambda_j,\lambda_k)\end{pmatrix}_{1\le k\le n}$. Donc

$$\begin{aligned}\det C(Q_n) &= \det\begin{pmatrix} S(\lambda_j,\lambda_k) & D(\lambda_j,\lambda_k)\\ -\varepsilon(\lambda_j-\lambda_k) & 0\end{pmatrix}_{1\le j,k\le n}\\ &= \det\,(-\varepsilon(\lambda_j-\lambda_k))_{1\le j,k\le n}\times\det\,(D(\lambda_j,\lambda_k))_{1\le j,k\le n}.\end{aligned}$$

Or, comme $\det\left(-\varepsilon(\lambda_j-\lambda_k)\right)_{1\le j,k\le n}=1/2^n$ indépendamment des λ_j, $j\in\{1,\ldots,n\}$, (voir le chapitre 6 de [10]), cela montre que $\det C(Q_n)$ est proportionnel à $\prod_{1\le j<k\le n}|\lambda_j-\lambda_k|^2$. Enfin, comme $\mathrm{Qdet}Q_n$ est une fonction continue totalement symétrique sur $\mathbb{R}^n$, on déduit de la continuité que $\mathrm{Qdet}Q_n = c_n\prod_{1\le j<k\le n}|\lambda_j-\lambda_k|\neq 0$, où c_n est une constante indépendante des λ_j, $j\in\{1,\ldots,n\}$ pour $\lambda_1<\cdots<\lambda_n$ et l'égalité est valable partout par symétrie.

<u>Deuxièmement :</u> Vérifions les deux dernières hypothèses (2.7) et (2.8) de la proposition 2.2. On a

$$\int \sigma_1(\lambda,\lambda)\,m(\mathrm{d}\lambda)=\int\begin{pmatrix} S(\lambda,\lambda) & 0\\ 0 & S(\lambda,\lambda)\end{pmatrix}m(\mathrm{d}\lambda),$$

car D et I sont des fonctions antisymétriques. Donc l'intégrale (2.7) est bien un scalaire de valeur

$$\begin{aligned}\int S(\lambda,\lambda)\,m(\mathrm{d}\lambda) &= \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}\int p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_k)(\lambda)m(\mathrm{d}\lambda)\\ &= \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}a_{kj}=\mathrm{Tr}BA=n.\end{aligned}$$

Prouvons que (2.8) est satisfaite, c'est-à-dire que

$$\int\sigma_1(\lambda,\mu)\,\sigma_1(\mu,\nu)\,m(\mathrm{d}\mu)=\sigma_1(\lambda,\nu)+g(\lambda,\nu)$$

avec

$$g(\lambda,\nu)=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}\sigma_1(\lambda,\nu)-\sigma_1(\lambda,\nu)\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}.$$

Ceci équivaut aux trois relations (la quatrième est automatiquement vérifiée par symétrie)

$$\int(S(\lambda,\mu)\,S(\mu,\nu)+D(\lambda,\mu)J(\mu,\nu))m(\mathrm{d}\mu) = S(\lambda,\nu)\,, \tag{2.19}$$

$$\int(S(\lambda,\mu)\,D(\mu,\nu)+D(\lambda,\mu)S(\nu,\mu))m(\mathrm{d}\mu) = 2D(\lambda,\nu)\,, \tag{2.20}$$

$$\int(J(\lambda,\mu)S(\mu,\nu)+S(\mu,\lambda)\,J(\mu,\nu))m(\mathrm{d}\mu) = 0. \tag{2.21}$$

Vérifions que la relation (2.19) est satisfaite

$$\begin{aligned}&\int(\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_k)(\mu)\sum_{\ell,m=0}^{n-1} b_{\ell m}p_\ell(\mu)(\varepsilon\star p_m)(\nu))m(\mathrm{d}\mu)\\ &-\int(\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}p_j(\lambda)p_k(\mu)\sum_{\ell,m=0}^{n-1} b_{\ell m}(\varepsilon\star p_\ell)(\mu)(\varepsilon\star p_m)(\nu))m(\mathrm{d}\mu)\\ &+\int(\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}p_j(\lambda)p_k(\mu)\varepsilon(\mu-\nu))m(\mathrm{d}\mu)\\ =\;& \sum_{j,m=0}^{n-1} p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_m)(\nu)\sum_{k,\ell=0}^{n-1} b_{jk}(a_{k\ell}-a_{\ell k})b_{\ell m}-\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_k)(\nu)\\ =\;& 2S(\lambda,\nu)-S(\lambda,\nu)=S(\lambda,\nu)\,.\end{aligned}$$

Vérifions la relation (2.20)

$$\begin{aligned}
&-\int(\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_k)(\mu)\sum_{\ell,m=0}^{n-1} b_{\ell m}p_\ell(\mu)p_m(\nu))m(\mathrm{d}\mu)\\
&-\int(\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}p_j(\lambda)p_k(\mu)\sum_{\ell,m=0}^{n-1} b_{m\ell}p_m(\nu)(\varepsilon\star p_\ell)(\mu))m(\mathrm{d}\mu)\\
=\;& -\sum_{j,m=0}^{n-1} p_j(\lambda)p_m(\nu)\sum_{k,\ell=0}^{n-1}(b_{jk}a_{k\ell}b_{\ell m}+b_{jk}a_{\ell k}b_{m\ell})\\
=\;& -2\sum_{j,m=0}^{n-1} b_{jm}p_j(\lambda)p_m(\nu)=2D\,(\lambda,\nu)\,.
\end{aligned}$$

Vérifions la relation (2.21)

$$\begin{aligned}
&\int(\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}(\varepsilon\star p_j)(\lambda)(\varepsilon\star p_k)(\mu)\sum_{\ell,m=0}^{n-1} b_{\ell m}p_\ell(\mu)(\varepsilon\star p_m)(\nu))m(\mathrm{d}\mu)\\
&-\int(\sum_{\ell,m=0}^{n-1} b_{\ell m}p_\ell(\mu)(\varepsilon\star p_m)(\nu)\varepsilon(\lambda-\mu))m(\mathrm{d}\mu)\\
&+\int(\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{kj}p_k(\mu)(\varepsilon\star p_j)(\lambda)\sum_{\ell,m=0}^{n-1} b_{\ell m}(\varepsilon\star p_\ell)(\mu)(\varepsilon\star p_m)(\nu))m(\mathrm{d}\mu)\\
&-\int(\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{kj}p_k(\mu)(\varepsilon\star p_j)(\lambda)\varepsilon(\mu-\nu))m(\mathrm{d}\mu)\\
=\;& \sum_{j,m=0}^{n-1}(\varepsilon\star p_j)(\lambda)(\varepsilon\star p_m)(\nu)\sum_{k,\ell=0}^{n-1}(b_{jk}a_{k\ell}b_{\ell m}+b_{kj}a_{\ell k}b_{\ell m})\\
&-\int(\sum_{\ell,m=0}^{n-1} b_{\ell m}(\varepsilon\star p_\ell)(\lambda)(\varepsilon\star p_m)(\nu))m(\mathrm{d}\mu)\\
&+\int(\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{kj}(\varepsilon\star p_k)(\nu)(\varepsilon\star p_j)(\lambda))m(\mathrm{d}\mu)\\
=\;& 2I\,(\lambda,\nu)-I\,(\lambda,\nu)+I\,(\nu,\lambda)=0.
\end{aligned}$$

D'où, $\sigma_1(\lambda,\mu)$ vérifie les conditions de la proposition 2.2, avec $c=n$ et $c'=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$.

Preuve du théorème 2.2 (le cas $\beta=1$, n impair). —

Premièrement : Comme précédemment, considérons Q_n comme une matrice complexe de taille $2n\times 2n$, notée $C(Q_n)$ et prouvons que det $C(Q_n)$ est proportionnel au carré de $\prod_{1\leq j<k\leq n}|\lambda_j-\lambda_k|$. Mais ici, comme B est d'ordre $n{+}1$ et que l'expression (2.13) de $D(\lambda,\mu)$ fait intervenir les éléments d'une matrice antisymétrique d'ordre impair (donc de déterminant nul), on ne peut pas procéder directement pour obtenir le résultat voulu. On procède différemment en adaptant la technique proposée au chapitre 8

de [9] et au chapitre 6 de [10]. Posons

$$\begin{aligned}
s(\lambda,\mu) &= \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_k)(\lambda) = s^T(\mu,\lambda),\\
i(\lambda,\mu) &= \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} (\varepsilon\star p_j)(\lambda)(\varepsilon\star p_k)(\lambda), \qquad (2.22)\\
\alpha(\lambda) &= \sum_{j=0}^{n-1} b_{jn} p_j(\lambda)
\end{aligned}$$

et on a $S(\lambda,\mu) = s(\lambda,\mu) + \alpha(\lambda)$.

La matrice $(b_{jk})_{0\leq j,k\leq n-1}$ est antisymétrique d'ordre impair, donc de déterminant nul. Plus précisément, cette matrice est de rang $n-1$. En effet, comme $\det B \neq 0$, l'un des mineurs d'ordre n de B par rapport à sa dernière colonne est non nul et ce ne peut être celui par rapport à b_{nn} car $\det(b_{jk})_{0\leq j,k\leq n-1} = 0$. On peut donc en déduire que ce mineur possède lui-même un mineur d'ordre $n-1$ non nul par rapport à sa dernière ligne qui est issue de le dernière ligne de B. Donc ce mineur non nul d'ordre $n-1$ est aussi un mineur de la matrice $(b_{jk})_{0\leq j,k\leq n-1}$, d'où le résultat. On sait alors qu'il existe une matrice orthogonale réelle U de taille $n\times n$, telle que

$$(b_{jk})_{0\leq j,k\leq n-1} = U \begin{pmatrix} Z & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} {}^tU, \qquad (2.23)$$

avec

$$Z = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$ diagonale par blocs, avec $(n-1)/2$ blocs diagonaux. Posons

$$\begin{pmatrix} p_j(\lambda_k)\\ (\varepsilon\star p_j)(\lambda_k)\end{pmatrix}_{0\leq j\leq n-1, 1\leq k\leq n} U = \begin{pmatrix} r_j(\lambda_k)\\ s_j(\lambda_k)\end{pmatrix}_{0\leq j\leq n-1, 1\leq k\leq n}.$$

Alors, avec (2.22) et (2.23), on a

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} s(\lambda_j,\lambda_k) & D(\lambda_j,\lambda_k)\\ i(\lambda_j,\lambda_k) & s^T(\lambda_j,\lambda_k)\end{pmatrix}_{1\leq j,k\leq n}\\
=\ &\begin{pmatrix} r_j(\lambda_k)\\ s_j(\lambda_k)\end{pmatrix}_{0\leq j\leq n-1, 1\leq k\leq n} \begin{pmatrix} Z & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_j(\lambda_k) & -r_j(\lambda_k)\end{pmatrix}_{0\leq j\leq n-1, 1\leq k\leq n}. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Ce qui donne, compte tenu des dernières ligne et colonne de zéros de la matrice $\begin{pmatrix} Z & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
s(\lambda_j,\lambda_k) &= \sum_{p,q=0}^{n-2} Z_{pq} r_p(\lambda_j) s_q(\lambda_k),\\
i(\lambda_j,\lambda_k) &= \sum_{p,q=0}^{n-2} Z_{pq} s_p(\lambda_j) s_q(\lambda_k), \qquad (2.25)\\
D(\lambda_j,\lambda_k) &= \sum_{p,q=0}^{n-2} Z_{pq} r_p(\lambda_j) r_q(\lambda_k).
\end{aligned}$$

Soit $\delta > 0$, considèrons la matrice

$$
\begin{aligned}
C_\delta &= \begin{pmatrix} r_0(\lambda_1) & r_1(\lambda_1) & \cdots & r_{n-2}(\lambda_1) & \alpha(\lambda_1) \\ s_0(\lambda_1) & s_1(\lambda_1) & \cdots & s_{n-2}(\lambda_1) & 1/\delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_0(\lambda_n) & r_1(\lambda_n) & \cdots & r_{n-2}(\lambda_n) & \alpha(\lambda_n) \\ s_0(\lambda_n) & s_1(\lambda_n) & \cdots & s_{n-2}(\lambda_n) & 1/\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} s_0(\lambda_1) & -r_0(\lambda_1) & \cdots & s_0(\lambda_n) & -r_0(\lambda_n) \\ s_1(\lambda_1) & -r_1(\lambda_1) & \cdots & s_1(\lambda_n) & -r_1(\lambda_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{n-2}(\lambda_1) & -r_{n-2}(\lambda_1) & \cdots & s_{n-2}(\lambda_n) & -r_{n-2}(\lambda_n) \\ 1/\delta & \alpha(\lambda_1) & \cdots & 1/\delta & \alpha(\lambda_n) \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

alors (2.24) et (2.25) donnent

$$
C_\delta = \begin{pmatrix} s(\lambda_j,\lambda_k) + \alpha(\lambda_j) & D(\lambda_j,\lambda_k) + \delta\alpha(\lambda_j)\alpha(\lambda_k) \\ i(\lambda_j,\lambda_k) + 1/\delta & s^T(\lambda_j,\lambda_k) + \alpha(\lambda_k) \end{pmatrix}_{1\le j,k\le n}. \tag{2.26}
$$

La matrice C_δ est de rang $\le n$ et le calcul suivant montre qu'elle est de rang n. En effet

$$
\begin{aligned}
& \det\left(D(\lambda_j,\lambda_k) + \delta\alpha(\lambda_j)\alpha(\lambda_k)\right)_{1\le j,k\le n} \\
= \;& \det\Big((p_j(\lambda_k))_{1\le j,k\le n} \left(b_{jk} + \delta b_{jn} b_{kn}\right)_{0\le j,k\le n-1} (p_k(\lambda_j))_{1\le j,k\le n} \Big) \\
= \;& c \prod_{1\le j<k\le n} |\lambda_j - \lambda_k|^2 \det\left(b_{jk} + \delta b_{jn} b_{kn}\right)_{0\le j,k\le n-1}, \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

où $c = (\det T)^2$ est une constante non nulle. Or, si on note $\begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_k & \cdots & c_n \end{pmatrix}$ les n colonnes de la matrice $(b_{jk})_{0\le j,k\le n-1}$ et d le vecteur colonne $\begin{pmatrix} b_{0n} \\ \vdots \\ b_{jn} \\ \vdots \\ b_{n-1,n} \end{pmatrix}$, un développement par multilinéarité donne (car $\det(b_{jk})_{0\le j,k\le n-1} = 0$ et les cas où d est répétée ne contribuant pas)

$$
\det\left(b_{jk} + \delta b_{jn} b_{kn}\right)_{0\le j,k\le n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \delta b_{kn} \det\begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_{k-1} & d & c_{k+1} & \cdots & c_n \end{pmatrix}.
$$

Ainsi, il vient

$$
\begin{aligned}
\det\left(b_{jk} + \delta b_{jn} b_{kn}\right)_{0\le j,k\le n-1} &= \delta \sum_{k=0}^{n-1} b_{nk} \det\begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_{k-1} & c_{k+1} & \cdots & c_n & d \end{pmatrix} \times (-1)^{n+1+k} \\
&= \delta \det B. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Car, c'est le développement par rapport à la dernière ligne de $\det B \neq 0$. On en déduit que les n lignes indexées par $j \in \{1,\ldots,n\}$, $\begin{pmatrix} i(\lambda_j,\lambda_k) + 1/\delta & S^T(\lambda_j,\lambda_k) \end{pmatrix}_{1\le k\le n}$ de C_δ sont combinaisons linéaires des n lignes $\begin{pmatrix} S(\lambda_j,\lambda_k) & D(\lambda_j,\lambda_k) + \delta\alpha(\lambda_j)\alpha(\lambda_k) \end{pmatrix}_{1\le k\le n}$. Considérons maintenant

$$
C(Q_n(\delta)) = \begin{pmatrix} S(\lambda_j,\lambda_k) & D(\lambda_j,\lambda_k) + \delta\alpha(\lambda_j)\alpha(\lambda_k) \\ J(\lambda_j,\lambda_k) & S^T(\lambda_j,\lambda_k) \end{pmatrix}_{1\le j,k\le n}.
$$

D'après (2.26) et le travail effectué sur C_δ, il vient

$$\begin{aligned}
& \det C(Q_n(\delta)) \\
= \ & \det \begin{pmatrix} S(\lambda_j,\lambda_k) & D(\lambda_j,\lambda_k) + \delta\alpha(\lambda_j)\alpha(\lambda_k) \\ -1/\delta - \varepsilon(\lambda_j - \lambda_k) + (\varepsilon \star \alpha)(\lambda_j) - (\varepsilon \star \alpha)(\lambda_k) & 0 \end{pmatrix}_{1\leq j,k\leq n} \\
= \ & \Delta(\delta) \times \det \left(D(\lambda_j,\lambda_k) + \delta\alpha(\lambda_j)\alpha(\lambda_k)\right)_{1\leq j,k\leq n}, \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

avec

$$\Delta(\delta) = \det\left(-1/\delta - \varepsilon(\lambda_j - \lambda_k) + (\varepsilon \star \alpha)(\lambda_j) - (\varepsilon \star \alpha)(\lambda_k)\right)_{1\leq j,k\leq n}.$$

Or, le calcul d'un déterminant de la forme de $\Delta(\delta)$ est effectué à l'appendice A.19 de [10] et il donne $\Delta(\delta) = \pm 1/\delta$, indépendamment des λ_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$. D'où, d'après (2.27), (2.28) et (2.29), il vient $\det C(Q_n(\delta)) = c' \prod_{1\leq j<k\leq n} |\lambda_j - \lambda_k|^2$, où la constante c' est indépendante de δ. Comme le déterminant est continu et que $\lim_{\delta\to 0} C(Q_n(\delta)) = C(Q_n)$, on obtient le résultat.

<u>Deuxièmement :</u> Vérifions les deux dernières hypothèses (2.7) et (2.8) de la proposition 2.2. On a

$$\int \sigma_1(\lambda,\lambda)\, m(\mathrm{d}\lambda) = \int \begin{pmatrix} S(\lambda,\lambda) & 0 \\ 0 & S(\lambda,\lambda) \end{pmatrix} m(\mathrm{d}\lambda),$$

car D et I sont des fonctions antisymétriques. Donc l'intégrale (2.7) est bien un scalaire de valeur

$$\begin{aligned}
\int S(\lambda,\lambda)\, m(\mathrm{d}\lambda) &= \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} \int p_j(\lambda)(\varepsilon \star p_k)(\lambda) m(\mathrm{d}\lambda) + \sum_{j=0}^{n-1} b_{jn} \int p_j(\lambda) m(\mathrm{d}\lambda) \\
&= \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} a_{kj} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{jn} a_{nj} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n} b_{jk} a_{kj} = n.
\end{aligned}$$

Il reste à prouver que les trois mêmes relations que dans le cas n pair sont vérifiées.

Vérifions la relation (2.19)

$$
\begin{aligned}
&\int (\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_k)(\mu)+\sum_{j=0}^{n-1} b_{jn}p_j(\lambda))(\sum_{\ell,m=0}^{n-1} b_{\ell m}p_\ell(\mu)(\varepsilon\star p_m)(\nu)+\sum_{\ell=0}^{n-1} b_{\ell n}p_\ell(\mu))m(\mathrm{d}\mu)\\
&-\int (\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}p_j(\lambda)p_k(\mu))\\
&\times(\sum_{\ell,m=0}^{n-1} b_{\ell m}(\varepsilon\star p_\ell)(\mu)(\varepsilon\star p_m)(\nu)-\varepsilon(\mu-\nu)+\sum_{\ell=0}^{n-1} b_{\ell n}((\varepsilon\star p_\ell)(\mu)-(\varepsilon\star p_\ell)(\nu)))m(\mathrm{d}\mu)\\
= \;&\sum_{j,m=0}^{n-1} p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_m)(\nu)(\sum_{k,\ell=0}^{n-1} b_{jk}a_{k\ell}b_{\ell m}+\sum_{\ell=0}^{n-1} b_{jn}a_{n\ell}b_{\ell m})\\
&-\sum_{j,m=0}^{n-1} p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_m)(\nu)(\sum_{k,\ell=0}^{n-1} b_{jk}a_{\ell k}b_{\ell m})+\sum_{j=0}^{n-1} p_j(\lambda)(\sum_{k,\ell=0}^{n-1} b_{jk}a_{k\ell}b_{\ell n}+\sum_{\ell=0}^{n-1} b_{jn}a_{n\ell}b_{\ell n})\\
&-\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_k)(\nu)-\sum_{j,k,\ell=0}^{n-1} b_{jk}b_{\ell n}(a_{\ell k}p_j(\lambda)-a_{nk}p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_\ell)(\nu))\\
= \;&\sum_{j,m=0}^{n-1} p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_m)(\nu)(2\sum_{k,\ell=0}^{n-1} b_{jk}a_{\ell k}b_{\ell m}+\sum_{\ell=0}^{n-1} b_{jn}a_{n\ell}b_{\ell m}+\sum_{k=0}^{n-1} b_{jk}a_{nk}b_{mn})\\
&-\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_k)(\nu)+\sum_{j=0}^{n-1} p_j(\lambda)(\sum_{k,\ell=0}^{n-1} b_{jk}a_{k\ell}b_{\ell n}+\sum_{\ell=0}^{n-1} b_{jn}a_{n\ell}b_{\ell n}-\sum_{j,k,\ell=0}^{n-1} b_{jk}a_{\ell k}b_{\ell n})\\
= \;&\sum_{j,m=0}^{n-1} p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_m)(\nu)(\sum_{\ell=0}^{n-1}\delta_{j\ell}b_{\ell m}+\sum_{k=0}^{n-1} b_{jk}\delta_{km})-\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_k)(\nu)\\
&+\sum_{j=0}^{n-1} p_j(\lambda)(2\sum_{k=0}^{n-1} b_{jk}\delta_{kn}+b_{jn})\\
= \;&S\,(\lambda,\nu)\,.
\end{aligned}
$$

Vérifions la relation (2.20)

$$
\begin{aligned}
&\int (\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}p_j(\lambda)(\varepsilon\star p_k)(\mu)+\sum_{j=0}^{n-1} b_{jn}p_j(\lambda))(-\sum_{\ell,m=0}^{n-1} b_{\ell m}p_\ell(\mu)p_m(\nu))m(\mathrm{d}\mu)\\
&-\int (\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}p_j(\lambda)p_k(\mu))(\sum_{\ell,m=0}^{n-1} b_{m\ell}p_m(\nu)(\varepsilon\star p_\ell)(\mu)+\sum_{m=0}^{n-1} b_{mn}p_m(\nu))m(\mathrm{d}\mu)\\
= \;&\sum_{j,m=0}^{n-1} p_j(\lambda)p_m(\nu)(\sum_{k,\ell=0}^{n-1} b_{jk}a_{k\ell}b_{\ell m}-\sum_{\ell=0}^{n-1} b_{jn}a_{n\ell}b_{\ell m}-\sum_{k,\ell=0}^{n-1} b_{jk}a_{\ell k}b_{m\ell}-\sum_{k=0}^{n-1} b_{jk}a_{nk}b_{mn})\\
= \;&-\sum_{j,m=0}^{n-1} b_{jm}p_j(\lambda)p_m(\nu)(\sum_{\ell=0}^{n-1}\delta_{j\ell}b_{\ell m}+\sum_{k=0}^{n-1} b_{jk}\delta_{km})=2D\,(\lambda,\nu)\,.
\end{aligned}
$$

Vérifions la relation (2.21)

$$
\begin{aligned}
&\int (\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}(\varepsilon\star p_j)(\lambda)(\varepsilon\star p_k)(\mu)+\sum_{j=0}^{n-1} b_{jn}((\varepsilon\star p_j)(\lambda)-(\varepsilon\star p_j)(\mu)-\varepsilon(\lambda-\mu)))\\
&\times(\sum_{\ell,m=0}^{n-1} b_{\ell m}p_\ell(\mu)(\varepsilon\star p_m)(\nu)+\sum_{\ell=0}^{n-1} b_{\ell n}p_\ell(\mu))m(\mathrm{d}\mu)\\
&+\int (\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{kj}p_k(\mu)(\varepsilon\star p_j)(\lambda)+\sum_{k=0}^{n-1} b_{kn}p_k(\mu))\\
&\times(\sum_{\ell,m=0}^{n-1} b_{\ell m}(\varepsilon\star p_\ell)(\mu)(\varepsilon\star p_m)(\nu)+\sum_{\ell=0}^{n-1} b_{\ell n}((\varepsilon\star p_\ell)(\mu)-(\varepsilon\star p_\ell)(\nu)-\varepsilon(\mu-\nu)))m(\mathrm{d}\mu)\\
=\;&\sum_{j,m=0}^{n-1}(\varepsilon\star p_j)(\lambda)(\varepsilon\star p_m)(\nu)\\
&\times(\sum_{k,\ell=0}^{n-1} b_{jk}a_{k\ell}b_{\ell m}+\sum_{k,\ell=0}^{n-1} b_{kj}a_{\ell k}b_{\ell m}+\sum_{\ell=0}^{n-1} b_{jn}a_{n\ell}b_{\ell m}-\sum_{k=0}^{n-1} b_{kj}a_{nk}b_{mn}-b_{jm}+b_{mj})\\
&+\sum_{m=0}^{n-1}(\varepsilon\star p_m)(\nu)(-\sum_{j,\ell=0}^{n-1} b_{jn}a_{j\ell}b_{\ell m}+\sum_{k,\ell=0}^{n-1} b_{kn}a_{\ell k}b_{\ell m}-\sum_{k=0}^{n-1} b_{mn}a_{nk}b_{kn}+b_{mn})\\
&\sum_{j=0}^{n-1}(\varepsilon\star p_j)(\lambda)(\sum_{k,\ell=0}^{n-1} b_{jk}a_{k\ell}b_{\ell n}+\sum_{\ell=0}^{n-1} b_{jn}a_{n\ell}b_{\ell n}-b_{jn}+\sum_{k,\ell=0}^{n-1} b_{kj}a_{\ell k}b_{\ell n})\\
&-\sum_{j,\ell=0}^{n-1} b_{jn}a_{j\ell}b_{\ell n}+\sum_{k,\ell=0}^{n-1} b_{kn}a_{\ell k}b_{\ell n}\\
=\;&\sum_{j,m=0}^{n-1}(\varepsilon\star p_j)(\lambda)(\varepsilon\star p_m)(\nu)(\sum_{\ell=0}^{n-1}\delta_{j\ell}b_{\ell m}+\sum_{k=0}^{n-1} b_{jk}\delta_{km}-2b_{jm})\\
&+\sum_{m=0}^{n-1}(\varepsilon\star p_m)(\nu)(2\sum_{\ell=0}^{n-1}\delta_{n\ell}b_{\ell m}-b_{mn}\delta_{nn}+b_{mn})\\
&+\sum_{j=0}^{n-1}(\varepsilon\star p_j)(\lambda)(2\sum_{k=0}^{n-1} b_{jk}\delta_{kn}+b_{jn}\delta_{nn}-b_{jn})+b_{nn}-b_{nn}=0.
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\sigma_1(\lambda,\mu)$ vérifie les conditions de la proposition 2.2, avec $c=n$ et $c'=\begin{pmatrix} 1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$.

Preuve du théorème 2.3 (le cas $\beta=4$). —

Premièrement : Considérons Q_n comme une matrice complexe de taille $2n\times 2n$, notée $C(Q_n)$ et prouvons que $\det C(Q_n)$ est proportionnel au carré de $\prod_{1\le j<k\le n}|\lambda_j-\lambda_k|^4$. On a

$$
\begin{aligned}
\det C(Q_n) &= \det\begin{pmatrix} S(\lambda_j,\lambda_k) & D(\lambda_j,\lambda_k)\\ I(\lambda_j,\lambda_k) & S^T(\lambda_j,\lambda_k)\end{pmatrix}_{1\le j,k\le n}\\
&= \det\left(\begin{pmatrix} p'_j(\lambda_k)\\ p_j(\lambda_k)\end{pmatrix}_{0\le j\le 2n-1,1\le k\le n} B\begin{pmatrix} p_j(\lambda_k) & -p'_j(\lambda_k)\end{pmatrix}_{0\le j\le 2n-1,1\le k\le n}\right)\\
&= \det B\left(\det\begin{pmatrix} p_j(\lambda_k) & p'_j(\lambda_k)\end{pmatrix}_{0\le j\le 2n-1,1\le k\le n}\right)^2 = c^2\,\det B\left(\prod_{1\le j<k\le n}|\lambda_j-\lambda_k|^4\right)^2,
\end{aligned}
$$

où c est une constante non nulle (voir le chapitre 7 de [9]), telle que

$$\det\begin{pmatrix} p_j(\lambda_k) & p_j'(\lambda_k)\end{pmatrix}_{0\le j\le 2n-1, 1\le k\le n} = c\prod_{1\le j<k\le n}|\lambda_j-\lambda_k|^4.$$

Deuxièmement : Vérifions les deux dernières hypothèses (2.7) et (2.8) de la proposition 2.2. On a

$$\int \sigma_4\,(\lambda{,}\lambda)\,m(\mathrm{d}\lambda) = \int \begin{pmatrix} S(\lambda{,}\lambda) & 0 \\ 0 & S^T(\lambda{,}\lambda)\end{pmatrix} m(\mathrm{d}\lambda),$$

car D et I sont des fonctions antisymétriques. Donc l'intégrale (2.7) est bien un scalaire de valeur

$$\int S\,(\lambda{,}\lambda)\,m(\mathrm{d}\lambda) = \sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{jk}\int p_j'(\lambda)p_k(\lambda)m(\mathrm{d}\lambda).$$

Or

$$\sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{kj}\int p_k'(\lambda)p_j(\lambda)m(\mathrm{d}\lambda) = -\sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{jk}\int p_j(\lambda)p_k'(\lambda)m(\mathrm{d}\lambda),$$

d'où

$$\int S\,(\lambda{,}\lambda)\,m(\mathrm{d}\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{jk}a_{kj} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}BA = \frac{2n}{2} = n.$$

Prouvons que $\int \sigma_4\,(\lambda{,}\mu)\,\sigma_4\,(\mu{,}\nu)\,m(d\mu) = \sigma_4\,(\lambda{,}\nu)$. Ceci équivaut aux trois relations (la quatrième étant automatique par symétrie)

$$\int (S\,(\lambda{,}\mu)\,S\,(\mu{,}\nu) + D(\lambda{,}\mu)I(\mu{,}\nu))m(\mathrm{d}\mu) = S\,(\lambda{,}\nu)\,, \tag{2.30}$$

$$\int (S\,(\lambda{,}\mu)\,D(\mu{,}\nu) + D(\lambda{,}\mu)S\,(\nu{,}\mu))m(\mathrm{d}\mu) = D\,(\lambda{,}\nu)\,, \tag{2.31}$$

$$\int (I(\lambda{,}\mu)S\,(\mu{,}\nu) + S\,(\mu{,}\lambda)\,I(\mu{,}\nu))m(\mathrm{d}\mu) = I\,(\lambda{,}\nu)\,. \tag{2.32}$$

Vérifions la relation (2.30)

$$\begin{aligned} &\int (\sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{jk}p_j'(\lambda)p_k(\mu)\sum_{\ell,m=0}^{2n-1} b_{\ell m}p_\ell'(\mu)p_m(\nu))m(\mathrm{d}\mu) \\ &-\int (\sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{jk}p_j'(\lambda)p_k'(\mu)\sum_{\ell,m=0}^{2n-1} b_{\ell m}p_\ell(\mu)p_m(\nu))m(\mathrm{d}\mu) \\ =\ &\sum_{j,m=0}^{2n-1} p_j'(\lambda)p_m(\nu)\sum_{k,\ell=0}^{2n-1} b_{jk}a_{k\ell}b_{\ell m} = \sum_{j,m=0}^{2n-1} b_{jm}p_j'(\lambda)p_m(\nu) = S\,(\lambda{,}\nu)\,.\end{aligned}$$

Vérifions la relation (2.31)

$$\begin{aligned} &-\int (\sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{jk}p_j'(\lambda)p_k(\mu)\sum_{\ell,m=0}^{2n-1} b_{\ell m}p_\ell'(\mu)p_m'(\nu))m(\mathrm{d}\mu) \\ &-\int (\sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{jk}p_j'(\lambda)p_k'(\mu)\sum_{\ell,m=0}^{2n-1} b_{m\ell}p_m'(\nu)p_\ell(\mu))m(\mathrm{d}\mu) \\ =\ &-\sum_{j,m=0}^{2n-1} p_j'(\lambda)p_m'(\nu)\sum_{k,\ell=0}^{2n-1} b_{jk}a_{k\ell}b_{\ell m} = -\sum_{j,m=0}^{2n-1} b_{jm}p_j'(\lambda)p_m'(\nu) = D\,(\lambda{,}\nu)\,.\end{aligned}$$

Vérifions la relation (2.32)

$$\begin{aligned}
&\int (\sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{jk} p_j(\lambda) p_k(\mu) \sum_{\ell,m=0}^{2n-1} b_{\ell m} p'_\ell(\mu) p_m(\nu)) m(\mathrm{d}\mu) \\
&+ \int (\sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{kj} p'_k(\mu) p_j(\lambda) \sum_{\ell,m=0}^{2n-1} b_{\ell m} p_\ell(\mu) p_m(\nu)) m(\mathrm{d}\mu) \\
= & \sum_{j,m=0}^{2n-1} p_j(\lambda) p_m(\nu) \sum_{k,\ell=0}^{2n-1} b_{jk} a_{k\ell} b_{\ell m} = \sum_{j,m=0}^{2n-1} b_{jm} p_j(\lambda) p_m(\nu) = I\,(\lambda,\nu)\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\sigma_4(\lambda,\mu)$ vérifie les conditions de la proposition 2.2, avec $c = n$ et $c' = 0$.

3 Expressions des noyaux matriciels dans le cadre de la théorie des polynômes orthogonaux

3.1 Introduction

Dans cette partie, nous poursuivons les calculs pour améliorer les expressions des noyaux matriciels trouvées dans la deuxième partie, pour le cas où la mesure m dans (2.1) possède une densité w_n sur $\mathbb{R}$, de la forme $w_n(\lambda) = \exp(-nV(\lambda))$, où $V(\lambda)$ est un polynôme comme spécifié dans l'introduction générale. De plus, pour famille de polynômes intervenant dans les théorèmes 2.1, 2.2 et 2.3, nous considérons les polynômes orthogonaux par rapport au poids $\exp(-nV(\lambda))$ pour le cas $\beta = 4$ et $\exp(-2nV(\lambda))$ pour le cas $\beta = 1$.

En fait, il s'agit plus précisément d'exprimer les noyaux matriciels essentiellemtn à l'aide du noyau reproduisant de la théorie des polynômes orthogonaux. Cela permet une utilisation efficace de l'approche par les polynômes orthogonaux dans le cas des matrices aléatoires gaussiennes et des matrices aléatoires à loi unitairement invariant, car on peut alors utiliser les formules asymptotiques pour les polynômes orthogonaux (voir [2], [5] et [10]).

On rappelle que des formules générales (utilisant la théorie des opérateurs intégraux) ont déjà été obtenues par H. Widom dans [14]. Ici cependant, grâce à l'hypothèse très particulière sur la densité du poids w_n (l'aspect polynômial de V est déterminant et il se concrétise dans les lemmes 3.1 et 3.6), nous obtenons des formules très proches de celles connues pour les ensembles gaussiens.

Cependant, pour cela il faut légèrement modifier la définition du noyau matriciel pour le cas $\beta = 4$ et insérer la densité de la mesure m dans l'expression du noyau matriciel.

Premièrement : le cas $\beta = 1$.

Soient $(\pi_\ell\,(\lambda))_{\ell\in\mathbb{N}}$ les polynômes orthogonaux sur $\mathbb{R}$ associés au poids $\exp(-2nV(\lambda))$. Ils vérifient

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_\ell\,(\lambda)\,\pi_m\,(\lambda)\,\mathrm{e}^{-2nV(\lambda)}\mathrm{d}\lambda = \delta_{\ell m}, \quad \delta_{\ell m},\ \text{symbole de Kronecker.}$$

Notons

$$\psi_\ell\,(\lambda) = \pi_\ell\,(\lambda)\,\mathrm{e}^{-nV(\lambda)}, \quad \ell \in \mathbb{N},$$

le système de fonctions orthonormales de $\mathrm{L}^2\,(\mathbb{R},\mathbb{C})$ correspondant et introduisons les noyaux reproduisants

$$\begin{aligned}
K_n &= \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j \otimes \psi_j, && (3.1) \\
k_n &= \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j \otimes \pi_j.
\end{aligned}$$

Alors, avec les notations ci-dessus, on a

Proposition 3.1 *(le cas $\beta = 1$, n pair). — Définissons les coefficients*

$$a_{jk} = \int_{\mathbb{R}} (\varepsilon \star \psi_j)\, \psi_k \quad et \quad c_{jk} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\psi_j' \psi_k - \psi_j \psi_k'\right) = 2n \left(V'(\mathrm{J})\right)_{jk} \varepsilon(j-k), \quad j,k \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

où $\star$ désigne la convolution usuelle dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\prime$ désigne la dérivation et J est la matrice (de Jacobi) infinie de l'opérateur de multiplication par la variable λ de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans la base $(\psi_\ell(\lambda))_{\ell \in \mathbb{N}}$. La matrice $A = (a_{jk})_{0 \le j,k \le n-1}$ est alors antisymétrique réelle inversible. Soit $B = (b_{jk})_{0 \le j,k \le n-1}$ son inverse. Posons

$$\begin{aligned}
S_n(\lambda,\mu) &= S_n^T(\mu,\lambda) = \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} \psi_j(\lambda)(\varepsilon \star \psi_k)(\mu), \\
D_n(\lambda,\mu) &= -\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} \psi_j(\lambda) \psi_k(\mu), \\
I_n(\lambda,\mu) &= \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} (\varepsilon \star \psi_j)(\lambda)(\varepsilon \star \psi_k)(\mu)
\end{aligned}$$

et $J_n(\lambda,\mu) = I_n(\lambda,\mu) - \varepsilon(\lambda - \mu)$. On définit le noyau matriciel

$$\sigma_{n1}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} S_n(\lambda,\mu) & D_n(\lambda,\mu) \\ J_n(\lambda,\mu) & S_n^T(\lambda,\mu) \end{pmatrix}.$$

Alors les densités des probabilités marginales (2.2) de (1.2) sont données par

$$p_{k1}^{(n)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = \frac{(n-k)!}{n!} \operatorname{Qdet}\left(\sigma_{n1}(\lambda_p,\lambda_q)\right)_{1 \le p,q \le k}, \quad k \in \{1,\ldots,n\}$$

et en particulier, pour $k = n$,

$$p_1^{(n)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \frac{1}{n!} \operatorname{Qdet}\left(\sigma_{n1}(\lambda_p,\lambda_q)\right)_{1 \le p,q \le n}.$$

De plus, on a les relations

$$\begin{aligned}
S_n(\lambda,\mu) &= -(\varepsilon_\mu \star D_n)(\lambda,\mu), \\
J_n(\lambda,\mu) &= (\varepsilon_\lambda \star S_n)(\lambda,\mu) + \varepsilon(\lambda - \mu).
\end{aligned}$$

Proposition 3.2 *(le cas $\beta = 1$, n impair). — Avec les notations ci-dessus, définissons*

$$\begin{aligned}
a'_{jk} &= a_{jk} \quad si \quad j,k \in \{0,\ldots,n-1\} \\
et \quad a'_{nj} &= -a'_{jn} = \int_{\mathbb{R}} \psi_j(\lambda) \mathrm{d}\lambda \quad si \quad j \in \{0,\ldots,n-1\} \\
et \quad a'_{nn} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

La matrice $A = (a'_{jk})_{0 \le j,k \le n}$ est alors antisymétrique réelle inversible. Soit $B = (b_{jk})_{0 \le j,k \le n}$ son inverse. Posons

$$\begin{aligned}
S_n(\lambda,\mu) &= S_n^T(\mu,\lambda) = \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} \psi_j(\lambda)(\varepsilon \star \psi_k)(\mu) + \sum_{j=0}^{n-1} b_{jn} \psi_j(\lambda), \\
D_n(\lambda,\mu) &= -\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} \psi_j(\lambda) \psi_k(\mu), \\
I_n(\lambda,\mu) &= \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} (\varepsilon \star \psi_j)(\lambda)(\varepsilon \star \psi_k)(\mu) + \sum_{j=0}^{n-1} b_{jn}((\varepsilon \star \psi_j)(\lambda) - (\varepsilon \star \psi_j)(\mu))
\end{aligned}$$

et $J_n(\lambda,\mu) = I_n(\lambda,\mu) - \varepsilon(\lambda-\mu)$. *On définit le noyau matriciel*

$$\sigma_{n1}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} S_n(\lambda,\mu) & D_n(\lambda,\mu) \\ J_n(\lambda,\mu) & S_n^T(\lambda,\mu) \end{pmatrix}.$$

Alors les densités des probabilités marginales (2.2) de (1.2) sont données par

$$p_{k1}^{(n)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = \frac{(n-k)!}{n!}\,\mathrm{Qdet}\,(\sigma_{n1}(\lambda_p,\lambda_q))_{1\le p,q\le k}, \quad k\in\{1,\ldots,n\}$$

et en particulier, pour $k=n$,

$$p_1^{(n)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \frac{1}{n!}\,\mathrm{Qdet}\,(\sigma_{n1}(\lambda_p,\lambda_q))_{1\le p,q\le n}.$$

Preuve des propositions 3.1 et 3.2. — Prenons $p_\ell(\lambda) = \pi_\ell(\lambda)$ dans les théorèmes 2.1 et 2.2 et remarquons que la preuve est indépendante de la parité de n et qu'il s'agit simplement de montrer que nous pouvons insérer la densité du poids dans l'expression du noyau matriciel. D'après (2.12), (2.15), on a

$$p_{k1}^{(n)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = \frac{(n-k)!}{n!}\,\mathrm{Qdet}\,(\sigma_1(\lambda_p,\lambda_q))_{1\le p,q\le k}\prod_{p=1}^{k}\mathrm{e}^{-nV(\lambda_p)},$$

donc

$$(p_{k1}^{(n)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k))^2 = \left(\frac{(n-k)!}{n!}\right)^2 \det\begin{pmatrix} S(\lambda_p,\lambda_q) & D(\lambda_p,\lambda_q) \\ J(\lambda_p,\lambda_q) & S^T(\lambda_p,\lambda_q)\end{pmatrix}_{1\le p,q\le k}\prod_{p=1}^{k}\mathrm{e}^{-2nV(\lambda_p)},$$

il suffit alors, par multilinéarité, de multiplier chaque ligne $\begin{pmatrix} S(\lambda_p,\lambda_q) & D(\lambda_p,\lambda_q)\end{pmatrix}_{1\le q\le k}$ par $\mathrm{e}^{-nV(\lambda_p)}$ et chaque colonne $\begin{pmatrix} D(\lambda_p,\lambda_q) \\ S^T(\lambda_p,\lambda_q)\end{pmatrix}_{1\le p\le k}$ par $\mathrm{e}^{-nV(\lambda_q)}$ et d'appliquer le raisonnement de la preuve du théorème 2.1 pour prendre la racine carrée.

Deuxièmement : le cas $\beta = 4$.

Soient $(\pi_\ell(\lambda))_{\ell\in\mathbb{N}}$ les polynômes orthogonaux sur $\mathbb{R}$ associés au poids $\exp(-nV(\lambda))$. Ils vérifient

$$\int_{\mathbb{R}}\pi_\ell(\lambda)\,\pi_m(\lambda)\,\mathrm{e}^{-nV(\lambda)}\mathrm{d}\lambda = \delta_{\ell m}.$$

Notons

$$\psi_\ell(\lambda) = \pi_\ell(\lambda)\,\mathrm{e}^{-\frac{nV(\lambda)}{2}}, \quad \ell\in\mathbb{N},$$

le système de fonctions orthonormales de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ correspondant et introduisons les noyaux reproduisants

$$\begin{aligned} K_{2n+d} &= \sum_{j=0}^{2n+d-1}\psi_j\otimes\psi_j, \\ k_{2n+d} &= \sum_{j=0}^{2n+d-1}\pi_j\otimes\pi_j. \end{aligned}$$

Alors, avec les notations ci-dessus, on a

Proposition 3.3 *(le cas* $\beta=4$*). — Définissons les coefficients*

$$a_{jk} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(\psi_j\psi_k' - \psi_j'\psi_k) = \frac{n}{2}\left(V'(J)\right)_{jk}(2\varepsilon)(k-j) \quad \textit{et} \quad c_{jk} = \int_{\mathbb{R}}\psi_j(\varepsilon\star\psi_k), \quad j,k\in\mathbb{N}. \qquad (3.4)$$

La matrice $A=(a_{jk})_{0\leq j,k\leq 2n-1}$ *est alors antisymétrique réelle inversible. Soit* $B=(b_{jk})_{0\leq j,k\leq 2n-1}$ *son inverse. Posons*

$$\begin{aligned}
S_n(\lambda,\mu) &= S_n^T(\mu,\lambda)=\sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{jk}\psi_j'(\lambda)\psi_k(\mu),\\
D_n(\lambda,\mu) &= -\frac{\partial S_n}{\partial\mu}(\lambda,\mu)=-\sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{jk}\psi_j'(\lambda)\psi_k'(\mu),\\
I_n(\lambda,\mu) &= \sum_{j,k=0}^{2n-1} b_{jk}\psi_j(\lambda)\psi_k(\mu).
\end{aligned}$$

On définit le noyau matriciel

$$\sigma_{n4}\left(\lambda,\mu\right)=\begin{pmatrix} S_n(\lambda,\mu) & D_n(\lambda,\mu)\\ I_n(\lambda,\mu) & S_n^T(\lambda,\mu)\end{pmatrix}.$$

Alors les densités des probabilités marginales (2.2) de (1.2) sont données par

$$p_{k4}^{(n)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)=\frac{(n-k)!}{n!}\operatorname{Qdet}\left(\sigma_{n4}\left(\lambda_p,\lambda_q\right)\right)_{1\leq p,q\leq k},\quad k\in\{1,\ldots,n\}$$

et en particulier, pour$k=n$,

$$p_4^{(n)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\frac{1}{n!}\operatorname{Qdet}\left(\sigma_{n4}\left(\lambda_p,\lambda_q\right)\right)_{1\leq p,q\leq n}.$$

Preuve de la proposition 3.3. — Prenons $p_\ell\left(\lambda\right)=\pi_\ell\left(\lambda\right)$ dans le théorème 2.3. Remarquons d'abord, que

$$\begin{aligned}
a_{jk} &= \frac12\int_{\mathbb R}\left(\psi_j\psi_k'-\psi_j'\psi_k\right)\\
&= \frac12\int_{\mathbb R}\Big((\pi_j(\pi_k'-\frac n2V'\pi_k)-(\pi_j'-\frac n2V'\pi_j)\pi_k\Big)\,\mathrm e^{-nV}\\
&= \frac12\int_{\mathbb R}\left(\pi_j\pi_k'-\pi_j'\pi_k\right)\mathrm e^{-nV}.
\end{aligned}$$

Puis, dans la définition des éléments du noyau matriciel σ_4 remplaons π_j' par $\pi_j'-\frac n2V'\pi_j$ et remarquons que la preuve du théorème 2.3. fonctionne toujours car

$$\det\begin{pmatrix}\pi_j(\lambda_k) & \pi_j'(\lambda_k)\end{pmatrix}_{0\leq j\leq 2n-1,1\leq k\leq n}=\det\begin{pmatrix}\pi_j(\lambda_k) & (\pi_j'(\lambda_k)-\frac n2V'(\lambda_k)\pi_j(\lambda_k))\end{pmatrix}_{0\leq j\leq 2n-1,1\leq k\leq n}.$$

Enfin, il reste à montrer que nous pouvons insérer la densité du poids dans l'expression du noyau matriciel. D'après (2.18), on a, en procédant comme précédemment

$$(p_{k4}^{(n)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k))^2=\left(\frac{(n-k)!}{n!}\right)^2\det\begin{pmatrix}S(\lambda_p,\lambda_q) & D(\lambda_p,\lambda_q)\\ I(\lambda_p,\lambda_q) & S^T(\lambda_p,\lambda_q)\end{pmatrix}_{1\leq p,q\leq k}\prod_{p=1}^k\mathrm e^{-2nV(\lambda_p)}.$$

Il suffit alors, par multilinéarité, de multiplier toutes les lignes par $\mathrm e^{-nV(\lambda_p)/2}$ et toutes les colonnes par $\mathrm e^{-nV(\lambda_q)/2}$.

3.2 Lemmes préliminaires

Premièrement : le cas $\beta = 1$.

Lemme 3.1. —

$$\pi_j' = \sum_{k=j-d,k\geq 0}^{j-1} 2c_{jk}\pi_k \quad et \quad \psi_j' = \sum_{k=j-d,k\geq 0}^{j+d} c_{jk}\psi_k \quad pour\ tout \quad j \in \mathbb{N}$$

Lemme 3.2. —

$$\delta_{jk} = \sum_{\ell=k-d,\ell\geq 0}^{k+d} a_{j\ell}c_{\ell k} \quad pour\ tous \quad j,k \in \mathbb{N}$$

Lemme 3.3. —

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial K_n}{\partial \nu}(\lambda,\nu)\, K_n(\nu,\mu) - K_n(\lambda,\nu)\, \frac{\partial K_n}{\partial \nu}(\nu,\mu) \right) d\nu \\ = &\left(\frac{\partial k_n}{\partial \mu}(\lambda,\mu) - \frac{\partial k_n}{\partial \lambda}(\lambda,\mu) \right) \exp\left(-n\left(V(\lambda) + V(\mu)\right)\right) \end{aligned}$$

Lemme 3.4. —

$$\frac{\partial K_n}{\partial \lambda}(\lambda,\mu) + \frac{\partial K_n}{\partial \mu}(\lambda,\mu) = \alpha_n(\lambda,\mu)$$

avec

$$\alpha_n = -\sum_{j=n}^{n+d-1} \sum_{k=j-d}^{n-1} c_{jk}\psi_j \otimes \psi_k + \sum_{k=n}^{n+d-1} \sum_{j=k-d}^{n-1} c_{jk}\psi_j \otimes \psi_k$$

Lemme 3.5. —

$$n\left(V'(\lambda)\, K_n(\lambda,\mu) - V'(\mu)\, K_n(\lambda,\mu)\right) = \beta_n(\lambda,\mu)$$

avec

$$\beta_n = \sum_{j=n}^{n+d-1} \sum_{k=j-d}^{n-1} c_{jk}\psi_j \otimes \psi_k + \sum_{k=n}^{n+d-1} \sum_{j=k-d}^{n-1} c_{jk}\psi_j \otimes \psi_k$$

Deuxièmement : le cas $\beta = 4$.

Lemme 3.6. —

$$\pi_j' = -\sum_{k=j-d,k\geq 0}^{j-1} 2a_{jk}\pi_k \quad et \quad \psi_j' = -\sum_{k=j-d,k\geq 0}^{j+d} a_{jk}\psi_k \quad pour\ tout \quad j \in \mathbb{N}$$

Lemme 3.7. —

$$\delta_{jk} = \sum_{\ell=k-d,\ell\geq 0}^{k+d} c_{j\ell}a_{\ell k} \quad pour\ tous \quad j,k \in \mathbb{N}$$

Lemme 3.8. —

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial K_{2n+d}}{\partial \nu}(\lambda,\nu)\, K_{2n+d}(\nu,\mu) - K_{2n+d}(\lambda,\nu)\, \frac{\partial K_{2n+d}}{\partial \nu}(\nu,\mu) \right) d\nu \\ = &\left(\frac{\partial k_{2n+d}}{\partial \mu}(\lambda,\mu) - \frac{\partial k_{2n+d}}{\partial \lambda}(\lambda,\mu) \right) \exp\left(-\frac{n}{2}\left(V(\lambda) + V(\mu)\right)\right) \end{aligned}$$

Lemme 3.9. —
$$\frac{\partial K_{2n+d}}{\partial \lambda}(\lambda,\mu) + \frac{\partial K_{2n+d}}{\partial \mu}(\lambda,\mu) = \alpha_n(\lambda,\mu)$$
avec
$$\alpha_n = \sum_{j=2n+d}^{2n+2d-1} \sum_{k=j-d}^{2n+d-1} a_{jk}\psi_j \otimes \psi_k - \sum_{k=2n+d}^{2n+2d-1} \sum_{j=k-d}^{2n+d-1} a_{jk}\psi_j \otimes \psi_k$$

Lemme 3.10. —
$$\frac{n}{2}\left(V'(\lambda)\, K_{2n+d}(\lambda,\mu) - V'(\mu)\, K_{2n+d}(\lambda,\mu)\right) = \beta_n(\lambda,\mu)$$
avec
$$\beta_n = -\sum_{j=2n+d}^{2n+2d-1} \sum_{k=j-d}^{2n+d-1} a_{jk}\psi_j \otimes \psi_k - \sum_{k=2n+d}^{2n+2d-1} \sum_{j=k-d}^{2n+d-1} a_{jk}\psi_j \otimes \psi_k$$

Lemme 3.11. —
$$(\varepsilon_\mu \star K_{2n+d})(\lambda,\mu) + (\varepsilon_\lambda \star K_{2n+d})(\lambda,\mu) = \gamma_n(\lambda,\mu)$$
avec
$$\begin{aligned}\gamma_n &= (\varepsilon_\lambda \star (\varepsilon_\mu \star \alpha_n)) \\ &= \sum_{j=2n+d}^{2n+2d-1} \sum_{k=j-d}^{2n+d-1} a_{jk}(\varepsilon \star \psi_j) \otimes (\varepsilon \star \psi_k) - \sum_{k=2n+d}^{2n+2d-1} \sum_{j=k-d}^{2n+d-1} a_{jk}(\varepsilon \star \psi_j) \otimes (\varepsilon \star \psi_k)\end{aligned}$$

3.3 Preuves des lemmes préliminaires

On ne traite que le cas $\beta = 1$. Le cas $\beta = 4$ s'en déduit, en échangeant les rôles des coefficients a_{jk} et c_{jk} et en remplaçant V par $V/2$.

Preuve du lemme 3.1. — Comme le coefficient c_{jk} (3.2) est antisymétrique en j et k , on peut supposer $j > k$. Alors
$$c_{jk} = \frac{1}{2}\int \pi_j' \pi_k \mathrm{e}^{-2nV} \quad \text{car} \quad \int \pi_j \pi_k' \mathrm{e}^{-2nV} = 0$$
puisque les $(\pi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ sont des polynômes orthogonaux et que $\deg(\pi_j) = j > \deg(\pi_k') = k-1$. Une intégration par parties donne alors
$$\begin{aligned} c_{jk} &= -\frac{1}{2}\int \pi_j(\pi_k' - 2nV'\pi_k)\mathrm{e}^{-2nV} \quad (\text{car} \quad \lim_{\pm\infty} \pi_\ell \mathrm{e}^{-nV} = 0) \\ &= n\int V'\pi_j\pi_k \mathrm{e}^{-2nV} = n\left(V'(J)\right)_{jk} \times \chi_{\{-d,\ldots,d\}}(j-k), \end{aligned}$$
où $\chi_{\{-d,\ldots,d\}}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $\{-d,\ldots,d\}$. π_j' est un polynôme de degré $j-1$, qui peut s'écrire sous la forme
$$\pi_j' = \sum_{k=0}^{j-1} \gamma_{jk}\pi_k \quad \text{et par orthogonalité} \quad \gamma_{jk} = \int \pi_j'\pi_k \mathrm{e}^{-2nV} = 2c_{jk},$$
ce qui donne la première relation du lemme 3.1. De même $\psi_j' = (\pi_j' - 2nV'\pi_j)\mathrm{e}^{-nV}$ peut s'écrire sous la forme
$$\psi_j' = \sum_{k=0}^{j+d} \gamma_{jk}\psi_k$$

et par orthogonalité

$$\begin{aligned}\gamma_{jk} &= \int \psi_j'\psi_k = -\int \psi_j\psi_k' \quad \text{(en intégrant par parties)}\\ &= \frac{1}{2}\int \left(\psi_j'\psi_k - \psi_j\psi_k'\right) = \frac{1}{2}\int \left(\pi_j'\pi_k - \pi_j\pi_k'\right) \mathrm{e}^{-2nV} = c_{jk}.\end{aligned}$$

ce qui donne la deuxième relation du lemme 3.1.

Preuve du lemme 3.2. — Comme $(\varepsilon\star\psi_j)' = \psi_j$, une intégration par parties de $\delta_{jk} = \int \psi_j\psi_k$ donne grâce au lemme 3.1

$$\delta_{jk} = -\int (\varepsilon\star\psi_j)\,\psi_k' = -\sum_{\ell=k-d,\ell\geq 0}^{k+d}\int (\varepsilon\star\psi_j)\,\psi_\ell c_{k\ell} = \sum_{\ell=k-d,\ell\geq 0}^{k+d} a_{j\ell}c_{\ell k}.$$

Preuve du lemme 3.3. — On a

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial K_n}{\partial\nu}(\lambda,\nu)\,K_n(\nu,\mu) - K_n(\lambda,\nu)\,\frac{\partial K_n}{\partial\nu}(\nu,\mu)\right)d\nu\\ =\;&\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial k_n}{\partial\nu}(\lambda,\nu)\,k_n(\nu,\mu) - nV'(\nu)\,k_n(\lambda,\nu)\,k_n(\nu,\mu)\right)\mathrm{e}^{-n(V(\lambda)+V(\mu)+2V(\nu))}d\nu\\ &-\int_{\mathbb{R}}\left(k_n(\lambda,\nu)\,\frac{\partial k_n}{\partial\nu}(\nu,\mu) - nV'(\nu)\,k_n(\lambda,\nu)\,k_n(\nu,\mu)\right)\mathrm{e}^{-n(V(\lambda)+V(\mu)+2V(\nu))}d\nu\\ =\;&\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial k_n}{\partial\nu}(\lambda,\nu)\,k_n(\nu,\mu) - k_n(\lambda,\nu)\,\frac{\partial k_n}{\partial\nu}(\nu,\mu)\right)\mathrm{e}^{-n(V(\lambda)+V(\mu)+2V(\nu))}d\nu.\end{aligned}$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial k_n}{\partial\nu}(\lambda,\nu)\,k_n(\nu,\mu)\,\mathrm{e}^{-2nV(\nu)}d\nu = \sum_{j=0}^{n-1}\pi_j(\lambda)\int_{\mathbb{R}}\pi_j'(\nu)k_n(\nu,\mu)\,\mathrm{e}^{-2nV(\nu)}d\nu$$

et comme l'opérateur intégral de noyau $k_n(\nu,\mu)\,\mathrm{e}^{-2nV(\nu)}$ est le projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel engendré par $(\pi_\ell)_{\ell\in\{0,\dots,n-1\}}$, auquel appartient π_j' pour $j\in\{0,\dots,n-1\}$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial k_n}{\partial\nu}(\lambda,\nu)\,k_n(\nu,\mu)\,\mathrm{e}^{-2nV(\nu)}d\nu = \sum_{j=0}^{n-1}\pi_j(\lambda)\pi_j'(\mu) = \frac{\partial k_n}{\partial\mu}(\lambda,\mu),$$

d'où le résultat.

Preuve du lemme 3.4. — D'après le lemme 3.1, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_n}{\partial\lambda}(\lambda,\mu) &= \sum_{j=0}^{n-1}\psi_j'(\lambda)\psi_j(\mu) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=j-d,k\geq 0}^{j+d}c_{jk}\psi_k(\lambda)\right)\psi_j(\mu)\\ &= -\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=k-d,j\geq 0}^{k+d}c_{kj}\psi_j(\mu)\right)\psi_k(\lambda) + \sum_{k=n}^{n+d-1}\sum_{j=k-d}^{n-1}c_{jk}\psi_k(\lambda)\psi_j(\mu)\\ &\quad+\sum_{j=n}^{n+d-1}\sum_{k=j-d}^{n-1}c_{kj}\psi_k(\lambda)\psi_j(\mu)\\ &= -\frac{\partial K_n}{\partial\mu}(\lambda,\mu) + \alpha_n(\lambda,\mu).\end{aligned}$$

Preuve du lemme 3.5. — On a

$$nV'(\lambda)\,\psi_j(\lambda) = \sum_{k=j-d,k\geq 0}^{j+d} n\left(V'(J)\right)_{jk}\psi_k(\lambda),$$

d'où

$$\begin{aligned}
nV'(\lambda)\,K_n(\lambda,\mu) &= \sum_{j=0}^{n-1} nV'(\lambda)\,\psi_j(\lambda)\psi_j(\mu) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=j-d,k\geq 0}^{j+d} n\left(V'(J)\right)_{jk}\psi_k(\lambda)\right)\psi_j(\mu) \\
&= nV'(\mu)\,K_n(\lambda,\mu) + \sum_{k=n}^{n+d-1}\sum_{j=k-d}^{n-1} n\left(V'(J)\right)_{jk}\psi_k(\lambda)\psi_j(\mu) \\
&\quad - \sum_{j=n}^{n+d-1}\sum_{k=j-d}^{n-1} n\left(V'(J)\right)_{jk}\psi_k(\lambda)\psi_j(\mu) \\
&= nV'(\mu)\,K_n(\lambda,\mu) + \sum_{k=n}^{n+d-1}\sum_{j=k-d}^{n-1} c_{kj}\psi_k(\lambda)\psi_j(\mu) \\
&\quad + \sum_{j=n}^{n+d-1}\sum_{k=j-d}^{n-1} c_{kj}\psi_k(\lambda)\psi_j(\mu) \\
&= nV'(\mu)\,K_n(\lambda,\mu) + \beta_n(\lambda,\mu)\,.
\end{aligned}$$

3.4 Énoncés des théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3

Théorème 3.1 *(le cas $\beta = 1$, n pair). — Posons, avec (3.2),*

$$s_{jk} = \sum_{\ell=k-d}^{n-1} a_{j\ell}c_{\ell k}. \tag{3.5}$$

La matrice

$$D = \left(s_{jk}\right)_{n-d\leq j,k\leq n-1} \tag{3.6}$$

est alors inversible. Soit

$$D^{-1} = \left(t_{jk}\right)_{n-d\leq j,k\leq n-1} \tag{3.7}$$

son inverse. Notons

$$g_{jk} = -c_{jk} + \sum_{\ell=n-d}^{n-1}\left(c_{j\ell} - \sum_{m=j-d}^{n-d-1} c_{jm}s_{m\ell}\right)t_{\ell k}. \tag{3.8}$$

La matrice

$$G = \left(g_{jk}\right)_{n-d\leq j,k\leq n-1} \tag{3.9}$$

est alors antisymétrique de taille $d\times d$. Les élements du noyau matriciel

$$\sigma_{n1}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} S_n(\lambda,\mu) & D_n(\lambda,\mu) \\ J_n(\lambda,\mu) & S_n^T(\lambda,\mu) \end{pmatrix}$$

s'expriment alors comme suit

$$D_n(\lambda,\mu) = -\frac{\partial K_n}{\partial \mu}(\lambda,\mu) + H_n(\lambda,\mu) - G_n(\lambda,\mu),$$

avec

$$G_n(\lambda,\mu) = \sum_{j,k=n-d}^{n-1} g_{jk}\psi_j(\lambda)\psi_k(\mu), \tag{3.10}$$

$$H_n(\lambda,\mu) = \sum_{k=n}^{n+d-1}\sum_{j=k-d}^{n-1} c_{jk}\psi_j(\lambda)\psi_k(\mu). \tag{3.11}$$

On rappelle que $K_n(\lambda,\mu)$ est le noyau reproduisant (3.1) et que

$$\begin{aligned} S_n(\lambda,\mu) &= -(\varepsilon_\mu \star D_n)(\lambda,\mu), \\ J_n(\lambda,\mu) &= (\varepsilon_\lambda \star S_n)(\lambda,\mu) + \varepsilon(\lambda-\mu), \\ S_n^T(\lambda,\mu) &= S_n(\mu,\lambda). \end{aligned}$$

Théorème 3.2 *(le cas $\beta = 1$, n impair). — Posons, avec (3.2) et (3.3),*

$$s_{jk} = \begin{cases} \sum_{\ell=k-d}^{n-1} a_{j\ell}c_{\ell k} + a'_{jn}c_{nk} & si \quad j \in \{0,\ldots,n-1\} \quad et \quad k \in \{n-d,\ldots,n\}, \\ \sum_{\ell=k-d}^{n-1} a'_{n\ell}c_{\ell k} & si \quad j = n \quad et \quad k \in \{n-d,\ldots,n\}. \end{cases} \tag{3.12}$$

La matrice

$$D = (s_{jk})_{n-d\le j,k\le n} \tag{3.13}$$

est alors inversible. Soit

$$D^{-1} = (t_{jk})_{n-d\le j,k\le n} \tag{3.14}$$

son inverse. Notons

$$g_{jk} = -c_{jk} + \sum_{\ell=n-d}^{n}\left(c_{j\ell} - \sum_{m=j-d}^{n-d-1} c_{jm}s_{m\ell}\right)t_{\ell k}. \tag{3.15}$$

La matrice

$$G = (g_{jk})_{n-d\le j,k\le n} \tag{3.16}$$

est alors antisymétrique de taille $(d+1)\times(d+1)$. Les éléments du noyau matriciel

$$\sigma_{n1}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} S_n(\lambda,\mu) & D_n(\lambda,\mu) \\ J_n(\lambda,\mu) & S_n^T(\lambda,\mu) \end{pmatrix}$$

s'expriment alors comme suit

$$D_n(\lambda,\mu) = -\frac{\partial K_n}{\partial \mu}(\lambda,\mu) + H_n(\lambda,\mu) - G_n(\lambda,\mu),$$

avec

$$G_n(\lambda,\mu) = \sum_{j,k=n-d}^{n-1} g_{jk}\psi_j(\lambda)\psi_k(\mu), \tag{3.17}$$

$$H_n(\lambda,\mu) = \sum_{k=n}^{n+d-1}\sum_{j=k-d}^{n-1} c_{jk}\psi_j(\lambda)\psi_k(\mu). \tag{3.18}$$

De plus, on a

$$\alpha_n(\lambda) = \sum_{j=n-d}^{n-1}(c_{jn}+g_{jn})\psi_j(\lambda) \quad avec \quad c_{jn}+g_{jn} = -\sum_{\ell=n-d}^{n-1} c_{n\ell}t_{\ell j}. \tag{3.19}$$

On rappelle que

$$\begin{aligned} S_n(\lambda,\mu) &= -(\varepsilon_\mu \star D_n)(\lambda,\mu) + \alpha_n(\lambda), \\ J_n(\lambda,\mu) &= (\varepsilon_\lambda \star S_n)(\lambda,\mu) - (\varepsilon \star \alpha_n)(\mu) - \varepsilon(\lambda-\mu). \end{aligned}$$

Théorème 3.3 *(le cas $\beta = 4$). — Posons, avec (3.4),*

$$s_{jk} = \sum_{\ell=j-d}^{2n-1} a_{j\ell} c_{\ell k}. \tag{3.20}$$

La matrice

$$D = (s_{jk})_{2n-d \le j,k \le 2n-1} \tag{3.21}$$

est alors inversible. Soit

$$D^{-1} = (t_{jk})_{2n-d \le j,k \le 2n-1} \tag{3.22}$$

son inverse. Notons

$$g_{jk} = a_{jk} - \sum_{\ell=k-d}^{2n-1} \left(s_{j\ell} + \sum_{m,p=2n-d}^{2n-1} s_{jm} t_{mp} (\delta_{p\ell} - s_{p\ell}) \right) a_{\ell k}. \tag{3.23}$$

La matrice

$$G = (g_{jk})_{2n \le j,k \le 2n+d-1} \tag{3.24}$$

est alors antisymétrique de taille $d \times d$. Les élements du noyau matriciel

$$\sigma_{n4}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} S_n(\lambda,\mu) & D_n(\lambda,\mu) \\ I_n(\lambda,\mu) & S_n^T(\lambda,\mu) \end{pmatrix}$$

s'expriment alors comme suit

$$D_n(\lambda,\mu) = -\frac{\partial K_{2n+d}}{\partial \mu}(\lambda,\mu) + H_n(\lambda,\mu) - G_n(\lambda,\mu),$$

avec

$$G_n(\lambda,\mu) = \sum_{j,k=2n}^{2n+d-1} g_{jk} \psi_j(\lambda) \psi_k(\mu), \tag{3.25}$$

$$H_n(\lambda,\mu) = -\sum_{k=2n+d}^{2n+2d-1} \sum_{j=k-d}^{2n+d-1} a_{jk} \psi_j(\lambda) \psi_k(\mu). \tag{3.26}$$

On rappelle que

$$\begin{aligned} S_n(\lambda,\mu) &= -(\varepsilon_\mu \star D_n)(\lambda,\mu), \\ J_n(\lambda,\mu) &= (\varepsilon_\lambda \star S_n)(\lambda,\mu). \end{aligned}$$

3.5 Commentaires

Dans cette section, nous allons d'abord montrer que les formules données par les théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3 permettent de retrouver les formules connues dans le cas des matrices aléatoires gaussiennes, telles qu'elles sont données aux chapitres 6 et 7 de [10]. Ensuite, nous discuterons des perspectives d'applications de ces formules pour l'étude des régimes asymptotiques des matrices aléatoires (1.1). En particulier, le comportement des coefficients g_{jk} (3.8), (3.15) et (3.23), lorsque $n \to +\infty$, est déterminant. Cette discussion motivera la quatrième partie de ce travail dans laquelle nous étudierons précisément le comportement asymptotique de certaines grandeurs spectrales des matrices aléatoires (1.1) dans le cas où V est un polynôme pair de degré quatre grâce aux résultats de [2].

<u>Premièrement :</u> le cas $\beta = 1$, n pair.

Afin de suivre les conventions du chapitre 6 de [10], nous supposerons que le poids $\exp(-nV(\lambda))$ vaut ici $\exp(-\frac{1}{2}\lambda^2)$ (il n'y a pas de n devant V, mais comme ici V est homogène, puisque c'est un monôme, un simple changement de variables permet de passer d'une convention à l'autre). Les polynômes orthogonaux sont les polynômes d'Hermite qui sont orthogonaux par rapport au poids $\exp(-\lambda^2)$ (voir [12]). Dans ce cas, on peut calculer les coefficients a_{pq} et c_{pq} à partir de la relation suivante

$$\psi_p' = \sqrt{\frac{p}{2}}\psi_{p-1} - \sqrt{\frac{p+1}{2}}\psi_{p+1}. \tag{3.27}$$

Ainsi

$$c_{p,p+1} = -c_{p+1,p} = -\sqrt{\frac{p+1}{2}},$$

les autres coefficients étant nuls. De plus, en multipliant par $\varepsilon \star \psi_q$ la relation (3.27) et en intégrant, il vient

$$-\delta_{pq} = \sqrt{\frac{p}{2}}a_{q,p-1} - \sqrt{\frac{p+1}{2}}a_{q,p+1},$$

ce qui donne la relation

$$a_{pq} = \sqrt{\frac{p-1}{p}}a_{p-2,q} - \sqrt{\frac{2}{p}}\delta_{p-1,q} \quad \text{pour} \quad p > 0, q \geq 0. \tag{3.28}$$

Remarquons que si p,q sont de même parité, alors $a_{pq} = 0$. Nous supposerons donc que p et q sont de parités distinctes et par antisymétrie que $p < q$. Ainsi, en itérant la formule (3.28), on a

$$a_{pq} = \sqrt{\frac{p-1}{p}}a_{p-2,q} = \prod_{j=0}^{\ell-1}\sqrt{\frac{p-2j-1}{p-2j}}a_{p-2\ell,q}.$$

Si $p = 2r$ et $q = 2s+1$ alors

$$a_{pq} = \prod_{j=0}^{r-1}\sqrt{\frac{p-2j-1}{p-2j}}a_{0,q} = \left(\prod_{j=1}^{r}\frac{2j-1}{2j}\right)^{1/2} a_{0,q}$$

et en itérant à nouveau la formule (3.28), il vient

$$a_{0,q} = -a_{q,0} = -\prod_{j=0}^{s-1}\sqrt{\frac{p-2j-1}{p-2j}}a_{1,0} = -\left(\prod_{j=1}^{s}\frac{2j}{2j+1}\right)^{1/2} a_{1,0}.$$

De plus, d'après (3.28), on a

$$a_{1,0} = -\sqrt{2},$$

donc

$$a_{pq} = \left(\frac{p!}{q!}2^{q-p}\right)^{1/2}\frac{((q-1)/2)!}{(p/2)!}.$$

Si $p = 2r+1$ et $q = 2s$, alors

$$a_{pq} = \prod_{j=0}^{r-1}\sqrt{\frac{p-2j-1}{p-2j}}a_{1,q} = 0,$$

car

$$a_{1,q} = 0.$$

Pour ce qui est du calcul de la matrice G (3.9), comme $d = 1$, celle-ci est nulle et il reste

$$S_n(\lambda,\mu) = K_n(\lambda,\mu) - c_{n-1,n}\psi_{n-1}(\lambda)(\varepsilon \star \psi_n)(\mu),$$

avec

$$c_{n-1,n} = -\sqrt{\frac{n}{2}},$$

ce qui donne le résultat connu.

<u>Deuxièmement :</u> le cas $\beta = 1$, n impair.

Dans ce cas, la matrice G (3.16) est de taille 2×2, le calcul donne, d'après (3.12),

$$\begin{cases} s_{n-1,n-1} = a_{n-1,n-2}c_{n-2,n-1} + a'_{n-1,n}c_{n,n-1}, \\ s_{n-1,n} = 0, \\ s_{n,n-1} = 0, \\ s_{n,n} = a'_{n,n-1}c_{n-1,n}. \end{cases}$$

D'où, d'après (3.13),

$$D = \begin{pmatrix} a_{n-1,n-2}c_{n-2,n-1} + a'_{n-1,n}c_{n,n-1} & 0 \\ 0 & a'_{n,n-1}c_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

et

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} t_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & t_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{n-1,n-2}c_{n-2,n-1}+a'_{n-1,n}c_{n,n-1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a'_{n,n-1}c_{n-1,n}} \end{pmatrix}.$$

De plus, d'après (3.19), il vient

$$\alpha_n(\lambda) = (c_{n-1,n} + g_{n-1,n})\psi_{n-1}(\lambda),$$

or, avec (3.15), on a

$$c_{n-1,n} + g_{n-1,n} = -c_{n,n-1}t_{n-1,n-1}$$

et

$$t_{n-1,n-1} = \frac{1}{a'_{n-1,n}c_{n,n-1}}, \quad \text{car} \quad a_{n-1,n-2} = 0$$

d'après le calcul des coefficients a_{pq}. Donc il reste

$$\alpha_n(\lambda) = -\frac{1}{a'_{n-1,n}}\psi_{n-1}(\lambda) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \psi_{n-1}}\psi_{n-1}(\lambda).$$

De plus, comme $n-1$ est pair, on vérifie que

$$(\varepsilon \star \psi_{n-1})(\lambda) = \int_0^\lambda \psi_{n-1}.$$

Enfin, par antisymétrie de G, on a

$$G_n(\lambda,\mu) = g_{n-1,n-1}\psi_{n-1}(\lambda)\psi_{n-1}(\mu) = 0,$$

on retrouve le résultat connu. Ici encore, on peut calculer les coefficients a'_{jn}. On rappelle que les polynômes d'Hermite valent (voir [12])

$$\pi_j(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^j j!}} \sum_{\ell=0}^{[j/2]} \frac{(-1)^\ell j!}{\ell!(j-2\ell)!}(2\lambda)^{j-2\ell},$$

où $[x]$ désigne la partie entière du réel x. De plus

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{2p} \mathrm{e}^{-\lambda^2/2} \mathrm{d}\lambda = \sqrt{2\pi}\frac{(2p)!}{2^p p!},$$

ainsi, en supposant $j = 2p$ pair, on a

$$\begin{aligned} a'_{nj} &= \int_{\mathbb{R}} \psi_j(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{2p}(2p)!}} \sum_{\ell=0}^{p} \frac{(-1)^\ell (2p)!}{\ell!(2p-2\ell)!} \frac{2^{2p-2\ell}(2p-2\ell)!}{(p-\ell)! 2^{p-\ell}} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} \sqrt{(2p)!} \sum_{\ell=0}^{p} \frac{(-1)^\ell 2^{2p-2\ell}}{2^{2p-\ell}\ell!(p-\ell)!} = \sqrt{2}\pi^{1/4} \frac{\sqrt{(2p)!}}{p!} \sum_{\ell=0}^{p} \binom{p}{\ell} \left(-\frac{1}{2}\right)^\ell \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi^{1/4}\sqrt{(2p)!}}{2^p p!}. \end{aligned}$$

Pour terminer le cas $\beta = 1$, rajoutons que pour $n \to +\infty$, on déduit des résultats précédents que

$$a'_{n,n+p} \sim \frac{2^{3/4}}{n^{1/4}} \quad \text{et} \quad a_{n+p,n+q} \sim \sqrt{\frac{2}{n}},$$

pour $n + p$ pair et $n + q$ impair et $p < q$, sinon les coefficients valent zéro.

Troisièmement : le cas $\beta = 4$.

Pour ce cas, le poids $\exp(-nV(\lambda))$ vaut $\exp(-2\lambda^2)$, les polynômes orthogonaux sont les polynômes d'Hermite, orthogonaux par rapport au poids $\exp(-2\lambda^2)$. Comme $d = 1$, la matrice G est nulle et il reste, en adaptant ce qui est fait pour le cas $\beta = 1$,

$$S_n(\lambda,\mu) = K_{2n+1}(\lambda,\mu) + a_{2n,2n+1}\psi_{2n}(\lambda)(\varepsilon \star \psi_{2n+1})(\mu),$$

avec

$$a_{2n,2n+1} = \sqrt{2n+1},$$

ce qui donne le résultat connu.

Pour l'étude des régimes asymptotiques global et local, les résultats déjà connus permettent de conjecturer que seule la partie du noyau matriciel exprimée à l'aide du noyau reproduisant compte. Ce qui signifie que les termes faisant intervenir $H_n(\lambda,\mu)$, $G_n(\lambda,\mu)$ et $\alpha_n(\lambda)$ sont négligeables devant ceux faisant intervenir le noyau reproduisant. Afin de préciser cette assertion, nous allons discuter de façon plus précise pour chacun des trois cas du comportement asymptotique des différents coefficients. Pour cela, on extrapole le comportement des coefficients apparaissant dans le cas des matrices aléatoires gaussiennes que nous avons calculer ci-dessus, bien sûr, nous abandonnons la convention de [10] et reprenons celle que nous utilisons. Afin de fixer les idées, nous discuterons du comportement des termes au niveau de l'élément $S_n(\lambda,\mu)$ du noyau matriciel.

Premièrement : le cas $\beta = 1$, n pair.

Dans ce cas, on sait (et ce pour des classes de polynômes orthogonaux plus générales que celles considérées ici, voir par exemple [11]) que (3.2) $c_{n+p,n+q} = O(n)$, lorsque $n \to +\infty$, pour p,q fixés dans $\mathbb{Z}$. On conjecture que (3.2) $a_{n+p,n+q} = O(1/n)$ et on en déduit que les coefficients (3.5) s_{jk} de la matrice (3.6) D sont $O(1)$, ainsi (et ce n'est pas évident car on divise par $\det D$) les coefficients t_{jk} de (3.7) D^{-1} sont aussi $O(1)$. Sous ces hypothèses, les expressions données par le théorème 3.1 permettent de conclure que les coefficients (3.8) g_{jk} sont $O(n)$. De plus, en supposant que les fonctions orthonormales vérifient $\|\psi_{n+p}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = O(1)$ et $\|\varepsilon \star \psi_{n+p}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = O(1/\sqrt{n})$, on en déduit que les termes (3.11) $\varepsilon \star H_n(\lambda,\mu)$ et (3.10) $\varepsilon \star G_n(\lambda,\mu)$ sont $O(\sqrt{n})$ uniformément en λ,μ, alors que le noyau reproduisant $K_n(\lambda,\mu)$ se comporte comme quelquechose d'ordre n, donc prédominant par rapport à $O(\sqrt{n})$.

Deuxièmement : le cas $\beta = 1$, n impair.

Dans ce cas, on conjecture de plus que (3.3) $a'_{n+p,n} = O(1/\sqrt{n})$, ainsi, on en déduit que les coefficients (3.12) s_{jk} de la matrice (3.13) D sont $O(\sqrt{n})$ et que les coefficients t_{jk} de (3.14) D^{-1} sont $O(1/\sqrt{n})$. Sous ces hypothèses, les expressions données par le théorème 3.2 permettent de conclure que les coefficients (3.15) g_{jk} sont $O(n)$, si $j,k < n$ et que $g_{jn} = -g_{nj} = O(\sqrt{n})$. Ainsi, (3.19) $\alpha_n(\lambda)$ est $O(\sqrt{n})$ uniformément en λ et on conclut comme pour le cas n pair.

Troisièmement : le cas $\beta = 4$.

Ce cas se discute en utilisant le théorème 3.3, comme le premier cas en échangeant le rôle des coefficients a_{jk} et c_{jk} donnés en (3.4).

Il apparait dans la discussion ci-dessus, que l'estimation des éléments de D^{-1} pose le problème de la division par $\det D$ qui pourrait être d'ordre inférieur par rapport à l'ordre que lui donne à priori les estimations des éléments de D, ce qui rendrait caduque la discussion précédente. Dans la quatrième partie, où nous étudions le cas particulier d'un polynôme V pair de degré quatre, nous traitons ce problème en calculant explicitement les équivalents des différents coefficients en utilisant les résultats de [2], ce qui permet de montrer que $\det D$ et donc les coefficients de D^{-1} sont effectivement de l'ordre proposé dans la discussion ci-dessus. Les calculs sont longs en dépit de la parité et du faible degré de V et il est clair que cette méthode est impraticable pour des polynômes V plus généraux, malgré l'existence de formules asymptotiques pour les polynômes orthogonaux correspondants (voir [5]). Ces formules générales de [5] et la méthode qui permet de les établir, permet peut-être d'envisager d'obtenir seulement des estimations du type $a_{n+p,n+q} = O(1/n)$ et $a'_{n+p,n} = O(1/\sqrt{n})$ pour par exemple le cas $\beta = 1$, et non des équivalents. Pour terminer cette section, nous proposons une piste éventuelle (absolument rien n'est garanti), pour résoudre le problème de la division par $\det D$. En fait, $\det D$ peut s'exprimer en fonction des constantes de normalisation de (1.2). Les expressions, dans les différents cas, sont données ci-après. Posons

$$Q_{r,\beta}(w) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^r} \prod_{1 \le j < k \le r} |\lambda_j - \lambda_k|^\beta \prod_{j=1}^{r} w(\lambda_j) \mathrm{d}\lambda_j,$$

où w est une fonction numérique positive d'une variable réelle.

Premièrement : le cas $\beta = 1$, n pair.

Posons $n = 2m$. On a

$$\det D = \det A \det C.$$

De plus, les constantes de normalisation de (1.2) s'expriment comme suit, avec la notation définie ci-dessus,

$$Q_{m,4}(\mathrm{e}^{-2nV}) = \frac{1}{\gamma_0 \cdots \gamma_{2m-1}} \int \cdots \int \det \left(\pi_{k-1}(\lambda_j)\, \pi'_{k-1}(\lambda_j) \right)_{1 \le j \le m, 1 \le k \le 2m} \prod_{j=1}^{m} \mathrm{e}^{-2nV(\lambda_j)} \mathrm{d}\lambda_j,$$

où γ_k est le coefficient dominant du $k-i\grave{e}me$ polynôme orthogonal $\pi_k(\lambda) = \gamma_k \lambda^k + \cdots$ par rapport au poids $\mathrm{e}^{-2nV(\lambda)}$. Ainsi, d'après l'appendice A.18 de [10], il vient

$$Q_{m,4}(\mathrm{e}^{-2nV}) = \frac{m! 2^m}{\gamma_0 \cdots \gamma_{n-1}} \sqrt{\det C}.$$

Avec les mêmes notations, on a

$$Q_{n,1}(\mathrm{e}^{-nV}) = \frac{1}{\gamma_0 \cdots \gamma_{n-1}} \int \cdots \int \left| \det \left(\pi_{k-1}(\lambda_j) \right)_{1 \leq j,k \leq n} \right| \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{-nV(\lambda_j)} \mathrm{d}\lambda_j$$

et

$$Q_{n,1}(\mathrm{e}^{-nV}) = \frac{n! 2^m}{\gamma_0 \cdots \gamma_{n-1}} \sqrt{\det A}.$$

Enfin, on a

$$Q_{p,2}(\mathrm{e}^{-2nV}) = \frac{p!}{(\gamma_0 \cdots \gamma_{p-1})^2}.$$

En conclusion, on trouve

$$\det D = \left(\frac{Q_{\frac{n}{2},4}(\mathrm{e}^{-2nV}) Q_{n,1}(\mathrm{e}^{-nV})}{2^n (n/2)! Q_{n,2}(\mathrm{e}^{-2nV})} \right)^2.$$

<u>Deuxièmement :</u> le cas $\beta = 1$, n impair.

Posons $n = 2m - 1$. De même, on a

$$Q_{m,4}(\mathrm{e}^{-2nV}) = \frac{m! 2^m}{\gamma_0 \cdots \gamma_n} \sqrt{\det C}$$

et

$$Q_{n,1}(\mathrm{e}^{-nV}) = \frac{n! \sqrt{2^{n-1}}}{\gamma_0 \cdots \gamma_{n-1}} \sqrt{\det A}.$$

Finalement, il vient

$$\det D = \frac{(n+1) \left(Q_{\frac{n+1}{2},4}(\mathrm{e}^{-2nV}) Q_{n,1}(\mathrm{e}^{-nV}) \right)^2}{2^{2n} (((n+1)/2)!)^2 Q_{n,2}(\mathrm{e}^{-2nV}) Q_{n+1,2}(\mathrm{e}^{-2nV})}.$$

<u>Troisièmement :</u> le cas $\beta = 4$.

De même, on a

$$Q_{n,4}(\mathrm{e}^{-nV}) = \frac{n! 2^n}{\gamma_0 \cdots \gamma_{2n-1}} \sqrt{\det A},$$

où γ_k est le coefficient dominant du $k - i\grave{e}me$ polynôme orthogonal $\pi_k(\lambda) = \gamma_k \lambda^k + \cdots$ par rapport au poids $\mathrm{e}^{-nV(\lambda)}$. De plus, on a

$$Q_{2n,1}(\mathrm{e}^{-nV/2}) = \frac{(2n)! 2^n}{\gamma_0 \cdots \gamma_{2n-1}} \sqrt{\det C}$$

et

$$Q_{2n,2}(\mathrm{e}^{-nV}) = \frac{(2n)!}{(\gamma_0 \cdots \gamma_{2n-1})^2}.$$

En conclusion, on trouve

$$\det D = \left(\frac{Q_{n,4}(\mathrm{e}^{-nV}) Q_{2n,1}(\mathrm{e}^{-nV/2})}{2^{2n} n! Q_{2n,2}(\mathrm{e}^{-nV})} \right)^2.$$

L'approche variationnelle (voir par exemple [4] et [7]) permet de donner le premier terme du développement asymptotique d'une constante de normalisation pour $\beta > 0$ quelconque et pour des fonctions V plus générales que des fonctions polynômiales. Cependant, il faut des termes supplémentaires, car cette technique montre que les constantes de normalisation se comportent comme $\mathrm{e}^{n^2 \times const.}$, ce qui est insuffisant ici.

3.6 Preuves des théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3

Preuve du théorème 3.1. —
Premièrement : Le calcul de la matrice AC. On a

$$(AC)_{jk} = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{j\ell}c_{\ell k}, \quad j,k \in \{0,\dots,n-1\}.$$

Par le lemme 3.2, il vient

$$(AC)_{jk} = \begin{cases} \delta_{jk} & \text{si} \quad j \in \{0,\dots,n-1\}, k \in \{0,\dots,n-d-1\}, \\ \sum_{\ell=k-d}^{n-1} a_{j\ell}c_{\ell k} = s_{jk} & \text{si} \quad j \in \{0,\dots,n-1\}, k \in \{n-d,\dots,n-1\}. \end{cases}$$

Matriciellement, cela se traduit par

$$AC = \begin{pmatrix} I_{n-d} & E \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

avec

$$D = (s_{\ell k})_{n-d \leq \ell,k \leq n-1} \quad \text{et} \quad E = (s_{\ell k})_{0 \leq \ell \leq n-d-1, n-d \leq k \leq n-1}.$$

Deuxièmement : Le calcul de $(AC)^{-1}$. On sait que A et C sont inversibles d'après la deuxième partie, donc D l'est aussi. Un calcul par blocs donne

$$(AC)^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-d} & -ED^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} = I_n + \begin{pmatrix} 0 & -ED^{-1} \\ 0 & D^{-1} - I_d \end{pmatrix}$$

avec

$$D^{-1} - I_d = (t_{\ell k} - \delta_{\ell k})_{n-d \leq k, \ell \leq n-1},$$

dont les coefficients valent

$$t_{\ell k} - \delta_{\ell k} = \sum_{m=n-d}^{n-1} (\delta_{\ell m} - s_{\ell m}) t_{mk}, \quad \ell,k \in \{n-d,\dots,n-1\}.$$

Ainsi

$$(AC)^{-1} = I_n + \begin{pmatrix} 0 & F \end{pmatrix}$$

avec

$$F = \left(\sum_{m=n-d}^{n-1} (\delta_{\ell m} - s_{\ell m}) t_{mk} \right)_{0 \leq \ell \leq n-1, n-d \leq k \leq n-1}.$$

Troisièmement : Le calcul de $B = A^{-1}$. On utilise l'identité $B = C\,(AC)^{-1}$ et le résultat de la deuxième étape. Il vient

$$B = C + C \begin{pmatrix} 0 & F \end{pmatrix}$$

et comme $B - C$ est antisymétrique, cela donne

$$B = C + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

avec $G = (g_{jk})_{n-d \leq k, \ell \leq n-1}$ antisymétrique et

$$g_{jk} = \sum_{m=0}^{n-1} c_{jm} \left(\sum_{\ell=n-d}^{n-1} (\delta_{m\ell} - s_{m\ell}) t_{\ell k} \right).$$

Quatrièmement : Une simplification de l'expression des g_{jk} pour $j,k \in \{n-d,\dots,n-1\}$. On a

$$\begin{aligned}
g_{jk} &= \sum_{m=j-d}^{n-1} c_{jm}\left(\sum_{\ell=n-d}^{n-1}(\delta_{m\ell}-s_{m\ell})t_{\ell k}\right)\\
&= \sum_{m=j-d}^{n-d-1} c_{jm}\left(\sum_{\ell=n-d}^{n-1}(\delta_{m\ell}-s_{m\ell})t_{\ell k}\right)+\sum_{\ell,m=n-d}^{n-1} c_{jm}(\delta_{m\ell}-s_{m\ell})t_{\ell k}\\
&= \sum_{m=j-d}^{n-d-1} c_{jm}\left(-\sum_{\ell=n-d}^{n-1} s_{m\ell}t_{\ell k}\right)+\sum_{m=n-d}^{n-1} c_{jm}(t_{mk}-\delta_{mk})\\
&= -c_{jk}+\sum_{\ell=n-d}^{n-1}\left(c_{j\ell}-\sum_{m=j-d}^{n-d-1} c_{jm}s_{m\ell}\right)t_{\ell k}.
\end{aligned}$$

Cinquièmement : Le calcul de $D_n(\lambda,\mu)$. On a

$$\begin{aligned}
D_n(\lambda,\mu) &= -\sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk}\psi_j(\lambda)\psi_k(\mu)\\
&= -\sum_{j,k=0}^{n-1} c_{jk}\psi_j(\lambda)\psi_k(\mu)-\sum_{j,k=n-d}^{n-1} g_{jk}\psi_j(\lambda)\psi_k(\mu).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
-\sum_{j,k=0}^{n-1} c_{jk}\psi_j(\lambda)\psi_k(\mu) &= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial K_n}{\partial\nu}(\lambda,\nu)\,K_n(\nu,\mu)-K_n(\lambda,\nu)\,\frac{\partial K_n}{\partial\nu}(\nu,\mu)\right)d\nu\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial k_n}{\partial\lambda}(\lambda,\mu)-\frac{\partial k_n}{\partial\mu}(\lambda,\mu)\right)\mathrm{e}^{-n(V(\lambda)+V(\mu))},
\end{aligned}$$

d'après le lemme 3.3. Donc

$$D_n(\lambda,\mu)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial k_n}{\partial\lambda}(\lambda,\mu)-\frac{\partial k_n}{\partial\mu}(\lambda,\mu)\right)\mathrm{e}^{-n(V(\lambda)+V(\mu))}-G_n(\lambda,\mu).$$

Maintenant, on utilise les lemmes 3.4 et 3.5, pour obtenir une expression sous une forme similaire à celle connue dans le cas des matrices aléatoires gaussiennes à loi orthogonalement invariante. Il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial k_n}{\partial\lambda}(\lambda,\mu)-\frac{\partial k_n}{\partial\mu}(\lambda,\mu)\right)\mathrm{e}^{-n(V(\lambda)+V(\mu))}\\
={}& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial K_n}{\partial\lambda}(\lambda,\mu)-\frac{\partial K_n}{\partial\mu}(\lambda,\mu)\right)+\frac{1}{2}\left(nV'(\lambda)-nV'(\mu)\right)K_n(\lambda,\mu)\\
={}& -\frac{\partial K_n}{\partial\mu}(\lambda,\mu)+\frac{1}{2}\alpha_n(\lambda,\mu)+\frac{1}{2}\beta_n(\lambda,\mu)\\
={}& -\frac{\partial K_n}{\partial\mu}(\lambda,\mu)+H_n(\lambda,\mu)
\end{aligned}$$

d'après les définitions de α_n, β_n et H_n. Ce qui donne le résultat.

Preuve du théorème 3.2. —
Premièrement : Le calcul de AC. On a

$$(AC)_{jk}=\sum_{\ell=0}^{n} a'_{j\ell}c_{\ell k},\quad j,k\in\{0,\dots,n\}.$$

Donc

$$(AC)_{jk} = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{j\ell} c_{\ell k} + a'_{jn} c_{nk}, \quad j \in \{0,\dots,n-1\}, k \in \{0,\dots,n\}.$$

Par le lemme 3.2, il vient

$$(AC)_{jk} = \begin{cases} \delta_{jk} \quad \text{si} \quad j \in \{0,\dots,n-1\}, k \in \{0,\dots,n-d-1\}, \\ s_{jk} = \sum_{\ell=k-d}^{n-1} a_{j\ell} c_{\ell k} + a'_{jn} c_{nk} \quad \text{si} \quad j \in \{0,\dots,n-1\}, k \in \{n-d,\dots,n\}. \end{cases}$$

De plus

$$(AC)_{nk} = \sum_{\ell=0}^{n-1} a'_{n\ell} c_{\ell k}, \quad k \in \{0,\dots,n-1\}, \quad \text{et} \quad a'_{nn} = 0,$$

donc

$$(AC)_{nk} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{\ell=k-d}^{n-1} c_{k\ell} \psi_\ell = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \psi'_k = 0 \quad \text{si} \quad k \in \{0,\dots,n-d-1\}, \\ s_{nk} = \sum_{\ell=k-d}^{n-1} a'_{n\ell} c_{\ell k} \quad \text{si} \quad k \in \{n-d,\dots,n\}. \end{cases}$$

Matriciellement, cela se traduit par

$$AC = \begin{pmatrix} I_{n-d} & E \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

avec

$$D = (s_{\ell k})_{n-d \le \ell, k \le n} \quad \text{et} \quad E = (s_{\ell k})_{0 \le \ell \le n-d-1, n-d \le k \le n}.$$

<u>Deuxièmement :</u> Le calcul de $(AC)^{-1}$. Comme AC est inversible, D l'est aussi. Un calcul par blocs donne

$$(AC)^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-d} & -ED^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} = I_{n+1} + \begin{pmatrix} 0 & -ED^{-1} \\ 0 & D^{-1} - I_{d+1} \end{pmatrix},$$

avec

$$D^{-1} - I_{d+1} = (t_{\ell k} - \delta_{\ell k})_{n-d \le k, \ell \le n},$$

qui, comme précédemment vaut

$$t_{\ell k} - \delta_{\ell k} = \sum_{m=n-d}^{n} (\delta_{\ell m} - s_{\ell m}) t_{mk}, \quad \ell, k \in \{n-d,\dots,n\}.$$

D'où

$$(AC)^{-1} = I_{n+1} + \begin{pmatrix} 0 & F \end{pmatrix}$$

avec

$$F = \left(\sum_{m=n-d}^{n} (\delta_{\ell m} - s_{\ell m}) t_{mk} \right)_{0 \le \ell \le n, n-d \le k \le n}.$$

<u>Troisièmement :</u> Le calcul de $B = A^{-1}$. On utilise l'identité $B = C\,(AC)^{-1}$ et le résultat de la deuxième étape. Il vient

$$B = C + C \begin{pmatrix} 0 & F \end{pmatrix},$$

et le même argument que dans la preuve précédente donne

$$B = C + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

avec $G = (g_{jk})_{n-d \le k, \ell \le n}$ antisymétrique et

$$g_{jk} = \sum_{m=0}^{n} c_{jm} \left(\sum_{\ell=n-d}^{n} (\delta_{m\ell} - s_{m\ell}) t_{\ell k} \right).$$

Quatrièmement : Une simplification de l'expression des g_{jk} pour $j,k \in \{n-d,\ldots,n\}$. On a

$$\begin{aligned}
g_{jk} &= \sum_{m=j-d}^{n} c_{jm} \left(\sum_{\ell=n-d}^{n} (\delta_{m\ell} - s_{m\ell}) t_{\ell k} \right) \\
&= \sum_{m=j-d}^{n-d-1} c_{jm} \left(\sum_{\ell=n-d}^{n} (\delta_{m\ell} - s_{m\ell}) t_{\ell k} \right) + \sum_{\ell,m=n-d}^{n} c_{jm} (\delta_{m\ell} - s_{m\ell}) t_{\ell k} \\
&= \sum_{m=j-d}^{n-d-1} c_{jm} \left(- \sum_{\ell=n-d}^{n} s_{m\ell} t_{\ell k} \right) + \sum_{m=n-d}^{n} c_{jm} (t_{mk} - \delta_{mk}) \\
&= -c_{jk} + \sum_{\ell=n-d}^{n} \left(c_{j\ell} - \sum_{m=j-d}^{n-d-1} c_{jm} s_{m\ell} \right) t_{\ell k}.
\end{aligned}$$

Cinquièmement : Le calcul de $D_n(\lambda,\mu)$. Il n'y a pas de différence avec le cas précédent, il vient

$$\begin{aligned}
D_n(\lambda,\mu) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial k_n}{\partial \lambda}(\lambda,\mu) - \frac{\partial k_n}{\partial \mu}(\lambda,\mu) \right) \mathrm{e}^{-n(V(\lambda)+V(\mu))} - G_n(\lambda,\mu) \\
&= -\frac{\partial K_n}{\partial \mu}(\lambda,\mu) + H_n(\lambda,\mu) - G_n(\lambda,\mu).
\end{aligned}$$

Sixièmement : Le calcul de $\alpha_n(\lambda)$. On a

$$\alpha_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{kn} \psi_k(\lambda),$$

avec

$$b_{kn} = -g_{nk} - c_{nk} = -\sum_{\ell=n-d}^{n-1} c_{n\ell} t_{\ell k}.$$

Preuve du théorème 3.3. —
Premièrement : Le calcul de AC. On a

$$(AC)_{jk} = \sum_{\ell=0}^{2n-1} a_{j\ell} c_{\ell k}, \quad j,k \in \{0,\ldots,2n-1\}.$$

Par le lemme 3.7, il vient

$$(AC)_{jk} = \begin{cases} \delta_{jk} \quad \text{si} \quad j \in \{0,\ldots,2n-d-1\}, k \in \{0,\ldots,2n-1\}, \\ \sum_{\ell=j-d}^{2n-1} a_{j\ell} c_{\ell k} = s_{jk} \quad \text{si} \quad j \in \{2n-d,\ldots,2n-1\}, k \in \{0,\ldots,2n-1\}. \end{cases}$$

Matriciellement, cela se traduit par

$$AC = \begin{pmatrix} I_{2n-d} & 0 \\ E & D \end{pmatrix},$$

avec

$$D = (s_{\ell k})_{2n-d \le \ell,k \le 2n-1} \quad \text{et} \quad E = (s_{\ell k})_{2n-d \le \ell \le 2n-1, 0 \le k \le 2n-d-1}.$$

Deuxièmement : Le calcul de $(AC)^{-1}$. Comme AC est inversible, D l'est aussi. Un calcul par blocs donne

$$(AC)^{-1} = \begin{pmatrix} I_{2n-d} & 0 \\ -D^{-1}E & D^{-1} \end{pmatrix} = I_{2n} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -D^{-1}E & D^{-1} - I_d \end{pmatrix},$$

avec

$$D^{-1} - I_d = (t_{\ell k} - \delta_{\ell k})_{2n-d \leq k,\ell \leq 2n-1},$$

qui, comme précédemment, vaut

$$t_{\ell k} - \delta_{\ell k} = \sum_{m=2n-d}^{2n-1} t_{\ell m}(\delta_{mk} - s_{mk}), \quad \ell,k \in \{2n-d, \ldots, 2n-1\}.$$

D'où

$$(AC)^{-1} = I_{2n} + \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix},$$

avec

$$F = \left(\sum_{m=2n-d}^{2n-1} t_{\ell m}(\delta_{mk} - s_{mk}) \right)_{2n-d \leq \ell \leq 2n-1, 0 \leq k \leq 2n-1}.$$

<u>Troisièmement :</u> Le calcul de $B = A^{-1}$. On utilise l'identité $B = C\,(AC)^{-1}$ et le résultat de la deuxième étape. Il vient

$$B = C + C \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix},$$

avec

$$C \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} = \left(\sum_{m=2n-d}^{2n-1} c_{jm} \left(\sum_{\ell=2n-d}^{2n-1} t_{m\ell}(\delta_{\ell k} - s_{\ell k}) \right) \right)_{0 \leq j,k \leq 2n-1}.$$

<u>Quatrièmement :</u> Le calcul de $D_n(\lambda,\mu)$. Considérons la matrice infinie $\widetilde{A} = (a_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}}$ et définissons une autre matrice infinie de même type, comme suit

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui nous permet de voir B comme une matrice infinie. Remarquons que pour la suite, tous les produits matriciels écrits ont un sens, car ils ne font intervenir que des sommes finies. On a

$$\begin{aligned} I_n(\lambda,\mu) &= {}^t(\psi_j(\lambda))_{j\in\mathbb{N}}\ \widetilde{B}\ (\psi_k(\mu))_{k\in\mathbb{N}}, \\ \frac{\partial}{\partial\mu}(\psi_k(\mu))_{k\in\mathbb{N}} &= -\widetilde{A}\ (\psi_k(\mu))_{k\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Or

$$D_n(\lambda,\mu) = -\frac{\partial^2 I_n}{\partial\lambda\partial\mu}(\lambda,\mu),$$

d'où

$$\begin{aligned} D_n(\lambda,\mu) &= -\,{}^t(\psi_j(\lambda))_{j\in\mathbb{N}}\ {}^t\widetilde{A}\ \widetilde{B}\ \widetilde{A}\ (\psi_k(\mu))_{k\in\mathbb{N}} \\ &= {}^t(\psi_j(\lambda))_{j\in\mathbb{N}}\ \widetilde{A}\ \widetilde{B}\ \widetilde{A}\ (\psi_k(\mu))_{k\in\mathbb{N}}, \end{aligned}$$

car $\widetilde{A}$ est antisymétrique. On doit donc calculer $\widetilde{A}\,\widetilde{B}\,\widetilde{A}$, ce qui est préférable, car cette matrice aura une forme proche de celle de $\widetilde{A}$, puisque $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont presque inverses l'une de l'autre. Et comme $\widetilde{A}$ a une forme multidiagonale avec d diagonales de chaque côté de la diagonale principale, (ce qui n'est pas le cas de C et donc de B) le calcul de $D_n(\lambda,\mu)$ sera proche de celui effectué dans le cas $\beta = 1$ et fournira directement une forme satisfaisante. On a

$$\widetilde{A}\,\widetilde{B} = \widetilde{A} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{2n} & 0 \\ \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$H=\left(\sum_{k=j-d}^{2n-1}a_{jk}b_{k\ell}\right)_{2n\leq j\leq 2n+d-1,0\leq \ell\leq 2n-1}.$$

D'où, compte tenu de l'antisymétrie

$$\widetilde{A}\,\widetilde{B}\,\widetilde{A}=\begin{pmatrix} I_{2n} & 0\\ \begin{pmatrix} H\\ 0\end{pmatrix} & 0\end{pmatrix}\widetilde{A}=\begin{pmatrix}\widehat{A} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\0&G&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

avec

$$\widehat{A}=(a_{jk})_{0\leq j,k\leq 2n+d-1}\quad \text{et}\quad G=(g_{jk})_{2n\leq j,k\leq 2n+d-1},$$

où

$$g_{jk}=-\sum_{\ell=j-d}^{2n-1}\sum_{m=k-d}^{2n-1}a_{j\ell}b_{\ell m}a_{mk}+a_{jk}.$$

Or

$$b_{\ell m}=c_{\ell m}+\sum_{p,q=2n-d}^{2n-1}c_{\ell p}t_{pq}(\delta_{qm}-s_{qm}),$$

d'où

$$\begin{aligned} g_{jk} &= a_{jk}-\sum_{\ell=j-d}^{2n-1}\sum_{m=k-d}^{2n-1}a_{j\ell}c_{\ell m}a_{mk}-\sum_{\ell=j-d}^{2n-1}\sum_{m=k-d}^{2n-1}\sum_{p,q=2n-d}^{2n-1}a_{j\ell}c_{\ell p}t_{pq}(\delta_{qm}-s_{qm})a_{mk}\\ &= a_{jk}-\sum_{m=k-d}^{2n-1}s_{jm}a_{mk}-\sum_{m=k-d}^{2n-1}\sum_{p,q=2n-d}^{2n-1}s_{jp}t_{pq}(\delta_{qm}-s_{qm})a_{mk}.\end{aligned}$$

Les calculs pour conclure sont alors similaires à ceux du cas $\beta=1$.

4 Application au cas du potentiel quartique

4.1 Introduction

Dans toute cette quatrième partie, on considère le cas où V est un polynôme pair de degré quatre. Pour le cas $\beta=4$, on note

$$V(\lambda)=\frac{t\lambda^2}{2}+\frac{g\lambda^4}{4},\quad \text{avec}\quad g>0\quad \text{et}\quad t<0,$$

et de plus, en posant $\omega_{\rm cr}=t^2/4g$, on suppose que $\omega_{\rm cr}>2$. Pour le cas $\beta=1$, on note

$$V(\lambda)=\frac{t\lambda^2}{4}+\frac{g\lambda^4}{8},\quad \text{avec}\quad g>0\quad \text{et}\quad t<0$$

et on suppose que $\omega_{\rm cr}>1$. Cette convention, nous permet de considérer la famille de polynômes orthogonaux par rapport au poids $\exp\left(-n\left(\frac{t\lambda^2}{2}+\frac{g\lambda^4}{4}\right)\right)$ indépendemment de β. Dans ce cas, des formules asymptotiques pour les fonctions orthonormales correspondantes sont données dans [2]. Ce sont ces formules que nous allons utiliser pour prouver quelques éléments du comportement asymptotique des matrices aléatoires étudiées dans ce travail. Définissons d'abord les coefficients R_j par la relation de récurrence entre polynômes orthogonaux

$$\lambda\pi_j(\lambda)=\pi_{j+1}(\lambda)+R_j\pi_{j-1}(\lambda).$$

Puis, rappelons les résultats de [2] utiles pour nous.

Proposition 4.1 [2]. — Les formules asymptotiques pour les fonctions orthonormales $\psi_j(\lambda)$ et les coefficients R_j sont prouvées pour $n,j \to +\infty$ de façon que $\omega = j/n$ vérifie les inégalités

$$\eta < \omega < \omega_{\text{cr}} - \eta,$$

pour un certain $\eta > 0$. Notons $\omega' = (j + \frac{1}{2})/n$ et définissons le polynôme

$$U_0(z) = z^2 \left(\frac{\left(gz^2 + t\right)^2}{4} - \omega' g \right)$$

et considérons ses deux zéros strictement positifs

$$z_1 = z_1(j) = \left(\frac{-t - 2\sqrt{\omega' g}}{g} \right)^{1/2} \quad \textit{et} \quad z_2 = z_2(j) = \left(\frac{-t + 2\sqrt{\omega' g}}{g} \right)^{1/2}.$$

Pour une certaine constante $C > 0$, on a

$$0 < C\sqrt{\eta} < z_1 < z_2.$$

Alors, il existe une constante $C(\eta) > 0$, telle que

$$\left| R_j - \frac{-t - (-1)^j \sqrt{t^2 - 4\omega g}}{2g} \right| \leq \frac{C(\eta)}{n}.$$

De plus, pour tout $\delta > 0$, on a, uniformément en λ dans un voisinage complexe de l'intervalle $(z_1 + \delta, z_2 - \delta)$,

$$\psi_j(\lambda) = \frac{2C_j\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\sin\phi}} \left(\cos\left(\frac{\left(j + \frac{1}{2}\right)}{2} \left(\frac{\sin 2\phi}{2} - \phi \right) + \frac{\pi - (-1)^j \chi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

avec

$$\phi = \arccos x, \quad \chi = \arccos y$$

et

$$x = \frac{g\lambda^2 + t}{2\sqrt{\omega' g}}, \quad y = \frac{2\sqrt{\omega' g} - tx}{2\sqrt{\omega' g}x - t} = \frac{-tg\lambda^2 - t^2 + 4\omega' g}{2\sqrt{\omega' g} g\lambda^2}.$$

Si $\lambda > z_2 + \delta$ ou $0 \leq \lambda < z_1 - \delta$, alors

$$\psi_j(\lambda) = (-1)^\sigma \frac{2C_j\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\sinh\phi}} \exp\left(-\frac{\left(j + \frac{1}{2}\right)}{2} \left(\frac{\sinh 2\phi}{2} - \phi \right) + \frac{(-1)^j \chi}{4} + O\left(\frac{1}{n\left(1 + |\lambda|\right)} \right) \right),$$

où

$$\sigma = \frac{1 - (2\varepsilon)(\lambda - z_1)}{2} \left[\frac{j}{2} \right], \quad \left[\frac{j}{2} \right] = \ell, \quad \text{si} \quad j = 2\ell, 2\ell + 1,$$

avec

$$\phi = \cosh^{-1}|x|, \quad \chi = \cosh^{-1}|y|.$$

Uniformément en λ appartenant à voisinage complexe de l'intervalle $(z_k - \delta, z_k + \delta)$, $k = 1,2$, on a

$$\psi_j(\lambda) = \frac{D_j\lambda}{\sqrt{\left|\varphi_j'(\lambda)\right|}} \left(\operatorname{Ai}\left(n^{2/3}\varphi_j(\lambda)\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

où $\mathrm{Ai}\,(z)$ est la fonction d'Airy, $\varphi_j\,(\lambda)$ est une fonction analytique sur $[z_k-\delta,z_k+\delta]$ telle que, pour $\left(\lambda-z_k^{(j)}\right)(-1)^k\geq 0$,

$$\varphi_j\,(\lambda)=\left(\frac{3}{2}\left|\int_{z_k^{(j)}}^{\lambda}\sqrt{U_j\,(v)}\mathrm{d}v\right|\right)^{2/3},\quad k=1{,}2,$$

où $z_k^{(j)}=z_k+O\,(1/n)$ est le zéro du polynôme $U_j\,(z)$ le plus proche de z_k, avec

$$U_j\,(z)=U_0\,(z)+\frac{1}{n}\left(\frac{t}{2}+gR_j\right).$$

Les facteurs constants sont donnés par

$$C_j=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{g}{\omega}\right)^{1/4}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

et

$$D_j=(-1)^{\sigma_0}\,n^{1/6}\sqrt{g}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),\quad \sigma_0=(2-k)\left[\frac{j}{2}\right].$$

4.2 Lemmes préliminaires

Premièrement : le cas $\beta=1$.
Comme nous allons utiliser les formules asymptotiques pour j proche de n, nous supposons que $\omega_{\mathrm{cr}}>1$, de plus, on définit le paramètre

$$u=\frac{2\sqrt{g}}{-t}=\frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathrm{cr}}}}\in\,]0{,}1[\,.$$

Lemme 4.1. — *On a*

$$\begin{aligned} c_{j,j-1} &= \frac{n}{2}\sqrt{R_j}\,(t+g\,(R_{j-1}+R_j+R_{j+1}))\,,\\ c_{j,j-3} &= \frac{n}{2}g\sqrt{R_{j-2}R_{j-1}R_j}, \end{aligned}$$

$c_{jk}=0$ *si* $k\notin\{j-1,j-3,j+1,j+3\}$ *et* $c_{jk}=-c_{kj}$. *De plus, on a, pour* p *fixé dans* $\mathbb{Z}$ *et* $n\to+\infty$,

$$\begin{aligned} c_{n+p,n+p-1} &= \frac{n}{4}\sqrt{-t}\left(\sqrt{1+u}+(-1)^{n+p}\sqrt{1-u}\right)+O\,(1)\,,\\ c_{n+p,n+p-3} &= \frac{n}{4}\sqrt{-t}\left(\sqrt{1+u}-(-1)^{n+p}\sqrt{1-u}\right)+O\,(1)\,. \end{aligned}$$

Lemme 4.2. — *On a, pour* $n\to+\infty$,

$$a'_{n,n+s}=\frac{1}{\sqrt{2n}}\frac{1}{(-t)^{1/4}}\left(\frac{(-1)^{\left[\frac{n+s}{2}\right]}}{(1-u)^{1/4}}+\frac{1}{(1+u)^{1/4}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right),$$

où s *est fixé dans* $\mathbb{Z}$, *tel que* $n+s$ *soit pair, sinon* $a'_{n+s,n}=0$.

Lemme 4.3. — *On a, pour* s *fixé dans* $\mathbb{Z}$ *et* $n\to+\infty$,

$$\|\psi_{n+s}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=O(1)$$

et

$$\|\varepsilon\star\psi_{n+s}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=O(1/\sqrt{n}).$$

Lemme 4.4. — *On a, pour $n \to +\infty$,*

$$a_{n+p,n+q} = \frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\sqrt{1+u}}{1+u\cos v}\frac{\sin(q-p)v/2}{\sin v/2} - (-1)^{n+p}\frac{\sqrt{1-u}}{1+u\cos v}\frac{\cos(q-p)v/2}{\cos v/2}\right)\mathrm{d}v$$
$$+\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{(-1)^{n+p}}{2}\left(\frac{(-1)^{\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)}}{(1-u)^{1/2}} + \frac{1}{(1+u)^{1/2}}\right) + \frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{(-1)^{n+p}\,(-1)^{\left[\frac{n+s}{2}\right]}}{(1-u^2)^{1/4}} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right),$$

où

$$s = p \quad si \quad n+p \quad est\ pair\ et \quad s = q \quad si \quad n+q \quad est\ pair$$

et avec p,q fixés dans $\mathbb{Z}$, de parité distinctes (sinon $a_{n+p,n+q} = 0$) .

Deuxièmement : le cas $\beta = 4$.
Dans ce cas, nous utilisons les formules asymptotiques pour j proche de $2n$, nous supposons donc que $\omega_{\mathrm{cr}} > 2$, ainsi

$$u = \frac{2\sqrt{g}}{-t} = \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathrm{cr}}}} \in \left]0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[.$$

Lemme 4.5. — *On a*

$$\begin{aligned} a_{j,j-1} &= -\frac{n}{2}\sqrt{R_j}\left(t + g\left(R_{j-1}+R_j+R_{j+1}\right)\right), \\ a_{j,j-3} &= -\frac{n}{2}g\sqrt{R_{j-2}R_{j-1}R_j}, \end{aligned}$$

$a_{jk} = 0$ si $k \notin \{j-1,j-3,j+1,j+3\}$ et $a_{jk} = -a_{kj}$. De plus, on a, pour p fixé dans $\mathbb{Z}$ et $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned} a_{2n+p,2n+p-1} &= -\frac{n}{4}\sqrt{-2t}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}u} + (-1)^{2n+p}\sqrt{1-\sqrt{2}u}\right) + O(1), \\ a_{2n+p,2n+p-3} &= -\frac{n}{4}\sqrt{-2t}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}u} - (-1)^{2n+p}\sqrt{1-\sqrt{2}u}\right) + O(1). \end{aligned}$$

Lemme 4.6. — *On a, pour s fixé dans $\mathbb{Z}$ et $n \to +\infty$,*

$$\|\psi_{2n+s}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = O(1)$$

et

$$\|\varepsilon \star \psi_{2n+s}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = O(1/\sqrt{n}).$$

Lemme 4.7. — *On a, pour $n \to +\infty$,*

$$\begin{aligned} &c_{2n+p,2n+q} \\ = \;& \frac{1}{n\sqrt{-2t}}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}u}}{1+\sqrt{2}u\cos v}\frac{\sin(p-q)v/2}{\sin v/2} + (-1)^{2n+p}\frac{\sqrt{1-\sqrt{2}u}}{1+\sqrt{2}u\cos v}\frac{\cos(q-p)v/2}{\cos v/2}\right)\mathrm{d}v \\ - \;& \frac{1}{n\sqrt{-2t}}\frac{(-1)^{n+p}}{2}\left(\frac{(-1)^{\left(\left[\frac{2n+p}{2}\right]+\left[\frac{2n+q}{2}\right]\right)}}{(1-\sqrt{2}u)^{1/2}} + \frac{1}{(1+\sqrt{2}u)^{1/2}}\right) \\ - \;& \frac{1}{n\sqrt{-2t}}\frac{(-1)^{2n+p}\,(-1)^{\left[\frac{2n+s}{2}\right]}}{(1-2u^2)^{1/4}} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right), \end{aligned}$$

où

$$s = p \quad si \quad 2n+p \quad est\ pair\ et \quad s = q \quad si \quad 2n+q \quad est\ pair$$

et avec p,q fixés dans $\mathbb{Z}$, de parité distinctes (sinon $c_{2n+p,2n+q} = 0$) .

4.3 Preuves des lemmes préliminaires

Preuve du lemme 4.1. — On a

$$\pi_j'(\lambda) = n\left(\left(t + g\left(R_{j-1} + R_j + R_{j+1}\right)\right)\pi_{j-1}(\lambda) + g\sqrt{R_{j-2}R_{j-1}R_j}\,\pi_{j-3}(\lambda)\right)$$

et, d'après le lemme 3.1,

$$\pi_j'(\lambda) = 2c_{j,j-1}\pi_{j-1}(\lambda) + 2c_{j,j-3}\pi_{j-3}(\lambda),$$

d'où

$$\begin{aligned} c_{j,j-1} &= \frac{n}{2}\sqrt{R_j}\left(t + g\left(R_{j-1} + R_j + R_{j+1}\right)\right), \\ c_{j,j-3} &= \frac{n}{2}g\sqrt{R_{j-2}R_{j-1}R_j}. \end{aligned}$$

De plus, d'après la proposition 4.1, on a

$$R_j = \frac{-t - (-1)^j\sqrt{t^2 - 4\omega g}}{2g} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} R_{n+p} &= \frac{-t}{2g}\left(1 - (-1)^{n+p}\sqrt{1-u^2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{2}{-tu^2}\left(1 - (-1)^{n+p}\sqrt{1-u^2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} c_{n+p,n+p-1} &= \frac{n}{2}\left(t + \frac{-t}{2}\left(3 - \sqrt{1-u^2}\left((-1)^{n+p-1} + (-1)^{n+p} + (-1)^{n+p+1}\right)\right)\right) \\ &\quad\times\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-tu}}\right)\sqrt{1 - (-1)^{n+p}\sqrt{1-u^2}} + O(1) \\ &= \frac{n\sqrt{-t}}{2\sqrt{2}u}\left(1 + (-1)^{n+p}\sqrt{1-u^2}\right)\sqrt{1 - (-1)^{n+p}\sqrt{1-u^2}} + O(1) \\ &= \frac{n}{2}\sqrt{\frac{-t}{2}}\frac{u}{\sqrt{1 - (-1)^{n+p}\sqrt{1-u^2}}} + O(1) \\ &= \frac{n}{2}\sqrt{-t}\frac{u}{\sqrt{1+u} - (-1)^{n+p}\sqrt{1-u}} + O(1) \\ &= \frac{n}{4}\sqrt{-t}\left(\sqrt{1+u} + (-1)^{n+p}\sqrt{1-u}\right) + O(1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{n+p,n+p-3} &= \frac{n}{2}\left(\frac{u^2t^2}{4}\right)\left(\frac{2}{-tu^2}\right)^{3/2}\left(1 - (-1)^{n+p-2}\sqrt{1-u^2}\right)^{1/2} \\ &\quad\times\left(\left(1 - (-1)^{n+p-1}\sqrt{1-u^2}\right)\left(1 - (-1)^{n+p}\sqrt{1-u^2}\right)\right)^{1/2} + O(1) \\ &= \frac{n\sqrt{-t}}{2\sqrt{2}u}\left(1 - (-1)^{n+p}\sqrt{1-u^2}\right)\sqrt{1 - (-1)^{n+p-1}\sqrt{1-u^2}} + O(1) \\ &= \frac{n}{2}\sqrt{\frac{-t}{2}}\frac{u}{\sqrt{1 + (-1)^{n+p}\sqrt{1-u^2}}} + O(1) \\ &= \frac{n}{2}\sqrt{-t}\frac{u}{\sqrt{1+u} + (-1)^{n+p}\sqrt{1-u}} + O(1) \\ &= \frac{n}{4}\sqrt{-t}\left(\sqrt{1+u} - (-1)^{n+p}\sqrt{1-u}\right) + O(1). \end{aligned}$$

PREUVE DU LEMME 4.2. — Par définition, on a

$$a'_{n,n+s} = \int_{\mathbb{R}} \psi_{n+s}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \tag{4.1}$$

en supposant $n+s$ pair, sinon le coefficient vaut zéro par imparité de ψ_{n+s}. De plus, à la limite $n \to +\infty$, on a

$$\omega = \omega(n+s) = 1 + O(1/n) \quad \text{et} \quad \omega' = \omega'(n+s) = 1 + O(1/n).$$

Ainsi, posons

$$z_k(n+s) = Z_k + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{avec} \quad Z_k = \left(\frac{-t + (-1)^k 2\sqrt{g}}{g}\right)^{1/2}, \quad k = 1{,}2.$$

Alors, pour $\delta > 0$ convenablement fixé, le comportement asymptotique de ψ_{n+s} pour $n \to +\infty$ sur $(0,+\infty)$ est déterminé dans les trois domaines

$$(0,Z_1-\delta) \cup (Z_2+\delta,+\infty), \quad (Z_1-\delta,Z_1+\delta) \cup (Z_2-\delta,Z_2+\delta) \quad et \quad (Z_1+\delta,Z_2-\delta)$$

par les résultats de la proposition 4.1. On découpe l'intégrale (4.1) en trois

$$a'_{n,n+s} = I_1 + I_2 + I_3,$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{(0,Z_1-\delta)\cup(Z_2+\delta,+\infty)} \psi_{n+s}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \\ I_2 &= \int_{(Z_1-\delta,Z_1+\delta)\cup(Z_2-\delta,Z_2+\delta)} \psi_{n+s}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \\ I_3 &= \int_{(Z_1+\delta,Z_2-\delta)} \psi_{n+s}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda. \end{aligned}$$

Nous allons étudier les contributions de ces différentes intégrales grâce aux formules asymptotiques de la proposition 4.1. Pour cela dans un premier temps, nous allons étudier ces formules asymptotiques. Comme nous utiliserons cette étude pour les preuves des autres lemmes, nous étudions tout de suite avec la précision qui sera nécéssaire.

(a) Étude de I_1.

En fait, nous allons donner un majorant de

$$\int_{(0,Z_1-\delta)\cup(Z_2+\delta,+\infty)} |\psi_{n+s}(\lambda)|\,\mathrm{d}\lambda$$

qui montrera que I_1 est négligeable par rapport aux autres intégrales. Les fonctions $\lambda \mapsto \phi \circ x(\lambda)$ et $\lambda \mapsto \chi \circ y(\lambda)$ sont décroissantes sur $(0,z_1)$ et croissantes sur $(z_2,+\infty)$, de plus

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda \leq z_1 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{\omega_{cr}}{\omega'}} \leq x \leq -1 \Leftrightarrow 0 \leq \phi \leq \cosh^{-1}\sqrt{\frac{\omega_{cr}}{\omega'}}, \\ z_2 &\leq \lambda < +\infty \Leftrightarrow 1 \leq x < +\infty \Leftrightarrow 0 \leq \phi < +\infty \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda \leq z_1 \Leftrightarrow -\infty < y \leq -1 \Leftrightarrow 0 \leq \chi < +\infty, \\ z_2 &\leq \lambda < +\infty \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \sqrt{\frac{\omega_{cr}}{\omega'}} \Leftrightarrow 0 \leq \chi \leq \cosh^{-1}\sqrt{\frac{\omega_{cr}}{\omega'}}, \end{aligned}$$

donc, pour $\lambda \in (0,Z_1-\delta) \cup (Z_2+\delta,+\infty)$, on a $\phi,\chi \geq C(\delta) > 0$. Et, de plus

$$\begin{aligned}\Gamma(\phi) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh 2\phi}{2} - \phi\right), \\ \Gamma'(\phi) &= \frac{1}{2}(\cosh 2\phi - 1) > 0, \quad \text{pour} \quad \phi > 0.\end{aligned}$$

On a

$$|\psi_{n+s}(\lambda)| = 2C_{n+s}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\sinh\phi}}\exp\left(-(n+s)\Gamma(\phi) + \frac{(-1)^{n+s}}{4}\chi + O\left(\frac{1}{n(1+|\lambda|)}\right)\right).$$

Comme

$$\lambda = O\left(\sqrt{\cosh\phi}\right) = O\left(\exp(\phi/2)\right) \quad \text{et} \quad \sinh\phi \sim \frac{1}{2}\exp(\phi/2),$$

il vient

$$2C_{n+s}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\sinh\phi}} = O\left(\exp(-\phi/4)\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\lambda = O\left(\lambda^{-1}\right)\sinh\phi\,\mathrm{d}\phi = O\left(\exp(\phi/2)\right)\mathrm{d}\phi,$$

donc

$$2C_{n+s}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\sinh\phi}}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\phi}$$

est borné sur $(0,Z_1-\delta)$ et majoré sur $(Z_2+\delta,+\infty)$ par une fonction $O\left(\exp(\phi/4)\right)$. De plus, il est facile de voir que

$$\exp\left(O\left(\frac{1}{n(1+|\lambda|)}\right)\right)$$

est aussi borné sur $(0,Z_1-\delta) \cup (Z_2+\delta,+\infty)$. Le terme

$$\exp\left(\frac{(-1)^{n+s}}{4}\chi\right)$$

est aussi borné sur $(Z_2+\delta,+\infty)$ (car χ est borné sur cet intervalle) et majoré par une fonction intégrable sur $(0,Z_1-\delta)$. En effet, on a

$$\chi = \cosh^{-1}|y| = \log\left(-y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

car $-y < 1$ dans le domaine considéré. Le problème se pose pour λ proche de zéro dans $(0,Z_1-\delta)$. Or, on a

$$y = \frac{x + u\sqrt{\omega'}}{1 + u\sqrt{\omega'}x} < -1$$

avec $-1/\left(u\sqrt{\omega'}\right) < x < -1$, donc il vient

$$\chi = -\log\left(1 + u\sqrt{\omega'}x\right) + O(1).$$

Ainsi

$$\exp\left(\frac{(-1)^{n+s}}{4}\chi\right) = O\left(\left(1+u\sqrt{\omega'}x\right)^{\pm 1/4}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\lambda = O\left(\left(1+u\sqrt{\omega'}x\right)^{-1/2}\right)\mathrm{d}x,$$

d'où le résultat. En conclusion, on obtient

$$\int_0^{Z_1-\delta} |\psi_{n+s}| = O\left(\exp\left(-(n+s)\Gamma(\phi(Z_1-\delta))\right)\right)$$

et

$$\int_{Z_2+\delta}^{+\infty} |\psi_{n+s}| \leq O\left(\exp\left(-(n+s)\Gamma(\phi(Z_2+\delta))/2\right)\right).$$

(b) Étude de I_2.

Par définition

$$I_2 = \int_{(Z_1-\delta,Z_1+\delta)\cup(Z_2-\delta,Z_2+\delta)} \psi_{n+s}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.$$

On étudie les variables. On a

$$U_0(z) = \frac{1}{4}g^2z^2(z^2-z_1^2)(z^2-z_2^2) \quad \text{avec} \quad z_k = z_k(j) \quad \text{et} \quad j = n+s,$$

d'où

$$U_j(z) = \frac{1}{4}g^2(z^2-(z_0^{(j)})^2)(z^2-(z_1^{(j)})^2)(z^2-(z_2^{(j)})^2),$$

où $z_0^{(j)} > 0$ est le zéro (qui peut être complexe) pertubé du zéro double de $U_0(z)$ en 0, de plus $z_0^{(n+s)} = O(n^{-1/2})$ et $z_k^{(n+s)} = Z_k + O(n^{-1})$, en effet, si on voit $U_j(z)$ comme une fonction de z^2, alors, les racines sont simples et l'application du théorème des fonctions implicites donne l'existence des développements asymptotiques de ces racines. On a, avec $(k,k') = (1,2)$ ou $(2,1)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\varphi_j(\lambda) &= \left(\frac{3}{2}(-1)^k\int_{z_k^{(j)}}^{\lambda}\frac{1}{2}g\sqrt{(x^2-(z_0^{(j)})^2)(x^2-(z_k^{(j)})^2)(x^2-(z_{k'}^{(j)})^2)}\mathrm{d}x\right)^{2/3},\\ &= \left((-1)^k\int_{z_k^{(j)}}^{\lambda}\sqrt{(-1)^k(x-z_k^{(j)})}f_j(x)\mathrm{d}x\right)^{2/3},\end{aligned}$$

où

$$f_j(x) = \frac{3}{4}g\sqrt{(-1)^k(x^2-(z_0^{(j)})^2)(x+z_k^{(j)})(x^2-(z_{k'}^{(j)})^2)}.$$

Donc

$$\varphi_j(\lambda) = (-1)^k(\lambda-z_k^{(j)})\left(\int_0^1\sqrt{y}f_j(z_k^{(j)}+(\lambda-z_k^{(j)})y)\mathrm{d}y\right)^{2/3}.$$

Comme f_j est analytique sur un voisinage de $(Z_k-\delta,Z_k+\delta)$, φ_j est aussi analytique sur un voisinage de $(Z_k-\delta,Z_k+\delta)$. De plus, il est facile de voir que

$$f_{n+s}(x) = f(x) + O(n^{-1})$$

uniformément en x appartenant à un voisinage de $(Z_k-\delta,Z_k+\delta)$, où

$$f(x) = \frac{3}{4}gx\sqrt{(-1)^k(x+Z_k)(x^2-Z_{k'}^2)} \geq c > 0,$$

sur ce voisinage. Donc

$$\varphi_{n+s}(\lambda) = \Phi(\lambda) + O(n^{-1})$$

uniformément en $\lambda \in (Z_k-\delta,Z_k+\delta)$, où

$$\Phi(\lambda) = (-1)^k(\lambda-Z_k)\left(\int_0^1\sqrt{y}f(Z_k+(\lambda-Z_k)y)\mathrm{d}y\right)^{2/3}.$$

De même, on prouve facilement que

$$\varphi'_{n+s}(\lambda) = \Phi'(\lambda) + O(n^{-1}).$$

Le calcul donne

$$\begin{aligned}\Phi'(Z_k) &= (-1)^k\left(\int_0^1\sqrt{y}f(Z_k)\mathrm{d}y\right)^{2/3}\\ &= (-1)^k\left(\frac{2}{3}\frac{3}{4}gZ_k\sqrt{(-1)^k2Z_k(Z_k^2-Z_{k'}^2)}\right)^{2/3}\\ &= (-1)^k\left(\frac{1}{2}gZ_k\sqrt{2Z_k(Z_2^2-Z_1^2)}\right)^{2/3} \neq 0.\end{aligned}$$

Donc φ_{n+s} et Φ sont des difféomorphismes analytiques au voisinage de Z_k. Et on a

$$\varphi_{n+s}^{-1}(\mu) = \Phi^{-1}(\mu) + O(n^{-1})$$

uniformément en μ appartenant à un voisinage de zéro. Ainsi, on a

$$I_2 = \int_{Z_k-\delta}^{Z_k+\delta} \frac{D_{n+s}\lambda}{\sqrt{|\varphi'_{n+s}(\lambda)|}} \left(\mathrm{Ai}(n^{2/3}\varphi_{n+s}(\lambda)) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \mathrm{d}\lambda,$$

soit encore, la fonction d'Airy étant bornée sur l'axe réel et avec $\sigma_0 = (2-k)\left[\frac{n+s}{2}\right]$,

$$\begin{aligned}
I_2 &= (-1)^{\sigma_0} n^{1/6}\sqrt{g}\left(\int_{Z_k-\delta}^{Z_k+\delta} \frac{\lambda}{\sqrt{|\varphi'_{n+s}(\lambda)|}} \mathrm{Ai}(n^{2/3}\varphi_{n+s}(\lambda))\mathrm{d}\lambda + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\
&= (-1)^{\sigma_0} n^{1/6}\sqrt{g}\left(\int_{\varphi_{n+s}(Z_k-\delta)}^{\varphi_{n+s}(Z_k+\delta)} \frac{\varphi_{n+s}^{-1}(z)}{\sqrt{|\varphi'_{n+s}\circ\varphi_{n+s}^{-1}(z)|\varphi'_{n+s}\circ\varphi_{n+s}^{-1}(z)}} \mathrm{Ai}(n^{2/3}z)\mathrm{d}z + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= (-1)^{\sigma_0} n^{1/6}\sqrt{g}\left(\int_{\Phi(Z_k-\delta)}^{\Phi(Z_k+\delta)} \frac{\Phi^{-1}(z)}{\sqrt{|\Phi'\circ\Phi^{-1}(z)|\Phi'\circ\Phi^{-1}(z)}} \mathrm{Ai}(n^{2/3}z)\mathrm{d}z + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),
\end{aligned}$$

où $\Phi(Z_k \pm \delta) \neq 0$ du signe de $\pm(-1)^k$. L'intégrale qui apparait est de la forme

$$\int_0^a g(z)\mathrm{Ai}(sz)\mathrm{d}z, \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \quad \text{et} \quad s \to +\infty,$$

où g est une fonction analytique sur un voisinage de l'intervalle $(-|a|,|a|)$, avec $g(0) \neq 0$. Or, d'après les propriétés de la fonction d'Airy fournit dans [1] et les résultats d'analyse asymptotique de [3], on a

$$\begin{aligned}
\int_0^a g(z)\mathrm{Ai}(sz)\mathrm{d}z &= \frac{1}{3}\frac{g(0)}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right), \quad \text{si} \quad a > 0, \\
\int_0^a g(z)\mathrm{Ai}(sz)\mathrm{d}z &= -\frac{2}{3}\frac{g(0)}{s} + O\left(\frac{1}{s^{7/4}}\right), \quad \text{si} \quad a < 0.
\end{aligned}$$

Ici

$$g(0) = \frac{(-1)^{\sigma_0}\sqrt{g}Z_k}{\sqrt{|\Phi'(Z_k)|\Phi'(Z_k)}} = \frac{2\,(-1)^{\sigma_0+k}}{\sqrt{g}\sqrt{2Z_k(Z_2^2-Z_1^2)}},$$

or

$$Z_k = \left(\frac{-t+(-1)^k\,2\sqrt{g}}{g}\right)^{1/2} = \left(\frac{-t\left(1+(-1)^k\,u\right)}{g}\right)^{1/2} = \frac{2\sqrt{1+(-1)^k\,u}}{u\sqrt{-t}},$$

d'où

$$\frac{2}{\sqrt{g}\sqrt{2Z_k(Z_2^2-Z_1^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}(-t)^{1/4}(1+(-1)^k\,u)^{1/4}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{Z_1+\delta} \psi_{n+s}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda &= \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(-1)^{\left[\frac{n+s}{2}\right]}}{\sqrt{2}(-t)^{1/4}(1-u)^{1/4}} + O\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right), \\
\int_0^{Z_2+\delta} \psi_{n+s}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda &= \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2}(-t)^{1/4}(1+u)^{1/4}} + O\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right), \\
\int_{Z_1-\delta}^0 \psi_{n+s}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda &= \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(-1)^{\left[\frac{n+s}{2}\right]}}{\sqrt{2}(-t)^{1/4}(1-u)^{1/4}} + O\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right), \\
\int_{Z_2-\delta}^0 \psi_{n+s}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda &= \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2}(-t)^{1/4}(1+u)^{1/4}} + O\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi
$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{(-1)^{\left[\frac{n+s}{2}\right]}}{\sqrt{2}(-t)^{1/4}(1-u)^{1/4}} + \frac{1}{\sqrt{2}(-t)^{1/4}(1+u)^{1/4}} \right) + O\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right).$$

(c) Étude de I_3.

On étudie les variables pour $z \in (z_1, z_2)$. On a
$$x_{n+s}(z) = \frac{gz^2 + t}{2\sqrt{\omega' g}}, \quad \text{avec} \quad \omega' = 1 + O(1/n),$$
d'où, uniformément en z appartenant à un voisinage de $(Z_1 + \delta, Z_2 - \delta)$,
$$x_{n+s}(z) = X(z) + O(1/n), \quad \text{avec} \quad X(z) = \frac{gz^2 + t}{2\sqrt{g}}$$
et
$$\frac{\mathrm{d}x_{n+s}(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{gz}{\sqrt{\omega' g}} > 0.$$
Notons que
$$\begin{aligned} z &= z_1 \Longleftrightarrow x = -1 \Longleftrightarrow \phi = \pi \Longleftrightarrow \Gamma = -\pi/2, \\ z &= z_2 \Longleftrightarrow x = 1 \Longleftrightarrow \phi = 0 \Longleftrightarrow \Gamma = 0. \end{aligned}$$
On a
$$\phi(x) = \arccos x \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0 \quad \text{pour} \quad x \in (-1,1)$$
et
$$\Gamma(\phi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2\phi}{2} - \phi\right) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\Gamma(\phi)}{\mathrm{d}\phi} = \frac{1}{2}(\cos 2\phi - 1) = -\sin^2\phi < 0 \quad \text{pour} \quad \phi \in (0,\pi).$$
Les fonctions x_{n+s}, ϕ et Γ sont régulières et inversibles sur les intervalles ouverts considérés, de plus
$$\mathrm{d}z = \frac{1}{\sin\Gamma^{-1}(\zeta)} \frac{\sqrt{\omega'}}{\sqrt{g}(x_{n+s}^{-1} \circ \phi^{-1} \circ \Gamma^{-1})(\zeta)} \mathrm{d}\zeta \quad \text{avec} \quad \zeta = (\Gamma \circ \phi \circ x_{n+s})(z).$$
On a
$$\begin{aligned} y_{n+s}(z) &= \frac{2\sqrt{\omega' g} - t x_{n+s}(z)}{2\sqrt{\omega' g} x_{n+s}(z) - t}, \\ \frac{\mathrm{d}y_{n+s}}{\mathrm{d}x_{n+s}} &= \frac{t^2 - 4\omega' g}{\left(2\sqrt{\omega' g} x_{n+s} - t\right)^2} = \frac{\omega_{\mathrm{cr}} - \omega'}{\left(\sqrt{\omega'} x_{n+s} - \sqrt{\omega_{\mathrm{cr}}}\right)^2} > 0 \end{aligned}$$
et uniformément en z appartenant à un voisinage de $(Z_1 + \delta, Z_2 - \delta)$,
$$y_{n+s}(z) = Y(z) + O(1/n), \quad \text{avec} \quad Y(z) = \frac{2\sqrt{g} - tX(z)}{2\sqrt{g}X(z) - t}.$$
De plus
$$\chi(y) = \arccos y \quad \text{avec} \quad \frac{\mathrm{d}\chi(y)}{\mathrm{d}y} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} < 0 \quad \text{pour} \quad y \in (-1,1)$$
et
$$\begin{aligned} z &= z_1 \Longleftrightarrow x = -1 \Longleftrightarrow y = -1 \Longleftrightarrow \chi = \pi, \\ z &= z_2 \Longleftrightarrow x = 1 \Longleftrightarrow y = 1 \Longleftrightarrow \chi = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, avec

$$C_{n+s} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} g^{1/4} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

on a

$$\begin{aligned}
& \psi_{n+s}(z)\,\mathrm{d}z \\
= \; & \frac{2C_{n+s}\sqrt{z}}{\sqrt{\sin\phi\circ x_{n+s}(z)}} \\
& \times \left(\cos\left(\left(n+s+\frac{1}{2}\right)(\Gamma\circ\phi\circ x_{n+s})(z) + \frac{\pi - (-1)^{n+s}(\chi\circ y_{n+s}\circ x_{n+s})(z)}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\mathrm{d}z \\
= \; & \frac{2C_{n+s}\sqrt{(x_{n+s}^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\zeta)}}{\sqrt{\sin\Gamma^{-1}(\zeta)}} \\
& \times \left(\cos\left(\left(n+s+\frac{1}{2}\right)\zeta + \frac{\pi - (-1)^{n+s}(\chi\circ y_{n+s}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\zeta)}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
& \times \frac{1}{\sin\Gamma^{-1}(\zeta)} \frac{\sqrt{\omega'}}{\sqrt{g}(x_{n+s}^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\zeta)}\mathrm{d}\zeta \\
= \; & \left(\frac{1}{g^{1/4}\sqrt{\pi}\sqrt{(X^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\zeta)\sin^3\Gamma^{-1}(\zeta)}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
& \times \left(\cos\left(\left(n+s+\frac{1}{2}\right)\zeta + \frac{\pi - (-1)^{n+s}(\chi\circ Y\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\zeta)}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\mathrm{d}\zeta.
\end{aligned}$$

D'où, l'on déduit par intégration par parties, que

$$I_3 = \int_{(Z_1+\delta, Z_2-\delta)} \psi_{n+s}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

(d) En conclusion, on voit que seule l'intégrale I_2 contribue à la partie principale de $a'_{n,n+s}$ et donne le résultat.

Preuve du lemme 4.3. — Les preuves découlent de l'analyse des formules asymptotiques fait dans la preuve du lemme 4.2.

Preuve du lemme 4.4. — Par définition, on a

$$a_{jk} = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\lambda \left(\int_{-\infty}^{\lambda} \psi_j(\mu)\,\mathrm{d}\mu - \int_{\lambda}^{+\infty} \psi_j(\mu)\,\mathrm{d}\mu\right)\psi_k(\lambda)\right).$$

Comme $a_{jk} = 0$, si j et k ont même parité et que a_{jk} est antisymétrique, on peut supposer que j est pair et k est impair. Alors, comme la parité d'une fonction orthonormale est identique à celle de son indice, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\lambda}\psi_j(\mu)\,\mathrm{d}\mu - \int_{\lambda}^{+\infty}\psi_j(\mu)\,\mathrm{d}\mu\right) &= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\lambda}\psi_j(\mu)\,\mathrm{d}\mu + \int_{-\lambda}^{-\infty}\psi_j(\mu)\,\mathrm{d}\mu\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\lambda}^{\lambda}\psi_j(\mu)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_0^{\lambda}\psi_j(\mu)\,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

puis, $\lambda \mapsto \int_0^\lambda \psi_j(\mu)\,\mathrm{d}\mu$ et $\lambda \mapsto \psi_k(\lambda)$ sont impaires, d'où

$$a_{jk} = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_0^\lambda \mathrm{d}\mu \psi_j(\mu)\,\psi_k(\lambda)\,. \tag{4.2}$$

Nous cherchons l'équivalent de $a_{n+p,n+q}$ avec p,q deux entiers indépendants de n, et on suppose $n+p$ pair et $n+q$ impair. Compte tenu de la façon dont les formules asymptotiques sont données, on fixe $\delta > 0$ et nous emploierons la méthode suivante, qui consiste à découper en trois le support de (4.2) pour cela, on commence par définir les bornes limites qui permetteront de définir les domaines où nous utiliserons les formules asymptotiques.

(a) On calcule l'équivalent de

$$I_1 = \int_{Z_1+\delta}^{Z_2-\delta} \mathrm{d}\lambda \int_{Z_1+\delta}^{\lambda} \mathrm{d}\mu \psi_{n+p}(\mu)\,\psi_{n+q}(\lambda)$$

et on montre que l'expression de la partie principale (donc sans le reste $o_\delta(1/n)$) admet une limite finie lorsque $\delta \to 0$.

(b) On suit la même procédure qu'en (a) pour

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(\int_{Z_1-\delta}^{Z_1+\delta} \mathrm{d}\lambda \int_{Z_1-\delta}^{\lambda} \mathrm{d}\mu + \int_{Z_2-\delta}^{Z_2+\delta} \mathrm{d}\lambda \int_{Z_2-\delta}^{\lambda} \mathrm{d}\mu \right.\\ &+ \left.\int_{Z_1+\delta}^{z_2+\delta} \mathrm{d}\lambda \int_{Z_1-\delta}^{Z_1+\delta} \mathrm{d}\mu + \int_{Z_2-\delta}^{Z_2+\delta} \mathrm{d}\lambda \int_{Z_1+\delta}^{Z_2-\delta} \mathrm{d}\mu\right) \psi_{n+p}(\mu)\,\psi_{n+q}(\lambda)\,. \end{aligned}$$

(c) On montre que l'intégrale I_3 correspondant à l'intégrale sur la partie restante du support (non prise en compte dans les intégrales I_1 et I_2) de (4.2) est négligeable devant les deux autres intégrales I_1 et I_2.

(d) On peut alors conclure. En effet, les résultats de (a), (b) et (c) montrent que $a_{n+p,n+q}$ admet un équivalent, or, celui-ci ne dépend pas de δ, on peut donc prendre la limite $\delta \to 0$ dans la somme des parties principales calculées en (a) et (b) pour obtenir une expression finale plus simple.

(a) Étude de I_1.

On a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma\circ\phi\circ x_{n+q}(Z_1+\delta)}^{\Gamma\circ\phi\circ x_{n+q}(Z_2-\delta)} \mathrm{d}\zeta \int_{\Gamma\circ\phi\circ x_{n+p}(Z_1+\delta)}^{\Gamma\circ\phi\circ x_{n+p}\circ x_{n+q}^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1}(\zeta)} \mathrm{d}\xi \\ &\times \frac{2C_{n+q}\sqrt{\omega'(n+q)}}{\sqrt{g}\sqrt{(x_{n+q}^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\zeta)\sin^3\Gamma^{-1}(\zeta)}} \\ &\times \left(\cos\left(\left(n+q+\frac{1}{2}\right)\zeta + \frac{\pi + (\chi\circ y_{n+q}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\zeta)}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\times \frac{2C_{n+p}\sqrt{\omega'(n+p)}}{\sqrt{g}\sqrt{(x_{n+p}^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\xi)\sin^3\Gamma^{-1}(\xi)}} \\ &\times \left(\cos\left(\left(n+p+\frac{1}{2}\right)\xi + \frac{\pi - (\chi\circ y_{n+p}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\xi)}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi\sqrt{g}} \int_{\Gamma\circ\phi\circ x_{n+q}(Z_1+\delta)}^{\Gamma\circ\phi\circ x_{n+q}(Z_2-\delta)} \mathrm{d}\zeta \int_{\Gamma\circ\phi\circ x_{n+p}(Z_1+\delta)}^{\Gamma\circ\phi\circ x_{n+p}\circ x_{n+q}^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1}(\zeta)} \mathrm{d}\xi \\ &\times \left(\frac{1}{\sqrt{(X^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\zeta)\sin^3\Gamma^{-1}(\zeta)}} \cos\left(\left(n+q+\frac{1}{2}\right)\zeta + \frac{\pi + (\chi\circ Y\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\zeta)}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\times \left(\frac{1}{\sqrt{(X^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\xi)\sin^3\Gamma^{-1}(\xi)}} \cos\left(\left(n+p+\frac{1}{2}\right)\xi + \frac{\pi - (\chi\circ Y\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\xi)}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\Gamma\circ\phi\circ x_{n+s}\left(Z_1+\delta\right) &= \Gamma\circ\phi\circ X\left(Z_1+\delta\right)+O(1/n),\\ \Gamma\circ\phi\circ x_{n+s}\left(Z_2-\delta\right) &= \Gamma\circ\phi\circ X\left(Z_2-\delta\right)+O(1/n)\end{aligned}$$

et

$$Z_p = x_{n+p}\circ x_{n+q}^{-1}(Z_q) = \sqrt{\frac{\omega'(n+q)}{\omega'(n+p)}}Z_q = \left(1+\frac{q-p}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)Z_q,$$

d'où

$$\begin{aligned}\phi_p &= \arccos Z_p = \arccos\left(\left(1+\frac{q-p}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\cos\phi_q\right)\\ &= \phi_q-\frac{q-p}{2n}\frac{\cos\phi_q}{\sin\phi_q}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

uniformément en ϕ_q, car ϕ_q prend ses valeurs dans un compact (dépendant de δ) inclus dans $(0,\pi)$. D'où

$$\begin{aligned}\xi &= \Gamma(\phi_p) = \Gamma\left(\phi_q-\frac{q-p}{2n}\frac{\cos\phi_q}{\sin\phi_q}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \Gamma\left(\Gamma^{-1}(\zeta)-\frac{q-p}{2n}\frac{\cos\Gamma^{-1}(\zeta)}{\sin\Gamma^{-1}(\zeta)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \zeta-\frac{q-p}{2n}\frac{\cos\Gamma^{-1}(\zeta)}{\sin\Gamma^{-1}(\zeta)}\Gamma'\circ\Gamma^{-1}(\zeta)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \zeta+\frac{q-p}{2n}\cos\Gamma^{-1}(\zeta)\sin\Gamma^{-1}(\zeta)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \zeta+\frac{1}{n}\frac{q-p}{4}\sin 2\Gamma^{-1}(\zeta)+O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}I_1 = &\frac{1}{\pi\sqrt{g}}\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_2-\delta)+O(n^{-1})}\mathrm{d}\zeta\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\zeta+\frac{1}{n}\frac{q-p}{4}\sin 2\Gamma^{-1}(\zeta)+O(n^{-2})}\mathrm{d}\xi\\ &\times\left(\frac{1}{\sqrt{(X^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\zeta)\sin^3\Gamma^{-1}(\zeta)}}\cos\left(\left(n+q+\frac{1}{2}\right)\zeta+\frac{\pi+\left(\chi\circ Y\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1}\right)(\zeta)}{4}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &\times\left(\frac{1}{\sqrt{(X^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\xi)\sin^3\Gamma^{-1}(\xi)}}\cos\left(\left(n+p+\frac{1}{2}\right)\xi+\frac{\pi-\left(\chi\circ Y\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1}\right)(\xi)}{4}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

L'intégrale est de la forme

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{4\pi\sqrt{g}}\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_2-\delta)+O(n^{-1})}\mathrm{d}\zeta\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\zeta+\frac{1}{n}\frac{q-p}{4}\sin 2\Gamma^{-1}(\zeta)+O(n^{-2})}\mathrm{d}\xi\\ &\quad\times\left(a_0\left(\zeta\right)\mathrm{e}^{in\zeta}+a_1\left(\zeta\right)\mathrm{e}^{-in\zeta}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(b_0\left(\xi\right)\mathrm{e}^{in\xi}+b_1\left(\xi\right)\mathrm{e}^{-in\xi}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}a_0\left(\zeta\right) &= \frac{1}{\sqrt{(X^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\zeta)\sin^3\Gamma^{-1}(\zeta)}}\exp\left(i\left(\left(q+\frac{1}{2}\right)\zeta+\frac{\pi+\left(\chi\circ Y\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1}\right)(\zeta)}{4}\right)\right),\\ a_1\left(\zeta\right) &= \frac{1}{\sqrt{(X^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\zeta)\sin^3\Gamma^{-1}(\zeta)}}\exp\left(-i\left(\left(q+\frac{1}{2}\right)\zeta+\frac{\pi+\left(\chi\circ Y\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1}\right)(\zeta)}{4}\right)\right),\\ b_0\left(\xi\right) &= \frac{1}{\sqrt{(X^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\xi)\sin^3\Gamma^{-1}(\xi)}}\exp\left(i\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)\xi+\frac{\pi-\left(\chi\circ Y\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1}\right)(\xi)}{4}\right)\right),\\ b_1\left(\xi\right) &= \frac{1}{\sqrt{(X^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\xi)\sin^3\Gamma^{-1}(\xi)}}\exp\left(-i\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)\xi+\frac{\pi-\left(\chi\circ Y\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1}\right)(\xi)}{4}\right)\right)\end{aligned}$$

et ces quatre fonctions et leurs dérivées sont bornées dans le domaine considéré. On commence par éliminer les termes en $O\left(1/n\right)$. On a

$$\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_2-\delta)+O(n^{-1})}\mathrm{d}\zeta\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\zeta+O(n^{-1})}\mathrm{d}\xi O\left(\frac{1}{n}\right)O\left(\frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

car les intervalles sont bornés. Et, en intégrant par parties, on a

$$\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_2-\delta)+O(n^{-1})}\left(a_k\left(\zeta\right)\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\zeta+O(n^{-1})}O\left(\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{(-1)^k in\zeta}\mathrm{d}\zeta=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour l'autre cas, en intégrant par parties l'intégrale par rapport à ξ, on a

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_2-\delta)+O(n^{-1})}\mathrm{d}\zeta O\left(\frac{1}{n}\right)\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\zeta+O(n^{-1})}b_k\left(\xi\right)\mathrm{e}^{(-1)^k in\xi}\mathrm{d}\xi\right|\\ \leq\ & O\left(\frac{1}{n}\right)\left|\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_2-\delta)+O(n^{-1})}\mathrm{d}\zeta\left|\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\zeta+O(n^{-1})}b_k\left(\xi\right)\mathrm{e}^{(-1)^k in\xi}\mathrm{d}\xi\right|\right|=O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{4\pi\sqrt{g}}\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_2-\delta)+O(n^{-1})}\mathrm{d}\zeta\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\zeta+\frac{1}{n}\frac{q-p}{4}\sin 2\Gamma^{-1}(\zeta)+O(n^{-2})}\mathrm{d}\xi\\ &\quad\times\left(a_0\left(\zeta\right)\mathrm{e}^{in\zeta}+a_1\left(\zeta\right)\mathrm{e}^{-in\zeta}\right)\left(b_0\left(\xi\right)\mathrm{e}^{in\xi}+b_1\left(\xi\right)\mathrm{e}^{-in\xi}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Toujours en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_2-\delta)+O(n^{-1})}\mathrm{d}\zeta\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\zeta+O(n^{-1})}\mathrm{d}\xi a_0\left(\zeta\right)\mathrm{e}^{in\zeta}b_0\left(\xi\right)\mathrm{e}^{in\xi}\\ =\ & O\left(\frac{1}{n^2}\right),\\ &\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_2-\delta)+O(n^{-1})}\mathrm{d}\zeta\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\zeta+\frac{1}{n}\frac{q-p}{4}\sin 2\Gamma^{-1}(\zeta)+O(n^{-2})}\mathrm{d}\xi a_0\left(\zeta\right)\mathrm{e}^{in\zeta}b_1\left(\xi\right)\mathrm{e}^{-in\xi}\\ =\ & \int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)}^{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_2-\delta)}\frac{a_0\left(\zeta\right)b_1\left(\zeta\right)}{-in}\mathrm{e}^{-i\frac{q-p}{4}\sin 2\Gamma^{-1}(\zeta)}\mathrm{d}\zeta+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\\ &\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_2-\delta)+O(n^{-1})}\mathrm{d}\zeta\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\zeta+\frac{1}{n}\frac{q-p}{4}\sin 2\Gamma^{-1}(\zeta)+O(n^{-2})}\mathrm{d}\xi a_1\left(\zeta\right)\mathrm{e}^{-in\zeta}b_0\left(\xi\right)\mathrm{e}^{in\xi}\\ =\ & \int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)}^{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_2-\delta)}\frac{a_1\left(\zeta\right)b_0\left(\zeta\right)}{in}\mathrm{e}^{i\frac{q-p}{4}\sin 2\Gamma^{-1}(\zeta)}\mathrm{d}\zeta+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\\ &\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_2-\delta)+O(n^{-1})}\mathrm{d}\zeta\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)+O(n^{-1})}^{\zeta+O(n^{-1})}\mathrm{d}\xi a_1\left(\zeta\right)\mathrm{e}^{-in\zeta}b_1\left(\xi\right)\mathrm{e}^{-in\xi}\\ =\ & O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{4\pi in\sqrt{g}}\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)}^{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_2-\delta)}\left(a_1\left(\zeta\right)b_0\left(\zeta\right)\mathrm{e}^{i\frac{q-p}{4}\sin 2\Gamma^{-1}(\zeta)}-a_0\left(\zeta\right)b_1\left(\zeta\right)\mathrm{e}^{-i\frac{q-p}{4}\sin 2\Gamma^{-1}(\zeta)}\right)\mathrm{d}\zeta+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{2\pi n\sqrt{g}}\int_{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_1+\delta)}^{\Gamma\circ\phi\circ X(Z_2-\delta)}\frac{1}{(X^{-1}\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1})(\zeta)\sin^3\Gamma^{-1}(\zeta)}\\ &\quad\times\sin\left(\left(p-q\right)\zeta+\frac{q-p}{4}\sin 2\Gamma^{-1}(\zeta)-\frac{\left(\chi\circ Y\circ\phi^{-1}\circ\Gamma^{-1}\right)(\zeta)}{2}\right)\mathrm{d}\zeta+O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Repassons dans la variable $v = \Gamma^{-1}(\zeta)$, $\mathrm{d}\zeta = -\sin^2 v \mathrm{d}v$, il vient

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{-1}{2\pi n\sqrt{g}} \int_{\phi\circ X(Z_1+\delta)}^{\phi\circ X(Z_2-\delta)} \frac{1}{(X^{-1}\circ\phi^{-1})(v)\sin v} \\ &\quad \times \sin\left(\frac{(p-q)}{2}\left(\frac{\sin 2v}{2} - v\right) + \frac{q-p}{4}\sin 2v - \frac{\left(\chi\circ Y\circ\phi^{-1}\right)(v)}{2}\right)\mathrm{d}v + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{-1}{2\pi n\sqrt{g}} \int_{\phi\circ X(Z_1+\delta)}^{\phi\circ X(Z_2-\delta)} \frac{1}{(X^{-1}\circ\phi^{-1})(v)\sin v} \sin\left(\frac{q-p}{2}v - \frac{\left(\chi\circ Y\circ\phi^{-1}\right)(v)}{2}\right)\mathrm{d}v + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On transforme les expressions de $(X^{-1}\circ\phi^{-1})(v)$ et $\left(\chi\circ Y\circ\phi^{-1}\right)(v)$. On a

$$(X^{-1}\circ\phi^{-1})(v) = \left(\frac{2\sqrt{g}\cos v - t}{g}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{-t}{g}}\sqrt{1+u\cos v}$$

et

$$\left(\chi\circ Y\circ\phi^{-1}\right)(v) = \arccos\left(\frac{2\sqrt{g} - t\cos v}{2\sqrt{g}\cos v - t}\right) = \arccos\left(\frac{u+\cos v}{1+u\cos v}\right).$$

D'où

$$I_1 = \frac{-1}{2\pi n\sqrt{-t}} \int_{\phi\circ X(Z_1+\delta)}^{\phi\circ X(Z_2-\delta)} \frac{1}{\sin v\sqrt{1+u\cos v}} \sin\left(\frac{q-p}{2}v - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{u+\cos v}{1+u\cos v}\right)\right)\mathrm{d}v + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Achevons de transformer l'expression, on a

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{q-p}{2}v - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{u+\cos v}{1+u\cos v}\right)\right) \\ = \;&\sin\left(\frac{q-p}{2}v\right)\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{u+\cos v}{1+u\cos v}\right)\right) \\ &-\cos\left(\frac{q-p}{2}v\right)\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{u+\cos v}{1+u\cos v}\right)\right). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{u+\cos v}{1+u\cos v}\right)\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{u+\cos v}{1+u\cos v}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1+u}{2}\left(\frac{1+\cos v}{1+u\cos\phi}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1+u}{1+u\cos v}}\cos\frac{v}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{u+\cos v}{1+u\cos v}\right)\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{u+\cos v}{1+u\cos v}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1-u}{2}\left(\frac{1-\cos v}{1+u\cos v}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1-u}{1+u\cos v}}\sin\frac{v}{2}. \end{aligned}$$

En conclusion, on obtient

$$I_1 = \frac{-1}{4\pi n\sqrt{-t}} \int_{\phi\circ X(Z_1+\delta)}^{\phi\circ X(Z_2-\delta)} \left(\frac{\sqrt{1+u}}{1+u\cos v}\frac{\sin(q-p)v/2}{\sin v/2} - \frac{\sqrt{1-u}}{1+u\cos v}\frac{\cos(q-p)v/2}{\cos v/2}\right)\mathrm{d}v + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(b) Pour calculer l'équivalent de

$$\begin{aligned}
I_2 &= \Big(\int_{Z_1-\delta}^{Z_1+\delta} \mathrm{d}\lambda \int_{Z_1-\delta}^{\lambda} \mathrm{d}\mu + \int_{Z_2-\delta}^{Z_2+\delta} \mathrm{d}\lambda \int_{Z_2-\delta}^{\lambda} \mathrm{d}\mu \\
&+ \int_{Z_1+\delta}^{z_2+\delta} \mathrm{d}\lambda \int_{Z_1-\delta}^{Z_1+\delta} \mathrm{d}\mu + \int_{Z_2-\delta}^{Z_2+\delta} \mathrm{d}\lambda \int_{Z_1+\delta}^{Z_2-\delta} \mathrm{d}\mu\Big) \psi_{n+p}(\mu)\,\psi_{n+q}(\lambda),
\end{aligned}$$

on est ramené aux équivalents suivants, dont certains ont déjà été calculés,

$$\begin{aligned}
\int_{Z_k-\delta}^{Z_k+\delta} \psi_{n+s}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^{(2-k)\left[\frac{n+s}{2}\right]}}{\sqrt{2}(-t)^{1/4}(1+(-1)^k u)^{1/4}} + O\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right) \quad \text{avec} \quad k=1{,}2 \quad \text{et} \quad s=p{,}q, \\
\int_{Z_1+\delta}^{Z_2-\delta} \psi_{n+s}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda &= O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec} \quad s=p{,}q
\end{aligned}$$

et

$$J_k = \int_{Z_k-\delta}^{Z_k+\delta} \mathrm{d}\lambda \int_{Z_k-\delta}^{\lambda} \mathrm{d}\mu \psi_{n+p}(\mu)\,\psi_{n+q}(\lambda), \quad \text{avec} \quad k=1{,}2.$$

Soit

$$\begin{aligned}
J_k &= \int_{Z_k-\delta}^{Z_k+\delta} \mathrm{d}\lambda \int_{Z_k-\delta}^{\lambda} \mathrm{d}\mu \left(\frac{D_{n+q}\lambda}{\sqrt{|\varphi'_{n+q}(\lambda)|}}\left(\mathrm{Ai}(n^{2/3}\varphi_{n+q}(\lambda)) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&\times \left(\frac{D_{n+p}\mu}{\sqrt{|\varphi'_{n+p}(\mu)|}}\left(\mathrm{Ai}(n^{2/3}\varphi_{n+p}(\mu)) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= (-1)^{(2-k)\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)} n^{1/3} g \int_{\varphi_{n+q}(Z_k-\delta)}^{\varphi_{n+q}(Z_k+\delta)} \mathrm{d}x \int_{\varphi_{n+p}(Z_k-\delta)}^{\varphi_{n+p}\circ\varphi_{n+q}^{-1}(x)} \mathrm{d}y \\
&\times \left(\frac{\varphi_{n+q}^{-1}(x)}{\sqrt{|\varphi'_{n+q}\circ\varphi_{n+q}^{-1}(x)|}\varphi'_{n+q}\circ\varphi_{n+q}^{-1}(x)} \mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\times \left(\frac{\varphi_{n+p}^{-1}(y)}{\sqrt{|\varphi'_{n+p}\circ\varphi_{n+p}^{-1}(y)|}\varphi'_{n+p}\circ\varphi_{n+p}^{-1}(y)} \mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= (-1)^{(2-k)\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)} n^{1/3} g \int_{\Phi(Z_k-\delta)+O(n^{-1})}^{\Phi(Z_k+\delta)+O(n^{-1})} \mathrm{d}x \int_{\Phi(Z_k-\delta)+O(n^{-1})}^{x+\frac{c(x)}{n}+O(n^{-2})} \mathrm{d}y \\
&\times \left(\frac{\Phi^{-1}(x)}{\sqrt{|\Phi'\circ\Phi^{-1}(x)|}\Phi'\circ\Phi^{-1}(x)} \mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\times \left(\frac{\Phi^{-1}(y)}{\sqrt{|\Phi'\circ\Phi^{-1}(y)|}\Phi'\circ\Phi^{-1}(y)} \mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),
\end{aligned}$$

car

$$\varphi_{n+p}\circ\varphi_{n+q}^{-1}(x) = x + \frac{c(x)}{n} + O(n^{-2}).$$

En effet, d'après l'existence des développements asymptotiques des zéros de U_{n+s}, on a

$$\varphi_{n+s}(x) = \Phi(x) + \frac{1}{n}\theta_s(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ce qui donne

$$\varphi_{n+s}^{-1}(x) = \Phi^{-1}(x) - \frac{1}{n}\frac{\theta_s\circ\Phi^{-1}(x)}{\Phi'\circ\Phi^{-1}(x)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

d'où

$$\varphi_{n+p} \circ \varphi_{n+q}^{-1}(x) = x + \frac{1}{n}(\theta_p - \theta_q) \circ \Phi^{-1}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Cette intégrale se décompose en trois parties (différemment selon que $k = 1$ ou 2, on rappelle que $\varphi_{n+s}(Z_k \pm \delta)$ est du signe de $\pm(-1)^k$) et on ne note pas l'intégrande pour alléger les notations

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_{n+q}(Z_2-\delta)}^{\varphi_{n+q}(Z_2+\delta)} \mathrm{d}x \int_{\varphi_{n+p}(Z_2-\delta)}^{\varphi_{n+p}\circ\varphi_{n+q}^{-1}(x)} \mathrm{d}y \quad &= \quad \int_0^{\varphi_{n+q}(Z_2+\delta)} \mathrm{d}x \int_{\varphi_{n+p}(Z_2-\delta)}^{0} \mathrm{d}y \\
+ \int_0^{\varphi_{n+q}(Z_2+\delta)} \mathrm{d}x \int_0^{\varphi_{n+p}\circ\varphi_{n+q}^{-1}(x)} \mathrm{d}y \quad &+ \quad \int_{\varphi_{n+q}(Z_2-\delta)}^{0} \mathrm{d}x \int_{\varphi_{n+p}(Z_2-\delta)}^{\varphi_{n+p}\circ\varphi_{n+q}^{-1}(x)} \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_{n+q}(Z_1-\delta)}^{\varphi_{n+q}(Z_1+\delta)} \mathrm{d}x \int_{\varphi_{n+p}(Z_1-\delta)}^{\varphi_{n+p}\circ\varphi_{n+q}^{-1}(x)} \mathrm{d}y \quad &= \quad \int_0^{\varphi_{n+q}(Z_1+\delta)} \mathrm{d}x \int_0^{\varphi_{n+p}\circ\varphi_{n+q}^{-1}(x)} \mathrm{d}y \\
+ \int_{\varphi_{n+q}(Z_1-\delta)}^{0} \mathrm{d}x \int_{\varphi_{n+p}(Z_1-\delta)}^{\varphi_{n+p}\circ\varphi_{n+q}^{-1}(x)} \mathrm{d}y \quad &+ \quad \int_0^{\varphi_{n+q}(Z_1+\delta)} \mathrm{d}x \int_{\varphi_{n+p}(Z_1-\delta)}^{0} \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Notons

$$\Psi(x) = \frac{\Phi^{-1}(x)}{\sqrt{|\Phi' \circ \Phi^{-1}(x)|\Phi' \circ \Phi^{-1}(x)}}.$$

D'après la preuve du lemme 4.2, on a

$$\begin{aligned}
& n^{1/3} g \int_0^{\varphi_{n+q}(Z_2+\delta)} \mathrm{d}x \int_{\varphi_{n+p}(Z_2-\delta)}^{0} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
& \times \left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
= \quad & \frac{1}{n}\frac{1}{9}\frac{1}{(-t)^{1/2}(1+u)^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).
\end{aligned}$$

Ensuite, il vient

$$\begin{aligned}
& n^{1/3} g \int_0^{\varphi_{n+q}(Z_2+\delta)} \mathrm{d}x \int_0^{\varphi_{n+p}\circ\varphi_{n+q}^{-1}(x)} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
& \times \left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
= \quad & \frac{1}{n}\frac{1}{36}\frac{1}{(-t)^{1/2}(1+u)^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).
\end{aligned}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\varphi_{n+q}(Z_2+\delta)} \mathrm{d}x \int_0^{\varphi_{n+p}\circ\varphi_{n+q}^{-1}(x)} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
& \times \left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
= \quad & \left(\int_0^{\varphi_{n+q}(Z_2+\delta)} \mathrm{d}x \int_0^{x} \mathrm{d}y + \int_0^{\varphi_{n+q}(Z_2+\delta)} \mathrm{d}x \int_x^{x+O(1/n)} \mathrm{d}y\right) \\
& \times \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, comme sur $[0,+\infty)$ la fonction d'Airy est positive, il vient

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\varphi_{n+q}(Z_2+\delta)} \mathrm{d}x \int_x^{x+O(1/n)} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\times \left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
= \; & O\left(\frac{1}{n}\right) \int_0^{\varphi_{n+q}(Z_2+\delta)} \left(|\Psi(x)|\mathrm{Ai}(n^{2/3}x)\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \mathrm{d}x \\
= \; & O\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right).
\end{aligned}$$

De plus, par symétrie, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\varphi_{n+q}(Z_2+\delta)} \mathrm{d}x \int_0^{x} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\times \left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
= \; & \frac{1}{2}\left(\int_0^{\varphi_{n+q}(Z_2+\delta)} \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \mathrm{d}x\right)^2 \\
= \; & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^{2/3}}\frac{\Psi(0)}{3} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2,
\end{aligned}$$

on déduit le résultat de la preuve du lemme 4.2.
Enfin, on a

$$\begin{aligned}
&n^{1/3}g \int_{\varphi_{n+q}(Z_2-\delta)}^{0} \mathrm{d}x \int_{\varphi_{n+p}(Z_2-\delta)}^{x+\frac{c(x)}{n}+O(n^{-2})} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\times \left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
= \; & \frac{1}{n}\frac{1}{9}\frac{1}{(-t)^{1/2}(1+u)^{1/2}} + \frac{O(\delta)}{n} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).
\end{aligned}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi_{n+q}(Z_2-\delta)}^{0} \mathrm{d}x \int_{\varphi_{n+p}(Z_2-\delta)}^{x+\frac{c(x)}{n}+O(n^{-2})} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\times \left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
= \; & \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{0} \mathrm{d}x \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{x+\frac{c(x)}{n}} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\times \left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
= \; & \left(\int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{0} \mathrm{d}x \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{x} \mathrm{d}y + \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{0} \mathrm{d}x \int_{x}^{x+\frac{c(x)}{n}} \mathrm{d}y\right) \\
&\times \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{0} \mathrm{d}x \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{x} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\times \left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
= \; &\int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{0} \mathrm{d}x \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{x} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x)\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y)\right) \\
&\int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{0} \Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x)\mathrm{d}x \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{x} O\left(\frac{1}{n}\right) \mathrm{d}y \\
&\int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{0} O\left(\frac{1}{n}\right) \mathrm{d}x \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{x} \Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y)\mathrm{d}y + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Or, posons

$$B(x) = \int_0^x \mathrm{Ai}(t)\mathrm{d}t,$$

d'après [1], c'est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi, en intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned}
&\int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{0} \mathrm{Ai}(n^{2/3}x) \left(\Psi(x) \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{x} O\left(\frac{1}{n}\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
= \; &\frac{1}{n^{2/3}} \left[B(n^{2/3}x) \left(\Psi(x) \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{x} O\left(\frac{1}{n}\right) \mathrm{d}y \right) \right]_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{0} \\
&-\frac{1}{n^{2/3}} \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{0} B(n^{2/3}x) \left(\Psi(x) \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{x} O\left(\frac{1}{n}\right) \mathrm{d}y \right)' \mathrm{d}x \\
= \; &O\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right)
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
&\int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{x} \Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y)\mathrm{d}y \\
= \; &\frac{1}{n^{2/3}} \left[\Psi(y)B(n^{2/3}y) \right]_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{x} - \frac{1}{n^{2/3}} \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{x} \Psi(y)B(n^{2/3}y)\mathrm{d}y \\
= \; &O\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)
\end{aligned}$$

uniformément en $x \in (\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n),0)$, il vient

$$\begin{aligned}
&\int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{0} O\left(\frac{1}{n}\right) \mathrm{d}x \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{x} \Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y)\mathrm{d}y \\
= \; &O\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right).
\end{aligned}$$

Et, par des arguments analogues, on montre que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{0} \mathrm{d}x \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{x} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x)\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y)\right) \\
= \; &\int_{\Phi(Z_2-\delta)}^{0} \mathrm{d}x \int_{\Phi(Z_2-\delta)}^{x} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x)\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y)\right) + O\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right).
\end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{0} \mathrm{d}x \int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{x} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\quad \times \left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
= \;& \int_{\Phi(Z_2-\delta)}^{0} \mathrm{d}x \int_{\Phi(Z_2-\delta)}^{x} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x)\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y)\right) + O\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right) \\
= \;& \frac{1}{2}\left(\int_{\Phi(Z_2-\delta)}^{0} \Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x)\mathrm{d}x\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right) \\
= \;& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^{2/3}}\frac{2\Psi(0)}{3} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right),
\end{aligned}$$

par symétrie et on est ainsi ramené au cas du lemme 4.2. De plus, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\Phi(Z_2-\delta)+O(1/n)}^{0} \mathrm{d}x \int_{x}^{x+\frac{c(x)}{n}} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\quad \times \left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
= \;& \int_{\Phi(Z_2-\delta)}^{0} \mathrm{d}x \int_{x}^{x+\frac{c(x)}{n}} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x)\right)\left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
= \;& \frac{O(\delta)}{n^{4/3}} + O\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right),
\end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Phi(Z_2-\delta)}^{0} \mathrm{d}x \int_{x}^{x+\frac{c(x)}{n}} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x)\right)\left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y)\right) \\
= \;& \int_{\Phi(Z_2-\delta)}^{0} \mathrm{d}x \int_{x}^{x+\frac{c(x)}{n}} \mathrm{d}y \, (\Psi(x))^2 \, \mathrm{Ai}(n^{2/3}x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

car, pour y entre x et $x + c(x)/n$, on a

$$\Psi(y) = \Psi(x) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\int_{x}^{x+\frac{c(x)}{n}} \mathrm{Ai}(n^{2/3}y)\mathrm{d}y &= \frac{c(x)}{n}\int_0^1 \mathrm{Ai}\left(n^{2/3}x + \frac{tc(x)}{n^{1/3}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{c(x)}{n}\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{Ai}\left(n^{2/3}x + \frac{tc(x)}{n^{1/3}}\right) - \mathrm{Ai}(n^{2/3}x)\right| &\le \left(\frac{c(x)}{n^{1/3}}\right)^2 \sup_{t\in(0,1)}\left|\mathrm{Ai}'\left(n^{2/3}x + \frac{tc(x)}{n^{1/3}}\right)\right| \\
&= \frac{c(x)^2}{n^{2/3}}O(n^{1/6}) = O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right),
\end{aligned}$$

puisque, d'après [1], on a, pour $s \to +\infty$,

$$\mathrm{Ai}'(-s) = O(s^{1/4}).$$

Ainsi, il vient

$$\begin{aligned}
&\int_{\Phi(Z_2-\delta)}^{0} \mathrm{d}x \int_{x}^{x+\frac{c(x)}{n}} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x)\right)\left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y)\right)\\
= \;& \int_{\Phi(Z_2-\delta)}^{0} \frac{c(x)}{n}\left(\Psi(x)\right)^2\left(\mathrm{Ai}(n^{2/3}x)\right)^2 \mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\\
= \;& \frac{1}{n^{4/3}}\frac{1}{2\pi}\int_{\Phi(Z_2-\delta)}^{0} c(x)\left(\Psi(x)\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right),
\end{aligned}$$

d'après [3], ce qui donne le résultat.
En conclusion, on a

$$\begin{aligned}
& n^{1/3} g \int_{\varphi_{n+q}(Z_2-\delta)}^{\varphi_{n+q}(Z_2+\delta)} \mathrm{d}x \int_{\varphi_{n+p}(Z_2-\delta)}^{\varphi_{n+p}\circ\varphi_{n+q}^{-1}(x)} \mathrm{d}y \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
& \times \left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
= \;& \frac{1}{n}\frac{1}{4}\frac{1}{(-t)^{1/2}(1+u)^{1/2}} + \frac{O(\delta)}{n} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
& (-1)^{\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)} n^{1/3} g \int_{0}^{\varphi_{n+q}(Z_1+\delta)} \mathrm{d}x \int_{0}^{x+\frac{c(x)}{n}+O(n^{-2})} \mathrm{d}y\\
& \times \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
= \;& \frac{1}{n}\frac{1}{9}\frac{(-1)^{\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)}}{(-t)^{1/2}(1-u)^{1/2}} + \frac{O(\delta)}{n} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^{\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)} n^{1/3} g \int_{\varphi_{n+q}(Z_1-\delta)}^{0} \mathrm{d}x \int_{\varphi_{n+p}(Z_1-\delta)}^{\varphi_{n+p}\circ\varphi_{n+q}^{-1}(x)} \mathrm{d}y\\
& \times \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
= \;& \frac{1}{n}\frac{1}{36}\frac{(-1)^{\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)}}{(-t)^{1/2}(1-u)^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& (-1)^{\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)} n^{1/3} g \int_{0}^{\varphi_{n+q}(Z_1+\delta)} \mathrm{d}x \int_{\varphi_{n+p}(Z_1-\delta)}^{0} \mathrm{d}y\\
& \times \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
= \;& \frac{1}{n}\frac{1}{9}\frac{(-1)^{\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)}}{(-t)^{1/2}(1-u)^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& (-1)^{\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)} n^{1/3} g \int_{\varphi_{n+q}(Z_1-\delta)}^{\varphi_{n+q}(Z_1+\delta)} \mathrm{d}x \int_{\varphi_{n+p}(Z_1-\delta)}^{\varphi_{n+p}\circ\varphi_{n+q}^{-1}(x)} \mathrm{d}y\\
& \times \left(\Psi(x)\mathrm{Ai}(n^{2/3}x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\Psi(y)\mathrm{Ai}(n^{2/3}y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
= \;& \frac{1}{n}\frac{1}{4}\frac{(-1)^{\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)}}{(-t)^{1/2}(1-u)^{1/2}} + \frac{O(\delta)}{n} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$J_1+J_2=\frac{1}{n}\frac{1}{4}\left(\frac{(-1)^{\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)}}{(-t)^{1/2}(1-u)^{1/2}}+\frac{1}{(-t)^{1/2}(1+u)^{1/2}}\right)+\frac{O(\delta)}{n}+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$$

et

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{n}\frac{1}{4}\left(\frac{(-1)^{\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)}}{(-t)^{1/2}(1-u)^{1/2}}+\frac{1}{(-t)^{1/2}(1+u)^{1/2}}\right) \\ &\quad +\frac{1}{n}\frac{1}{2}\frac{(-1)^{\left[\frac{n+p}{2}\right]}}{(-t)^{1/2}(1-u^2)^{1/4}}+\frac{O(\delta)}{n}+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right). \end{aligned}$$

(c) Nous allons montrer que le terme

$$\begin{aligned} I_3 &= \left(\int_0^{Z_1-\delta}\mathrm{d}\lambda\int_0^{\lambda}\mathrm{d}\mu+\int_{Z_1-\delta}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_0^{Z_1-\delta}\mathrm{d}\mu\right. \\ &+ \left.\int_{Z_2+\delta}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{Z_1-\delta}^{Z_2+\delta}\mathrm{d}\mu+\int_{Z_2+\delta}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{Z_2+\delta}^{\lambda}\mathrm{d}\mu\right)\psi_{n+p}(\mu)\,\psi_{n+q}(\lambda) \end{aligned}$$

est négligeable par rapport aux autres termes évalués en (a) et(b). En effet, on a

$$\begin{aligned} \left|\int_0^{Z_1-\delta}\mathrm{d}\lambda\int_0^{\lambda}\mathrm{d}\mu\psi_{n+p}(\mu)\,\psi_{n+q}(\lambda)\right| &\leq \int_0^{Z_1-\delta}|\psi_{n+q}|\int_0^{Z_1-\delta}|\psi_{n+p}|\,, \\ \left|\int_{Z_1-\delta}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_0^{Z_1-\delta}\mathrm{d}\mu\psi_{n+p}(\mu)\,\psi_{n+q}(\lambda)\right| &\leq \int_{Z_1-\delta}^{+\infty}|\psi_{n+q}|\int_0^{Z_1-\delta}|\psi_{n+p}| \\ &\leq \left(C+\int_{Z_2+\delta}^{+\infty}|\psi_{n+q}|\right)\int_0^{Z_1-\delta}|\psi_{n+p}|\,, \\ \left|\int_{Z_2+\delta}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{Z_1-\delta}^{Z_2+\delta}\mathrm{d}\mu\psi_{n+p}(\mu)\,\psi_{n+q}(\lambda)\right| &\leq \int_{Z_2+\delta}^{+\infty}|\psi_{n+q}|\times C, \\ \left|\int_{Z_2+\delta}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{Z_2+\delta}^{\lambda}\mathrm{d}\mu\psi_{n+p}(\mu)\,\psi_{n+q}(\lambda)\right| &\leq \int_{Z_2+\delta}^{+\infty}|\psi_{n+q}|\int_{Z_2+\delta}^{+\infty}|\psi_{n+p}| \end{aligned}$$

et comme d'après le lemme 4.2

$$\int_0^{Z_1-\delta}|\psi_{n+s}|\quad\text{et}\quad\int_{Z_2+\delta}^{+\infty}|\psi_{n+s}|$$

sont exponentiellement décroissants lorsque $n\to+\infty$, on a le résultat.

(d) En conclusion, comme l'expression finale ne doit pas dépendre de δ, on prend la limite à $\delta\to 0$. On a

$$\lim_{\delta\to 0}\phi\circ X(Z_2-\delta)=0\quad\text{et}\quad\lim_{\delta\to 0}\phi\circ X(Z_1-\delta)=\pi,$$

donc, d'après (a), (b) et (c),

$$\begin{aligned} a_{n+p,n+q} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sqrt{1+u}}{1+u\cos v}\frac{\sin(q-p)v/2}{\sin v/2}-\frac{\sqrt{1-u}}{1+u\cos v}\frac{\cos(q-p)v/2}{\cos v/2}\right)\mathrm{d}v \\ &+\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)}}{(1-u)^{1/2}}+\frac{1}{(1+u)^{1/2}}\right)+\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{(-1)^{\left[\frac{n+p}{2}\right]}}{(1-u^2)^{1/4}}+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right), \end{aligned}$$

si $n+p$ pair et $n+q$ impair. D'où, si $n+p$ impair et $n+q$ pair, on a

$$\begin{aligned} a_{n+p,n+q} &= -a_{n+q,n+p}=\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sqrt{1+u}}{1+u\cos v}\frac{\sin(q-p)v/2}{\sin v/2}+\frac{\sqrt{1-u}}{1+u\cos v}\frac{\cos(q-p)v/2}{\cos v/2}\right)\mathrm{d}v \\ &-\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)}}{(1-u)^{1/2}}+\frac{1}{(1+u)^{1/2}}\right)-\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{(-1)^{\left[\frac{n+q}{2}\right]}}{(1-u^2)^{1/4}}+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
a_{n+p,n+q} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sqrt{1+u}}{1+u\cos v}\frac{\sin(q-p)v/2}{\sin v/2}-(-1)^{n+p}\frac{\sqrt{1-u}}{1+u\cos v}\frac{\cos(q-p)v/2}{\cos v/2}\right)\mathrm{d}v\\
&+ \frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{(-1)^{n+p}}{2}\left(\frac{(-1)^{\left(\left[\frac{n+p}{2}\right]+\left[\frac{n+q}{2}\right]\right)}}{(1-u)^{1/2}}+\frac{1}{(1+u)^{1/2}}\right)+\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{(-1)^{n+p}\,(-1)^{\left[\frac{n+s}{2}\right]}}{(1-u^2)^{1/4}}+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right),
\end{aligned}$$

avec

$$s=p \quad \text{si} \quad n+p \quad \text{est pair et} \quad s=q \quad \text{si} \quad n+q \quad \text{est pair.}$$

Preuve des lemmes 4.5, 4.6 et 4.7. — Il suffit de remarquer que dans ce cas $\omega(2n+s)=2+O(1/n)$ et $\omega'(2n+s)=2+O(1/n)$, et on utilise les preuves du cas $\beta=1$. Finalement, on constate que cela revient à changer n en $2n$, t en $t/2$ et u en $\sqrt{2}u$.

4.4 Calcul des éléments des matrices G

Comme V est un polynôme pair de degré 4, le degré d de V' vaut 3, donc la matrice antisymétrique G est de taille 3×3 ou 4×4, selon le cas. Nous allons donner une expression explicite des éléments de cette matrice en fonction des coefficients a_{jk}, c_{jk} et s_{jk}. Remarquons immédiatement que les coefficients s_{jk} sont nuls si j et k sont de parités distinctes.

Premièrement : le cas $\beta=1$, n pair.

Lemme 4.8. — *On a*

$$G=\begin{pmatrix} 0 & g_{n-3,n-2} & 0\\ g_{n-2,n-3} & 0 & g_{n-2,n-1}\\ 0 & g_{n-1,n-2} & 0\end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned}
g_{n-3,n-2} &= -g_{n-2,n-3}=-c_{n-3,n-2}+\frac{c_{n-3,n-2}-c_{n-3,n-6}s_{n-6,n-2}-c_{n-3,n-4}s_{n-4,n-2}}{1-a_{n-2,n+1}c_{n+1,n-2}},\\
g_{n-1,n-2} &= -g_{n-2,n-1}=-c_{n-1,n-2}+\frac{c_{n-1,n-2}-c_{n-1,n-4}s_{n-4,n-2}}{1-a_{n-2,n+1}c_{n+1,n-2}}.
\end{aligned}$$

Preuve du lemme 4.8. — On rappelle la relation donnée par le lemme 3.2

$$a_{j,k-3}c_{k-3,k}+a_{j,k-1}c_{k-1,k}+a_{j,k+1}c_{k+1,k}+a_{j,k+3}c_{k+3,k}=\delta_{jk},$$

ainsi

$$s_{jk}=\sum_{\ell=k-3}^{n-1}a_{j\ell}c_{\ell k}=\delta_{jk}-\sum_{\ell=n}^{k+3}a_{j\ell}c_{\ell k}.$$

On a

$$D=\begin{pmatrix} s_{n-3,n-3} & 0 & s_{n-3,n-1}\\ 0 & s_{n-2,n-2} & 0\\ s_{n-1,n-3} & 0 & s_{n-1,n-1}\end{pmatrix},$$

avec

$$\left\{\begin{array}{c}
s_{n-3,n-3}=1-a_{n-3,n}c_{n,n-3},\\
s_{n-1,n-3}=-a_{n-1,n}c_{n,n-3},\\
s_{n-2,n-2}=1-a_{n-2,n+1}c_{n+1,n-2},\\
s_{n-3,n-1}=-a_{n-3,n}c_{n,n-1}-a_{n-3,n+2}c_{n+2,n-1},\\
s_{n-1,n-1}=1-a_{n-1,n}c_{n,n-1}-a_{n-1,n+2}c_{n+2,n-1},
\end{array}\right.$$

d'où

$$\det D=s_{n-2,n-2}(s_{n-3,n-3}s_{n-1,n-1}-s_{n-1,n-3}s_{n-3,n-1}).$$

En posant
$$\alpha = s_{n-3,n-3}s_{n-1,n-1} - s_{n-1,n-3}s_{n-3,n-1},$$
on a
$$D^{-1} = (t_{\ell k})_{n-3\leq \ell,k\leq n-1} = \begin{pmatrix} \frac{s_{n-1,n-1}}{\alpha} & 0 & -\frac{s_{n-3,n-1}}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{s_{n-2,n-2}} & 0 \\ -\frac{s_{n-1,n-3}}{\alpha} & 0 & \frac{s_{n-3,n-3}}{\alpha} \end{pmatrix}.$$
Explicitons α :
$$\begin{aligned} \alpha &= (1-a_{n-3,n}c_{n,n-3})(1-a_{n-1,n}c_{n,n-1}-a_{n-1,n+2}c_{n+2,n-1}) \\ &\quad -(a_{n-1,n}c_{n,n-3})(a_{n-3,n}c_{n,n-1}+a_{n-3,n+2}c_{n+2,n-1}) \\ &= 1-a_{n-3,n}c_{n,n-3}-a_{n-1,n}c_{n,n-1}-a_{n-1,n+2}c_{n+2,n-1} \\ &\quad +a_{n-3,n}c_{n,n-3}a_{n-1,n+2}c_{n+2,n-1}-a_{n-1,n}c_{n,n-3}a_{n-3,n+2}c_{n+2,n-1}. \end{aligned}$$
D'où
$$g_{n-3,n-2} = -c_{n-3,n-2} + \frac{c_{n-3,n-2}-c_{n-3,n-6}s_{n-6,n-2}-c_{n-3,n-4}s_{n-4,n-2}}{s_{n-2,n-2}},$$
$$g_{n-1,n-2} = -c_{n-1,n-2} + \frac{c_{n-1,n-2}-c_{n-1,n-4}s_{n-4,n-2}}{s_{n-2,n-2}}$$
et
$$g_{n-1,n-3} = \sum_{\ell=n-3}^{n-1}(c_{n-1,\ell}-c_{n-1,n-4}s_{n-4,\ell})t_{\ell,n-3} = 0$$
car, d'après le positionnement des zéros de D^{-1}, $\ell = n-3$ ou $n-1$, donc $c_{n-1,\ell}=0$ et $s_{n-4,\ell}=0$.

<u>Deuxièmement :</u> le cas $\beta = 1$, n impair.

Lemme 4.9. — *On a*
$$G = \begin{pmatrix} 0 & g_{n-3,n-2} & 0 & g_{n-3,n} \\ g_{n-2,n-3} & 0 & g_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & g_{n-1,n-2} & 0 & g_{n-1,n} \\ g_{n,n-3} & 0 & g_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},$$
avec
$$\begin{aligned} g_{n-2,n-3} &= -c_{n-2,n-3} + \frac{1}{\alpha}((c_{n-2,n-3}-c_{n-2,n-5}s_{n-5,n-3})s_{n-1,n-1} \\ &\quad -(c_{n-2,n-1}-c_{n-2,n-5}s_{n-5,n-1})s_{n-1,n-3}), \\ g_{n-1,n-2} &= -c_{n-1,n-2} + \frac{1}{\gamma}((c_{n-1,n-2}-c_{n-1,n-4}s_{n-4,n-2})s_{n,n} \\ &\quad -(c_{n-1,n}-c_{n-1,n-4}s_{n-4,n})s_{n,n-2}), \\ g_{n,n-3} &= -c_{n,n-3} + \frac{1}{\alpha}(c_{n,n-3}s_{n-1,n-1}-c_{n,n-1}s_{n-1,n-3}), \\ g_{n,n-1} &= -c_{n,n-1} + \frac{1}{\alpha}(c_{n,n-1}s_{n-3,n-3}-c_{n,n-3}s_{n-3,n-1}), \end{aligned}$$
où
$$\begin{aligned} \alpha &= 1+\left(a'_{n-3,n}-a_{n-3,n}\right)c_{n,n-3}+\left(a'_{n-1,n}-a_{n-1,n}\right)c_{n,n-1}-a_{n-1,n+2}c_{n+2,n-1} \\ &\quad +\left(a'_{n-1,n}-a_{n-1,n}\right)c_{n,n-3}a_{n-3,n+2}c_{n+2,n-1}-\left(a'_{n-3,n}-a_{n-3,n}\right)c_{n,n-3}a_{n-1,n+2}c_{n+2,n-1} \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} \gamma &= a'_{n,n+3}c_{n+3,n}(a_{n-2,n+1}c_{n+1,n-2}-1) \\ &\quad -a'_{n,n+1}(c_{n+1,n-2}a_{n-2,n+3}c_{n+3,n}+c_{n+1,n}). \end{aligned}$$

PREUVE DU LEMME 4.9. — On rappelle que l'on dispose de la relation

$$a'_{j,k-3}c_{k-3,k} + a'_{j,k-1}c_{k-1,k} + a'_{j,k+1}c_{k+1,k} + a'_{j,k+3}c_{k+3,k} = 0.$$

Compte tenu des propriétés de parité des coefficients, on trouve

$$\begin{cases} s_{n-3,n-3} = 1 + \left(a'_{n-3,n} - a_{n-3,n}\right) c_{n,n-3}, \\ s_{n-1,n-3} = \left(a'_{n-1,n} - a_{n-1,n}\right) c_{n,n-3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{n-2,n-2} = 1 - a_{n-2,n+1}c_{n+1,n-2}, \\ s_{n,n-2} = -a'_{n,n+1}c_{n+1,n-2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{n-3,n-1} = \left(a'_{n-3,n} - a_{n-3,n}\right) c_{n,n-1} - a_{n-3,n+2}c_{n+2,n-1}, \\ s_{n-1,n-1} = 1 + \left(a'_{n-1,n} - a_{n-1,n}\right) c_{n,n-1} - a_{n-1,n+2}c_{n+2,n-1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{n-2,n} = -a_{n-2,n+1}c_{n+1,n} - a_{n-2,n+3}c_{n+3,n}, \\ s_{n,n} = -a'_{n,n+1}c_{n+1,n} - a'_{n,n+3}c_{n+3,n}. \end{cases}$$

Donc

$$D = \begin{pmatrix} s_{n-3,n-3} & 0 & s_{n-3,n-1} & 0 \\ 0 & s_{n-2,n-2} & 0 & s_{n-2,n} \\ s_{n-1,n-3} & 0 & s_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & s_{n,n-2} & 0 & s_{n,n} \end{pmatrix},$$

d'où

$$\det D = \alpha\gamma,$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= s_{n-3,n-3}s_{n-1,n-1} - s_{n-1,n-3}s_{n-3,n-1}, \\ \gamma &= s_{n-2,n-2}s_{n,n} - s_{n,n-2}s_{n-2,n}. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 + \left(a'_{n-3,n} - a_{n-3,n}\right) c_{n,n-3})(1 + \left(a'_{n-1,n} - a_{n-1,n}\right) c_{n,n-1} - a_{n-1,n+2}c_{n+2,n-1}) \\ &\quad -(\left(a'_{n-1,n} - a_{n-1,n}\right) c_{n,n-3})(\left(a'_{n-3,n} - a_{n-3,n}\right) c_{n,n-1} - a_{n-3,n+2}c_{n+2,n-1}) \\ &= 1 + \left(a'_{n-3,n} - a_{n-3,n}\right) c_{n,n-3} + \left(a'_{n-1,n} - a_{n-1,n}\right) c_{n,n-1} - a_{n-1,n+2}c_{n+2,n-1} \\ &\quad + \left(a'_{n-1,n} - a_{n-1,n}\right) c_{n,n-3}a_{n-3,n+2}c_{n+2,n-1} - \left(a'_{n-3,n} - a_{n-3,n}\right) c_{n,n-3}a_{n-1,n+2}c_{n+2,n-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma &= (1 - a_{n-2,n+1}c_{n+1,n-2})(-a'_{n,n+1}c_{n+1,n} - a'_{n,n+3}c_{n+3,n}) \\ &\quad -(-a'_{n,n+1}c_{n+1,n-2})(-a_{n-2,n+1}c_{n+1,n} - a_{n-2,n+3}c_{n+3,n}) \\ &= a'_{n,n+3}c_{n+3,n}(a_{n-2,n+1}c_{n+1,n-2} - 1) \\ &\quad -a'_{n,n+1}(c_{n+1,n-2}a_{n-2,n+3}c_{n+3,n} + c_{n+1,n}). \end{aligned}$$

Ainsi

$$D^{-1} = (t_{\ell k})_{n-3\le \ell,k\le n} = \begin{pmatrix} \frac{s_{n-1,n-1}}{\alpha} & 0 & -\frac{s_{n-3,n-1}}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{s_{n,n}}{\gamma} & 0 & -\frac{s_{n-2,n}}{\gamma} \\ -\frac{s_{n-1,n-3}}{\alpha} & 0 & \frac{s_{n-3,n-3}}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\frac{s_{n,n-2}}{\gamma} & 0 & \frac{s_{n-2,n-2}}{\gamma} \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} g_{n-2,n-3} &= -c_{n-2,n-3} + \sum_{\ell=n-3,n-1} \left(c_{n-2,\ell} - c_{n-2,n-5}s_{n-5,\ell}\right) t_{\ell,n-3} \\ &= -c_{n-2,n-3} + \frac{1}{\alpha}((c_{n-2,n-3} - c_{n-2,n-5}s_{n-5,n-3})s_{n-1,n-1} \\ &\quad -(c_{n-2,n-1} - c_{n-2,n-5}s_{n-5,n-1})s_{n-1,n-3}), \end{aligned}$$

$$g_{n-1,n-3} = 0,$$

$$\begin{aligned} g_{n,n-3} &= -c_{n,n-3} + \sum_{\ell=n-3,n-1} c_{n\ell} t_{\ell,n-3} \\ &= -c_{n,n-3} + \frac{1}{\alpha}(c_{n,n-3}s_{n-1,n-1} - c_{n,n-1}s_{n-1,n-3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{n-1,n-2} &= -c_{n-1,n-2} + \sum_{\ell=n-2,n} (c_{n-1,\ell} - c_{n-1,n-4}s_{n-4,\ell})t_{\ell,n-2} \\ &= -c_{n-1,n-2} + \frac{1}{\gamma}((c_{n-1,n-2} - c_{n-1,n-4}s_{n-4,n-2})s_{n,n} \\ &\quad -(c_{n-1,n} - c_{n-1,n-4}s_{n-4,n})s_{n,n-2}), \end{aligned}$$

$$g_{n,n-2} = 0$$

et

$$\begin{aligned} g_{n,n-1} &= -c_{n,n-1} + \sum_{\ell=n-3,n-1} c_{n\ell} t_{\ell,n-1} \\ &= -c_{n,n-1} + \frac{1}{\alpha}(c_{n,n-1}s_{n-3,n-3} - c_{n,n-3}s_{n-3,n-1}). \end{aligned}$$

Troisièmement : le cas $\beta = 4$.

Lemme 4.10. — *On a*

$$G = \begin{pmatrix} 0 & g_{2n,2n+1} & 0 \\ g_{2n+1,2n} & 0 & g_{2n+1,2n+2} \\ 0 & g_{2n+2,2n+1} & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} g_{2n+1,2n+2} &= a_{2n+1,2n+2} - \frac{1}{\alpha}(s_{2n+1,2n-1}s_{2n-3,2n-3} - s_{2n+1,2n-3}s_{2n-3,2n-1})a_{2n-1,2n+2}, \\ g_{2n,2n+1} &= a_{2n,2n+1} - \frac{s_{2n,2n-2}a_{2n-2,2n+1}}{1 - a_{2n-2,2n+1}c_{2n+1,2n-2}}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - a_{2n-3,2n}c_{2n,2n-3} - a_{2n-1,2n}c_{2n,2n-1} - a_{2n-1,2n+2}c_{2n+2,2n-1} \\ &\quad + a_{2n-3,2n}c_{2n,2n-3}a_{2n-1,2n+2}c_{2n+2,2n-1} - a_{2n-3,2n}c_{2n,2n-1}a_{2n-1,2n+2}c_{2n+2,2n-3}. \end{aligned}$$

Preuve du lemme 4.10. — On rappelle la relation donnée par le lemme 3.7

$$a_{j,j-3}c_{j-3,k} + a_{j,j-1}c_{j-1,k} + a_{j,j+1}c_{j+1,k} + a_{j,j+3}c_{j+3,k} = \delta_{jk},$$

ainsi

$$s_{jk} = \sum_{\ell=j-3}^{2n-1} a_{j\ell}c_{\ell k} = \delta_{jk} - \sum_{\ell=2n}^{j+3} a_{j\ell}c_{\ell k}.$$

On trouve

$$\left\{\begin{array}{c} s_{2n-3,2n-3} = 1 - a_{2n-3,2n}c_{2n,2n-3}, \\ s_{2n-3,2n-1} = -a_{2n-3,2n}c_{2n,2n-1}, \\ s_{2n-2,2n-2} = 1 - a_{2n-2,2n+1}c_{2n+1,2n-2}, \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{c} s_{2n-1,2n-3} = -a_{2n-1,2n}c_{2n,2n-3} - a_{2n-1,2n+2}c_{2n+2,2n-3}, \\ s_{2n-1,2n-1} = 1 - a_{2n-1,2n}c_{2n,2n-1} - a_{2n-1,2n+2}c_{2n+2,2n-1}, \end{array}\right.$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} s_{2n-3,2n-3} & 0 & s_{2n-3,2n-1} \\ 0 & s_{2n-2,2n-2} & 0 \\ s_{2n-1,2n-3} & 0 & s_{2n-1,2n-1} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\det D = s_{2n-2,2n-2}\left(s_{2n-3,2n-3}s_{2n-1,2n-1} - s_{2n-3,2n-1}s_{2n-1,2n-3}\right).$$

Posons

$$\begin{aligned} \alpha &= s_{2n-3,2n-3}s_{2n-1,2n-1} - s_{2n-3,2n-1}s_{2n-1,2n-3} \\ &= (1 - a_{2n-3,2n}c_{2n,2n-3})(1 - a_{2n-1,2n}c_{2n,2n-1} - a_{2n-1,2n+2}c_{2n+2,2n-1}) \\ &\quad -(-a_{2n-3,2n}c_{2n,2n-1})(-a_{2n-1,2n}c_{2n,2n-3} - a_{2n-1,2n+2}c_{2n+2,2n-3}) \\ &= 1 - a_{2n-3,2n}c_{2n,2n-3} - a_{2n-1,2n}c_{2n,2n-1} - a_{2n-1,2n+2}c_{2n+2,2n-1} \\ &\quad +a_{2n-3,2n}c_{2n,2n-3}a_{2n-1,2n+2}c_{2n+2,2n-1} - a_{2n-3,2n}c_{2n,2n-1}a_{2n-1,2n+2}c_{2n+2,2n-3}. \end{aligned}$$

On a

$$D^{-1} = (t_{\ell k})_{2n-3\leq \ell,k\leq 2n-1} = \begin{pmatrix} \frac{s_{2n-1,2n-1}}{\alpha} & 0 & -\frac{s_{2n-3,2n-1}}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{s_{2n-2,2n-2}} & 0 \\ -\frac{s_{2n-1,2n-3}}{\alpha} & 0 & \frac{s_{2n-3,2n-3}}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} g_{2n+1,2n+2} &= a_{2n+1,2n+2} - (s_{2n+1,2n-1} - s_{2n+1,2n-3}t_{2n-3,2n-3}s_{2n-3,2n-1} \\ &\quad +s_{2n+1,2n-3}t_{2n-3,2n-1}(1 - s_{2n-1,2n-1}) - s_{2n+1,2n-1}t_{2n-1,2n-3}s_{2n-3,2n-1} \\ &\quad +s_{2n+1,2n-1}t_{2n-1,2n-1}(1 - s_{2n-1,2n-1}))a_{2n-1,2n+2} \\ &= a_{2n+1,2n+2} - s_{2n+1,2n-1}a_{2n-1,2n+2} - \frac{1}{\alpha}(-s_{2n+1,2n-3}s_{2n-1,2n-1}s_{2n-3,2n-1} \\ &\quad -s_{2n+1,2n-3}s_{2n-3,2n-1}(1 - s_{2n-1,2n-1}) + s_{2n+1,2n-1}s_{2n-1,2n-3}s_{2n-3,2n-1} \\ &\quad +s_{2n+1,2n-1}s_{2n-3,2n-3}(1 - s_{2n-1,2n-1}))a_{2n-1,2n+2} \\ &= a_{2n+1,2n+2} - s_{2n+1,2n-1}a_{2n-1,2n+2} - \frac{1}{\alpha}(-s_{2n+1,2n-3}s_{2n-3,2n-1} \\ &\quad +s_{2n+1,2n-1}s_{2n-3,2n-3} + s_{2n+1,2n-1}(s_{2n-1,2n-3}s_{2n-3,2n-1} \\ &\quad -s_{2n-3,2n-3}s_{2n-1,2n-1}))a_{2n-1,2n+2} \\ &= a_{2n+1,2n+2} - \frac{1}{\alpha}(s_{2n+1,2n-1}s_{2n-3,2n-3} - s_{2n+1,2n-3}s_{2n-3,2n-1})a_{2n-1,2n+2}, \end{aligned}$$

$$g_{2n,2n+2} = 0$$

et

$$\begin{aligned} g_{2n,2n+1} &= a_{2n,2n+1} - (s_{2n,2n-2} + s_{2n,2n-2}t_{2n-2,2n-2}(1 - s_{2n-2,2n-2}))a_{2n-2,2n+1} \\ &= a_{2n,2n+1} - \left(s_{2n,2n-2} + s_{2n,2n-2}\frac{1 - s_{2n-2,2n-2}}{s_{2n-2,2n-2}}\right)a_{2n-2,2n+1} \\ &= a_{2n,2n+1} - \frac{s_{2n,2n-2}}{s_{2n-2,2n-2}}a_{2n-2,2n+1}. \end{aligned}$$

4.5 Estimation des éléments des matrices G

Dans cette section, nous allons donner des estimations des coefficients g_{jk} à l'aide des équivalents des coefficients a_{jk} et c_{jk} donnés à la section 4.2 de cette partie et des expressions de ces coefficients obtenues à la section 4.4. La difficulté provient du fait que l'on doit diviser par $\det D$ pour calculer les coefficients t_{jk}.

Premièrement : le cas $\beta = 1$, n pair.

Il est facile de voir que pour ce cas les coefficients s_{jk} apparaissant dans les expressions des coefficients g_{jk} sont $O(1)$, d'après les lemmes 4.1 et 4.4.

Lemme 4.11. — *Pour $j,k \in \{n-3,n-2,n-1\}$, on a*

$$g_{jk} = O(n).$$

Preuve du lemme 4.11. — Par le lemme 4.5, on voit qu'il suffit de prouver que $1 - a_{n-2,n+1}c_{n+1,n-2}$ est équivalent à une constante non nulle lorsque $n \to +\infty$. On utilise les lemmes 4.1 et 4.4. On a, avec $\varepsilon = (-1)^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}$

$$\begin{aligned} c_{n+1,n-2} &= \frac{n}{4}\sqrt{-t}\left(\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}\right) + O(1) \\ &= \frac{n}{2}\sqrt{-t}\frac{u}{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}} + O(1). \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} a_{n-2,n+1} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\sqrt{1+u}}{1+u\cos v}\frac{\sin 3v/2}{\sin v/2} - \frac{\sqrt{1-u}}{1+u\cos v}\frac{\cos 3v/2}{\cos v/2}\right)\mathrm{d}v \\ &\quad + \frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(1-u)^{1/2}} + \frac{1}{(1+u)^{1/2}}\right) + \frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right). \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sqrt{1-u}}{1+u\cos v}\frac{\cos 3v/2}{\cos v/2}\mathrm{d}v = \frac{\sqrt{1-u}-\sqrt{1+u}}{u} + \frac{1}{2\sqrt{1+u}}$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sqrt{1+u}}{1+u\cos v}\frac{\sin 3v/2}{\sin v/2}\mathrm{d}v = \frac{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}{u} - \frac{1}{2\sqrt{1-u}}.$$

D'où

$$\begin{aligned} a_{n-2,n+1} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(2\frac{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}{u} - \frac{1}{2\sqrt{1-u}} - \frac{1}{2\sqrt{1+u}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-u}} + \frac{1}{2\sqrt{1+u}}\right) + \frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right) \\ &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(2\frac{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}{u} - \frac{1}{\sqrt{1-u}} + \frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$1 - a_{n-2,n+1}c_{n+1,n-2} = A(u,\varepsilon) + O\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right),$$

avec

$$\begin{aligned}
A(u,\varepsilon) &= 1-\frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}\left(2\frac{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}{u}-\frac{1}{\sqrt{1-u}}+\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}-\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{u}{(1-u)^{1/4}\left(\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}\right)}\left(\frac{1}{(1-u)^{1/4}}-\frac{\varepsilon}{(1+u)^{1/4}}\right)>0
\end{aligned}$$

car $u\in]0,1[$, on obtient le résultat cherché. Afin de conforter nos hypothèses faites à la section 3.5 sur le comportement général de $\det D$, nous allons donner l'équivalent de α, bien qu'ici ce soit inutile pour l'estimation des coefficients g_{jk}. On rappelle que

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1-a_{n-3,n}c_{n,n-3}-a_{n-1,n}c_{n,n-1}-a_{n-1,n+2}c_{n+2,n-1}\\
&\quad +a_{n-3,n}c_{n,n-3}a_{n-1,n+2}c_{n+2,n-1}-a_{n-1,n}c_{n,n-3}a_{n-3,n+2}c_{n+2,n-1}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
c_{n,n-1} &= \frac{n}{4}\sqrt{-t}\left(\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}\right)+O(1),\\
c_{n,n-3} &= \frac{n}{4}\sqrt{-t}\left(\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}\right)+O(1),\\
c_{n+2,n-1} &= \frac{n}{4}\sqrt{-t}\left(\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}\right)+O(1)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
a_{n-1,n} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}+\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right),\\
a_{n-3,n} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-u}}+\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right),\\
a_{n-1,n+2} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-u}}-\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right),\\
a_{n-3,n+2} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}-\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).
\end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
a_{n-1,n} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}}{1+u\cos v}\mathrm{d}v+\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{(1-u)^{1/2}}+\frac{1}{(1+u)^{1/2}}\right)\\
&\quad +\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right),
\end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\frac{1}{1+u\cos v}\mathrm{d}v=\frac{1}{2\sqrt{1-u^2}}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
a_{n-3,n} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\sqrt{1+u}}{1+u\cos v}\frac{\sin 3v/2}{\sin v/2}+\frac{\sqrt{1-u}}{1+u\cos v}\frac{\cos 3v/2}{\cos v/2}\right)\mathrm{d}v\\
&\quad +\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{(1-u)^{1/2}}+\frac{1}{(1+u)^{1/2}}\right)+\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)\\
&= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-u}}+\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
a_{n-1,n+2} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sqrt{1+u}}{1+u\cos v}\frac{\sin 3v/2}{\sin v/2}+\frac{\sqrt{1-u}}{1+u\cos v}\frac{\cos 3v/2}{\cos v/2}\right)\mathrm{d}v\\
&\quad+\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{(1-u)^{1/2}}+\frac{1}{(1+u)^{1/2}}\right)+\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{-\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)\\
&= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-u}}-\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).
\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
a_{n-3,n+2} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sqrt{1+u}}{1+u\cos v}\frac{\sin 5v/2}{\sin v/2}+\frac{\sqrt{1-u}}{1+u\cos v}\frac{\cos 5v/2}{\cos v/2}\right)\mathrm{d}v\\
&\quad+\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{(1-u)^{1/2}}+\frac{1}{(1+u)^{1/2}}\right)+\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{-\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right),
\end{aligned}$$

or

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{1-u}}{1+u\cos v}\frac{\cos 5v/2}{\cos v/2}\mathrm{d}v=\frac{1}{\sqrt{1+u}}\left(\frac{2}{u^2}+\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{1-u}}\left(-\frac{2}{u^2}+\frac{1}{u}+1\right)$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{1+u}}{1+u\cos v}\frac{\sin 5v/2}{\sin v/2}\mathrm{d}v=\frac{1}{\sqrt{1-u}}\left(\frac{2}{u^2}-\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{1+u}}\left(-\frac{2}{u^2}-\frac{1}{u}+1\right).$$

D'où

$$a_{n-3,n+2}=\frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}-\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).$$

Il vient

$$\alpha=B(u,\varepsilon)+O\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right),$$

avec

$$\begin{aligned}
B(u,\varepsilon) &= 1-\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-u}}+\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}-\frac{1}{\sqrt{1-u}}-\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)\\
&\quad-\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}+\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)\\
&\quad+\frac{1}{16}\left(\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}\right)^2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-u}}+\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-u}}-\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)\\
&\quad-\frac{1}{16}\left(\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}+\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}-\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-u}}-\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}+\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)\\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}}-\frac{\varepsilon}{4}\frac{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}}{(1-u^2)^{1/4}}\\
&= \frac{1}{4}\frac{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}}{(1+u)^{1/4}\sqrt{1-u}}\left((1+u)^{1/4}-\varepsilon(1-u)^{1/4}\right)>0.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que dans ce cas $\det D\sim c>0$, lorsque $n\to+\infty$.

<u>Deuxièmement :</u> le cas $\beta=1$, n impair.

Il est facile de voir que pour ce cas les coefficients s_{jk} apparaissant dans les expressions des coefficients g_{jk} sont $O(\sqrt{n})$, d'après les lemmes 4.1, 4.2 et 4.4.

Lemme 4.12. — *Pour $j,k\in\{n-3,n-2,n-1\}$, on a*

$$g_{jk}=O(n)$$

et pour $j \in \{n-3, n-2, n-1\}$, on a

$$g_{jn} = -g_{nj} = O(\sqrt{n}).$$

PREUVE DU LEMME 4.12. — Par le lemme 4.6, on voit, en utilisant les lemmes 4.1,4.2 et 4.4, que

$$\begin{aligned}\alpha &= a'_{n-3,n}c_{n,n-3}(1-a_{n-1,n+2}c_{n+2,n-1})\\ &\quad +a'_{n-1,n}(c_{n,n-1}+c_{n,n-3}a_{n-3,n+2}c_{n+2,n-1})+O(1)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\gamma &= a'_{n,n+3}c_{n+3,n}(a_{n-2,n+1}c_{n+1,n-2}-1)\\ &\quad -a'_{n,n+1}(c_{n+1,n-2}a_{n-2,n+3}c_{n+3,n}+c_{n+1,n}).\end{aligned}$$

On veut montrer que α et γ se comporte comme $c\sqrt{n}$, avec $c \neq 0$. On commence par α. On a, avec $\varepsilon = (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$

$$\begin{aligned}a'_{n,n-3} &= \frac{1}{\sqrt{2n}}\frac{1}{(-t)^{1/4}}\left(\frac{-\varepsilon}{(1-u)^{1/4}}+\frac{1}{(1+u)^{1/4}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right),\\ a'_{n,n-1} &= \frac{1}{\sqrt{2n}}\frac{1}{(-t)^{1/4}}\left(\frac{\varepsilon}{(1-u)^{1/4}}+\frac{1}{(1+u)^{1/4}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right).\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}c_{n,n-3} &= \frac{n}{2}\sqrt{-t}\frac{u}{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}+O(1),\\ c_{n+2,n-1} &= \frac{n}{2}\sqrt{-t}\frac{u}{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}+O(1),\\ c_{n,n-1} &= \frac{n}{2}\sqrt{-t}\frac{u}{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}}+O(1).\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}a_{n-1,n+2} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}\left(\frac{2}{u}+2\right)+\frac{1}{\sqrt{1-u}}\left(-\frac{2}{u}+1\right)+\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right),\\ a_{n-3,n+2} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}\left(\frac{4}{u^2}-\frac{2}{u}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{1+u}}\left(-\frac{4}{u^2}-\frac{2}{u}+2\right)\right)\\ &\quad +\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{-\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).\end{aligned}$$

En effet

$$\begin{aligned}a_{n-3,n+2} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sqrt{1+u}}{1+u\cos v}\frac{\sin 5v/2}{\sin v/2}-\frac{\sqrt{1-u}}{1+u\cos v}\frac{\cos 5v/2}{\cos v/2}\right)\mathrm{d}v\\ &\quad +\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-u)^{1/2}}+\frac{1}{(1+u)^{1/2}}\right)+\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{-\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right),\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}a_{n-3,n+2} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}\left(\frac{2}{u^2}-\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{1+u}}\left(-\frac{2}{u^2}-\frac{1}{u}+1\right)\right)\\ &\quad -\frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}\left(\frac{2}{u^2}+\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{1-u}}\left(-\frac{2}{u^2}+\frac{1}{u}+1\right)\right)\\ &\quad +\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-u)^{1/2}}+\frac{1}{(1+u)^{1/2}}\right)+\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{-\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)\\ &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}\left(\frac{4}{u^2}-\frac{2}{u}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{1+u}}\left(-\frac{4}{u^2}-\frac{2}{u}+2\right)\right)\\ &\quad +\frac{1}{n\sqrt{-t}}\frac{-\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\alpha = \sqrt{n}(-t)^{1/4}A(u,\varepsilon) + O(n^{1/6}),$$

avec

$$\begin{aligned}
A(u,\varepsilon) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\varepsilon}{(1-u)^{1/4}} - \frac{1}{(1+u)^{1/4}}\right)\frac{u}{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}} \\
&+\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{-\varepsilon}{(1-u)^{1/4}} + \frac{1}{(1+u)^{1/4}}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}\right)^2 \\
&\times\left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}\left(\frac{2}{u}+2\right) + \frac{1}{\sqrt{1-u}}\left(-\frac{2}{u}+1\right) + \frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right) \\
&-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\varepsilon}{(1-u)^{1/4}} + \frac{1}{(1+u)^{1/4}}\right)\frac{u}{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}} \\
&-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\varepsilon}{(1-u)^{1/4}} + \frac{1}{(1+u)^{1/4}}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}\right)^2 \\
&\times\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}\left(\frac{4}{u^2}-\frac{2}{u}-1\right) + \frac{1}{\sqrt{1+u}}\left(-\frac{4}{u^2}-\frac{2}{u}+2\right) + \frac{-\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right).
\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
A(u,\varepsilon) &= \frac{-1}{2\sqrt{2}}\left((1+u)^{1/4} - \varepsilon(1-u)^{1/4}\right) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{(1+u)^{1/4}}\left(\frac{u}{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}\right)^2 \\
&\times\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}\left(\frac{4}{u^2}-2\right) + \frac{1}{\sqrt{1+u}}\left(-\frac{4}{u^2}-\frac{4}{u}\right) + \frac{-2\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right) \\
&-\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{\varepsilon}{(1-u)^{1/4}}\left(\frac{u}{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}\right)^2 \\
&\times\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}\left(\frac{4}{u^2}-\frac{4}{u}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+u}}\left(-\frac{4}{u^2}+4\right)\right) \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{2}}\frac{u^2\left((1+u)^{1/4} - \varepsilon\,(1-u)^{1/4}\right)}{\sqrt{1-u^2}\left(\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}\right)^2} < 0,
\end{aligned}$$

car $u\in]0,1[$, ce qui donne le résultat cherché. Pour γ, on a

$$\begin{aligned}
a'_{n,n+3} &= \frac{1}{\sqrt{2n}}\frac{1}{(-t)^{1/4}}\left(\frac{\varepsilon}{(1-u)^{1/4}} + \frac{1}{(1+u)^{1/4}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right), \\
a'_{n,n+1} &= \frac{1}{\sqrt{2n}}\frac{1}{(-t)^{1/4}}\left(\frac{-\varepsilon}{(1-u)^{1/4}} + \frac{1}{(1+u)^{1/4}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
c_{n+3,n} &= \frac{n}{2}\sqrt{-t}\frac{u}{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}} + O\left(1\right), \\
c_{n+1,n-2} &= \frac{n}{2}\sqrt{-t}\frac{u}{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}} + O\left(1\right), \\
c_{n+1,n} &= \frac{n}{2}\sqrt{-t}\frac{u}{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}} + O\left(1\right).
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
a_{n-2,n+1} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-u}} + \frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right), \\
a_{n-2,n+3} &= \frac{1}{n\sqrt{-t}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}} + \frac{-\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\gamma = \sqrt{n}(-t)^{1/4}B(u,\varepsilon) + O(n^{1/6}),$$

avec

$$\begin{aligned} B(u,\varepsilon) \quad = \quad & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\varepsilon}{(1-u)^{1/4}}+\frac{1}{(1+u)^{1/4}}\right)\frac{u}{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}} \\ & +\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\varepsilon}{(1-u)^{1/4}}+\frac{1}{(1+u)^{1/4}}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}}\right)^2 \\ & \times\left(\frac{-1}{\sqrt{1-u}}+\frac{\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right) \\ & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-\varepsilon}{(1-u)^{1/4}}+\frac{1}{(1+u)^{1/4}}\right)\frac{u}{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}} \\ & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-\varepsilon}{(1-u)^{1/4}}+\frac{1}{(1+u)^{1/4}}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}}\right)^2 \\ & \times\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}+\frac{-\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right). \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} B(u,\varepsilon) \quad = \quad & \frac{-1}{2\sqrt{2}}\left((1+u)^{1/4}-\varepsilon(1-u)^{1/4}\right) \\ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(1+u)^{1/4}}\left(\frac{u}{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}}\right)^2 \\ & \times\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}+\frac{-\varepsilon}{(1-u^2)^{1/4}}\right) \\ = \quad & \frac{-1}{2\sqrt{2}}\frac{(1+u)^{1/4}-\varepsilon\,(1-u)^{1/4}}{\sqrt{1-u^2}} < 0, \end{aligned}$$

car $u \in]0,1[$, on obtient le résultat cherché.

Troisièmement : le cas $\beta = 4$.

Il est facile de voir que pour ce cas les coefficients s_{jk} apparaissant dans les expressions des coefficients g_{jk} sont $O(1)$, d'après les lemmes 4.1, 4.2 et 4.4.

Lemme 4.13. — *Pour $j,k \in \{2n,2n+1,2n+2\}$, on a*

$$g_{jk} = O(n).$$

Preuve du lemme 4.13. — Par les lemmes 4.5 et 4.7, il est facile de voir que les coefficients s_{jk} apparaissant dans les expressions des coefficients g_{jk} sont $O(1)$. Il suffit de prouver que

$$1 - a_{2n-2,2n+1}c_{2n+1,2n-2}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha \quad = \quad & 1 - a_{2n-3,2n}c_{2n,2n-3} - a_{2n-1,2n}c_{2n,2n-1} - a_{2n-1,2n+2}c_{2n+2,2n-1} \\ & + a_{2n-3,2n}c_{2n,2n-3}a_{2n-1,2n+2}c_{2n+2,2n-1} - a_{2n-3,2n}c_{2n,2n-1}a_{2n-1,2n+2}c_{2n+2,2n-3} \end{aligned}$$

sont équivalents à des constantes non nulles lorsque $n \to +\infty$. On pose $\varepsilon = (-1)^n$ et on commence par

$$1 - a_{2n-2,2n+1}c_{2n+1,2n-2}.$$

On a
$$a_{2n-2,2n+1} = -a_{2n+1,2n-2} = \frac{n}{4}\sqrt{-2t}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}u} + \sqrt{1-\sqrt{2}u}\right) + O\left(1\right)$$
et
$$\begin{aligned} c_{2n+1,2n-2} &= \frac{1}{n\sqrt{-2t}}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}u}}{1+\sqrt{2}u\cos v}\frac{\sin 3v/2}{\sin v/2} - \frac{\sqrt{1-\sqrt{2}u}}{1+\sqrt{2}u\cos v}\frac{\cos 3v/2}{\cos v/2}\right)\mathrm{d}v \\ &\quad + \frac{1}{n\sqrt{-2t}}\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(1-\sqrt{2}u)^{1/2}} + \frac{1}{(1+\sqrt{2}u)^{1/2}}\right) - \frac{1}{n\sqrt{-2t}}\frac{\varepsilon}{(1-2u^2)^{1/4}} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right) \\ &= \frac{-1}{n\sqrt{-2t}}\left(2\frac{\sqrt{1-\sqrt{2}u} - \sqrt{1+\sqrt{2}u}}{\sqrt{2}u} + \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}} + \frac{\varepsilon}{(1-2u^2)^{1/4}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right). \end{aligned}$$
Ainsi
$$1 - a_{2n-2,2n+1}c_{2n+1,2n-2} = A(u,\varepsilon) + O\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right),$$
avec
$$\begin{aligned} A(u,\varepsilon) &= 1 + \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}u} + \sqrt{1-\sqrt{2}u}\right) \\ &\quad \times \left(2\frac{\sqrt{1-\sqrt{2}u} - \sqrt{1+\sqrt{2}u}}{\sqrt{2}u} + \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}} + \frac{\varepsilon}{(1-2u^2)^{1/4}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}u} + \sqrt{1-\sqrt{2}u}}{\left(1-\sqrt{2}u\right)^{1/4}}\left(\frac{1}{\left(1-\sqrt{2}u\right)^{1/4}} + \frac{\varepsilon}{\left(1+\sqrt{2}u\right)^{1/4}}\right) > 0, \end{aligned}$$
car $u \in]0,1/\sqrt{2}[$, ce qui donne le résultat cherché. Pour α, on a
$$\begin{aligned} a_{2n-1,2n} &= \frac{n}{4}\sqrt{-2t}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}u} + \sqrt{1-\sqrt{2}u}\right) + O\left(1\right), \\ a_{2n-3,2n} &= \frac{n}{4}\sqrt{-2t}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}u} - \sqrt{1-\sqrt{2}u}\right) + O\left(1\right), \\ a_{2n-1,2n+2} &= \frac{n}{4}\sqrt{-2t}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}u} - \sqrt{1-\sqrt{2}u}\right) + O\left(1\right) \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} c_{2n,2n-1} &= \frac{1}{n\sqrt{-2t}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}} - \frac{\varepsilon}{(1-2u^2)^{1/4}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right), \\ c_{2n,2n-3} &= \frac{1}{n\sqrt{-2t}}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}} - \frac{\varepsilon}{(1-2u^2)^{1/4}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right), \\ c_{2n+2,2n-1} &= \frac{1}{n\sqrt{-2t}}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}} + \frac{\varepsilon}{(1-2u^2)^{1/4}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right), \\ c_{2n+2,2n-3} &= \frac{1}{n\sqrt{-2t}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}} + \frac{\varepsilon}{(1-2u^2)^{1/4}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right). \end{aligned}$$
Ainsi
$$\alpha = B(u,\varepsilon) + O\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right),$$

avec

$$
\begin{aligned}
B(u,\varepsilon) &= 1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}u}-\sqrt{1-\sqrt{2}u}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}}+\frac{\varepsilon}{(1-2u^2)^{1/4}}\right) \\
&\quad +\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}u}+\sqrt{1-\sqrt{2}u}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}}+\frac{\varepsilon}{(1-2u^2)^{1/4}}\right) \\
&\quad +\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}u}-\sqrt{1-\sqrt{2}u}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}}-\frac{\varepsilon}{(1-2u^2)^{1/4}}\right) \\
&\quad +\frac{1}{16}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}u}-\sqrt{1-\sqrt{2}u}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}}+\frac{\varepsilon}{(1-2u^2)^{1/4}}\right) \\
&\quad \times\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}}-\frac{\varepsilon}{(1-2u^2)^{1/4}}\right)-\frac{1}{16}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}u}-\sqrt{1-\sqrt{2}u}\right)^2 \\
&\quad \times\left(\frac{-1}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}}+\frac{\varepsilon}{(1-2u^2)^{1/4}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}}-\frac{\varepsilon}{(1-2u^2)^{1/4}}\right) \\
&= 1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}u}-\sqrt{1-\sqrt{2}u}\right)\frac{2}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}} \\
&\quad +\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}u}+\sqrt{1-\sqrt{2}u}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}}+\frac{\varepsilon}{(1-2u^2)^{1/4}}\right) \\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}u}}{\sqrt{1-\sqrt{2}u}}+\frac{\varepsilon}{4}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}u}+\sqrt{1-\sqrt{2}u}}{(1-2u^2)^{1/4}} \\
&= \frac{1}{4}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}u}+\sqrt{1-\sqrt{2}u}}{(1+\sqrt{2}u)^{1/4}\sqrt{1-\sqrt{2}u}}\left((1+\sqrt{2}u)^{1/4}+\varepsilon(1-\sqrt{2}u)^{1/4}\right)>0,
\end{aligned}
$$

car $u\in]0,1/\sqrt{2}[$, ce qui donne le résultat cherché.

4.6 Résultats sur les régimes asymptotiques global et local

Dans cette section, nous donnons les résultats concernant le régime asymptotique les matrices aléatoires étudiées dans cette partie. Commençons par rappeler quelques définitions. On note $\rho_n(\lambda) = p_{1\beta}^{(n)}(\lambda)$ la densité de probabilité marginale d'une valeur propre, la densité d'états $\rho(\lambda)$, si elle existe, est définie par la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\rho_n(\lambda)=\rho(\lambda)$$

et on appelle spectre, le support de la densité d'états $\rho(\lambda)$. L'étude de cette quantité relève de l'étude du régime global. Nous étudierons aussi deux quantités relatives au régime local, à savoir la statistique locale des valeurs propres à l'intérieur et au bord du spectre. Ces quantités sont définies comme suit. On rappelle d'abord que la probabilité $R_n(\Delta)$ qu'un intervalle Δ ne contienne aucune valeur propre est donnée par

$$R_n(\Delta)=\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\int_{\Delta^\ell}\mathrm{Qdet}\,\left(\sigma_{n\beta}(\lambda_p,\lambda_q)\right)_{1\le p,q\le\ell}\mathrm{d}\lambda_1\ldots\mathrm{d}\lambda_\ell.$$

La statistique locale des valeurs propres à l'intérieur du spectre est alors définie comme la limite, si elle existe, de $R_n(\Delta)$, avec $\Delta=\left(\lambda_0,\lambda_0+\frac{t}{n\rho_n(\lambda_0)}\right)$, où λ_0 est tel que $\rho(\lambda_0)\neq 0$ et t est un réel positif fixé et celle au bord du spectre comme la limite, si elle existe, de $R_n(\Delta)$, avec $\Delta=\left(\lambda_0-\frac{s}{cn^{2/3}},\lambda_0+\frac{t}{cn^{2/3}}\right)$, où λ_0 est un point du bord du spectre et s,t et c sont des réels positifs fixés.

Pour étudier ces trois quantités, nous utiliserons les formules des noyaux matriciels que nous avons obtenues dans la troisième partie. Ces formules comportent deux parties : une partie principale qui fait intervenir le noyau reproduisant et une partie asymptotiquement négligeable qui fait intervenir les éléments de la matrice G et quelques coefficients supplémentaires simples à estimer. Pour la partie principale, faisant intervenir le noyau reproduisant, le travail est presque totalement réalisé dans [2], il suffit juste de remarquer que l'on peut dériver et intégrer les formules asymptotiques. En effet, le noyau reproduisant intervient pour des classes de matrices aléatoires unitairement invariante (le cas $\beta = 2$) et le comportement asymptotique (universel) du noyau reproduisant est bien étudié dans ce cadre : voir [11] et [5]. Pour la partie négligeable, nous avons fait le travail préparatoire nécessaire dans les sections 4.2, 4.3 et 4.4 de cette partie.

<u>Premièrement :</u> le cas $\beta = 1$.

Théorème 4.1. — *Considérons les matrices aléatoires à loi orthogonalement invariante (1.1), avec $V(\lambda) = \frac{t\lambda^2}{4} + \frac{g\lambda^4}{8}$, tel que $g > 0$, $t < 0$ et $\omega_{cr} = t^2/4g > 1$, alors on a les résultats suivants.*
(i) La densité d'états existe et vaut

$$\rho(\lambda) = \frac{g|\lambda|}{2\pi}\sqrt{\max\left(0, \left(\lambda^2 - Z_1^2\right)\left(\lambda^2 - Z_2^2\right)\right)},$$

avec

$$Z_1 = \left(\frac{-t - 2\sqrt{g}}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad Z_2 = \left(\frac{-t + 2\sqrt{g}}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) La statistique locale des valeurs propres à l'intérieur du spectre est donnée par

$$\lim_{n\to+\infty} R_n\left(\left(\lambda_0, \lambda_0 + \frac{t}{n\rho_n(\lambda_0)}\right)\right) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}\int_0^t \cdots \int_0^t \mathrm{Qdet}\,\left(\tau_1(x_p, x_q)\right)_{1\le p,q\le \ell} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_\ell,$$

avec

$$\tau_1(x,y) = \begin{pmatrix} s(x-y) & -s'(x-y) \\ \int_0^{x-y} s(u)\,\mathrm{d}u - \varepsilon(x-y) & s(x-y) \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

et où t est un réel positif fixé et λ_0 est tel que $\rho(\lambda_0) \neq 0$, i.e.

$$\lambda_0 \in (-Z_2, -Z_1) \cup (Z_1, Z_2).$$

Plus précisément, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n\rho_n(\lambda_0))^k}\,\mathrm{Qdet}\,\left(\sigma_{n1}\left(\lambda_0 + \frac{x_p}{n\rho_n(\lambda_0)}, \lambda_0 + \frac{x_q}{n\rho_n(\lambda_0)}\right)\right)_{1\le p,q\le k} = \mathrm{Qdet}\,\left(\tau_1(x_p, x_q)\right)_{1\le p,q\le k}$$

uniformément pour $(x_p)_{1\le p\le k}$ dans un compact de $\mathbb{R}^k$.
(iii) La statistique locale des valeurs propres au bord du spectre est donnée par

$$\lim_{n\to+\infty} R_n\left(\left(Z_j - \frac{s}{c_j n^{2/3}}, Z_j + \frac{t}{c_j n^{2/3}}\right)\right) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}\int_{-s}^t \cdots \int_{-s}^t \mathrm{Qdet}\,\left(\theta_1(x_p, x_q)\right)_{1\le p,q\le \ell} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_\ell,$$

avec

$$\theta_1(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) & -\frac{\partial a}{\partial y}(x,y) \\ \int_0^{x-y} a(u,y)\,\mathrm{d}u - \varepsilon(x-y) & a(x,y) \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad a(x,y) = \frac{\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}'(y) - \mathrm{Ai}'(x)\mathrm{Ai}(y)}{x-y}$$

et où s, t sont des réels positifs fixés et

$$c_j = (-1)^j 2^{1/3}\sqrt{g} Z_j.$$

Plus précisément, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(c_j n^{2/3}\right)^k}\,\mathrm{Qdet}\,\left(\sigma_{n1}\left(Z_j + \frac{x_p}{c_j n^{2/3}}, Z_j + \frac{x_q}{c_j n^{2/3}}\right)\right)_{1\le p,q\le k} = \mathrm{Qdet}\,\left(\theta_1(x_p, x_q)\right)_{1\le p,q\le k}$$

uniformément pour $(x_p)_{1\le p\le k}$ dans un compact de $\mathbb{R}^k$.

Deuxièmement : le cas $\beta = 4$.

Théorème 4.2. — *Considérons les matrices aléatoires à loi symplectiquement invariante (1.1), avec $V(\lambda) = \frac{t\lambda^2}{2} + \frac{g\lambda^4}{4}$, tel que $g > 0$, $t < 0$ et $\omega_{cr} = t^2/4g > 2$, alors on a les résultats suivants.*
(i) La densité d'états existe et vaut

$$\rho(\lambda) = \frac{g|\lambda|}{4\pi}\sqrt{\max\left(0, \left(\lambda^2 - Z_1^2\right)\left(\lambda^2 - Z_2^2\right)\right)},$$

avec

$$Z_1 = \left(\frac{-t - 2\sqrt{2g}}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \quad et \quad Z_2 = \left(\frac{-t + 2\sqrt{2g}}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) La statistique locale des valeurs propres à l'intérieur du spectre est donnée par

$$\lim_{n\to+\infty} R_n\left(\left(\lambda_0, \lambda_0 + \frac{t}{n\rho_n(\lambda_0)}\right)\right) = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\int_0^t\cdots\int_0^t \mathrm{Qdet}\ \left(\tau_4(x_p, x_q)\right)_{1\le p,q\le\ell}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_\ell,$$

avec

$$\tau_4(x,y) = \begin{pmatrix} s(2(x-y)) & -s'(2(x-y)) \\ \int_0^{2(x-y)} s(u)\,\mathrm{d}u & s(2(x-y)) \end{pmatrix}, \quad où \quad s(x) = \frac{\sin\pi x}{\pi x}$$

et où t est un réel positif fixé et λ_0 est tel que $\rho(\lambda_0) \neq 0$, i.e.

$$\lambda_0 \in (-Z_2, -Z_1) \cup (Z_1, Z_2).$$

Plus précisément, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n\rho_n(\lambda_0))^k}\,\mathrm{Qdet}\ \left(\sigma_{n4}\left(\lambda_0 + \frac{x_p}{n\rho_n(\lambda_0)}, \lambda_0 + \frac{x_q}{n\rho_n(\lambda_0)}\right)\right)_{1\le p,q\le k} = \mathrm{Qdet}\ \left(\tau_4(x_p, x_q)\right)_{1\le p,q\le k}$$

uniformément pour $(x_p)_{1\le p\le k}$ dans un compact de $\mathbb{R}^k$.
(iii) La statistique locale des valeurs propres au bord du spectre est donnée par

$$\lim_{n\to+\infty} R_n\left(\left(Z_j - \frac{s}{c_j n^{2/3}}, Z_j + \frac{t}{c_j n^{2/3}}\right)\right) = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\int_{-s}^t\cdots\int_{-s}^t \mathrm{Qdet}\ \left(\theta_4(x_p, x_q)\right)_{1\le p,q\le\ell}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_\ell,$$

avec

$$\theta_4(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) & -\frac{\partial a}{\partial y}(x,y) \\ \int_0^{x-y} a(u,y)\,\mathrm{d}u & a(x,y) \end{pmatrix}, \quad où \quad a(x,y) = \frac{\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}'(y) - \mathrm{Ai}'(x)\mathrm{Ai}(y)}{x-y}$$

et où s, t sont des réels positifs fixés et

$$c_j = (-1)^j\sqrt{2g}Z_j.$$

Plus précisément, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(c_j n^{2/3}\right)^k}\,\mathrm{Qdet}\ \left(\sigma_{n4}\left(Z_j + \frac{x_p}{c_j n^{2/3}}, Z_j + \frac{x_q}{c_j n^{2/3}}\right)\right)_{1\le p,q\le k} = \mathrm{Qdet}\ \left(\theta_4(x_p, x_q)\right)_{1\le p,q\le k}$$

uniformément pour $(x_p)_{1\le p\le k}$ dans un compact de $\mathbb{R}^k$.

4.7 Preuves des résultats

Preuve du théorème 4.2. — Pour cette preuve, rappelons la forme du noyau matriciel

$$\sigma_{n1}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} S_n(\lambda,\mu) & D_n(\lambda,\mu) \\ J_n(\lambda,\mu) & S_n^T(\lambda,\mu) \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} D_n(\lambda,\mu) &= -\frac{\partial K_n}{\partial \mu}(\lambda,\mu) - M_n(\lambda,\mu), \\ S_n(\lambda,\mu) &= K_n(\lambda,\mu) + (\varepsilon_\mu \star M_n)(\lambda,\mu) + \alpha_n(\lambda), \\ J_n(\lambda,\mu) &= (\varepsilon_\lambda \star K_n)(\lambda,\mu) - \varepsilon(\lambda-\mu) + \varepsilon_\lambda \star (\varepsilon_\mu \star M_n)(\lambda,\mu) + (\varepsilon \star \alpha_n)(\lambda) - (\varepsilon \star \alpha_n)(\mu), \end{aligned}$$

où

$$M_n(\lambda,\mu) = G_n(\lambda,\mu) - H_n(\lambda,\mu)$$

est donc de la forme (en fait, ici $d = 3$) d'après les lemmes 4.11 et 4.12

$$M_n(\lambda,\mu) = \sum_{p,q=-d}^{d-1} m_{pq}^{(n)} \psi_{n+p}(\lambda)\, \psi_{n+q}(\mu), \quad \text{avec} \quad m_{pq}^{(n)} = O(n)$$

et (en fait, lorsque n est pair $\alpha_n = 0$)

$$\alpha_n(\lambda) = \sum_{p=-d}^{-1} b_{n+p,n} \psi_{n+p}(\lambda), \quad \text{avec} \quad b_{n+p,n} = O\left(\sqrt{n}\right).$$

(i) Montrons l'existence de la densité d'états. Les formules exprimant les densités de probabilité marginale et le noyau matriciel donnent

$$\rho_n(\lambda) = \frac{1}{n} S_n(\lambda,\lambda) = \frac{1}{n} K_n(\lambda,\lambda) + \frac{1}{n}(\varepsilon_\mu \star M_n)(\lambda,\lambda) + \frac{1}{n}\alpha_n(\lambda),$$

d'après le travail effectué dans [2] pour le noyau reproduisant, pour obtenir le résultat il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(\varepsilon_\mu \star M_n)(\lambda,\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\alpha_n(\lambda) = 0$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Or, compte des formules ci-dessus et du lemme 4.3, on a les estimations uniformes suivantes

$$\left| \frac{1}{n}(\varepsilon_\mu \star M_n)(\lambda,\mu) \right| \le \sum_{p,q=-d}^{d} \left| \frac{1}{n} m_{pq}^{(n)} \right| |\psi_{n+p}(\lambda)| \left| (\varepsilon \star \psi_{n+q})(\mu) \right| = O(1/\sqrt{n}) \tag{4.3}$$

et

$$\left| \frac{1}{n}\alpha_n(\lambda) \right| \le \sum_{p=-d}^{-1} \left| \frac{1}{n} b_{n+p,n} \right| |\psi_{n+p}(\lambda)| = O(1/\sqrt{n}) \tag{4.4}$$

qui donnent le résultat.

(ii) Nous allons étudier le comportement asymptotique des trois quantités $D_n(\lambda,\mu)$, $S_n(\lambda,\mu)$ et $J_n(\lambda,\mu)$ pour le régime local à l'intérieur du spectre. Soit λ_0 tel que $\rho(\lambda_0) \neq 0$, posons $x_n = \frac{x}{n\rho_n(\lambda_0)}$ et $y_n = \frac{y}{n\rho_n(\lambda_0)}$. Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\rho_n(\lambda_0)} S_n(\lambda_0 + x_n, \lambda_0 + y_n) = s(x-y),$$

d'après ce que l'on sait du cas $\beta = 2$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\rho_n(\lambda_0)} K_n\left(\lambda_0 + x_n,\lambda_0 + y_n\right) = s(x-y)$$

uniformément en (x,y) dans un compact de $\mathbb{R}^2$. Pour obtenir le résultat cherché, on doit montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\rho_n(\lambda_0)} \left(\varepsilon_\mu \star M_n\right)\left(\lambda_0 + x_n,\lambda_0 + y_n\right) = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\rho_n(\lambda_0)} \alpha_n(\lambda_0 + x_n) = 0.$$

ce qui découlent des estimations (4.3) et (4.4). Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n\rho_n(\lambda_0))^2} D_n\left(\lambda_0 + x_n,\lambda_0 + y_n\right) = -s'(x-y).$$

D'après les résultats de [2], on peut dériver les formules, il vient

$$\frac{-1}{(n\rho_n(\lambda_0))^2}\frac{\partial K_n}{\partial \mu}\left(\lambda_0 + x_n,\lambda_0 + y_n\right) = \frac{-1}{n\rho_n(\lambda_0)}\frac{\partial K_n}{\partial y}\left(\lambda_0 + x_n,\lambda_0 + y_n\right),$$

ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{(n\rho_n(\lambda_0))^2}\frac{\partial K_n}{\partial \mu}\left(\lambda_0 + x_n,\lambda_0 + y_n\right) = -s'(x-y).$$

Donc, il suffit de voir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n\rho_n(\lambda_0))^2} M_n\left(\lambda_0 + x_n,\lambda_0 + y_n\right) = 0,$$

or, on voit facilement que

$$M_n\left(\lambda,\mu\right) = O(n),$$

uniformément, ce qui donne le résultat. Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} J_n\left(\lambda_0 + x_n,\lambda_0 + y_n\right) = \int_0^{x-y} s(u)\mathrm{d}u - \varepsilon(x-y).$$

Pour cela, on utilise l'antisymétrie de $J_n(\lambda,\mu)$ qui donne $J_n(\lambda,\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On va étudier la limite de

$$J_n\left(\lambda_0 + x_n,\lambda_0 + y_n\right) - J_n\left(\lambda_0 + y_n,\lambda_0 + y_n\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_\lambda \star K_n)(\lambda,\mu) &= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\lambda} K_n(\nu,\mu)\mathrm{d}\nu - \int_{\lambda}^{+\infty} K_n(\nu,\mu)\mathrm{d}\nu\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\lambda} K_n(\nu,\mu)\mathrm{d}\nu - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(\nu,\mu)\mathrm{d}\nu,
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon_\lambda \star K_n)(\lambda_0 + x_n,\lambda_0 + y_n) - (\varepsilon_\lambda \star K_n)(\lambda_0 + y_n,\lambda_0 + y_n) \\
= &\int_{-\infty}^{\lambda_0 + x_n} K_n(\nu,\lambda_0 + y_n)\mathrm{d}\nu - \int_{-\infty}^{\lambda_0 + y_n} K_n(\nu,\lambda_0 + y_n)\mathrm{d}\nu \\
= &\int_{\lambda_0 + y_n}^{\lambda_0 + x_n} K_n(\nu,\lambda_0 + y_n)\mathrm{d}\nu = \frac{1}{n\rho_n(\lambda_0)}\int_y^x K_n(\lambda_0 + \frac{u}{n\rho_n(\lambda_0)},\lambda_0 + \frac{y}{n\rho_n(\lambda_0)})\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}((\varepsilon_\lambda\star K_n)(\lambda_0+x_n,\lambda_0+y_n)-(\varepsilon_\lambda\star K_n)(\lambda_0+y_n,\lambda_0+y_n))$$
$$=\int_y^x s(u-y)\mathrm{d}u=\int_0^{x-y}s(u)\mathrm{d}u.$$

De plus

$$\varepsilon(\lambda_0+x_n-\lambda_0-y_n)=\varepsilon(x-y).$$

Pour conclure, il reste à prouver que

$$\lim_{n\to+\infty}(\varepsilon_\lambda\star(\varepsilon_\mu\star M_n)(\lambda_0+x_n,\lambda_0+y_n)-\varepsilon_\lambda\star(\varepsilon_\mu\star M_n)(\lambda_0+y_n,\lambda_0+y_n))=0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}((\varepsilon\star\alpha_n)(\lambda_0+x_n)-(\varepsilon\star\alpha_n)(\lambda_0+y_n))=0.$$

On a

$$\begin{aligned}&|\varepsilon_\lambda\star(\varepsilon_\mu\star M_n)(\lambda_0+x_n,\lambda_0+y_n)-\varepsilon_\lambda\star(\varepsilon_\mu\star M_n)(\lambda_0+y_n,\lambda_0+y_n)|\\ \leq&\sum_{p,q=-d}^{d}\left|m_{pq}^{(n)}\right|\left|\varepsilon\star\psi_{n+p}\left(\lambda_0+x_n\right)-\varepsilon\star\psi_{n+p}\left(\lambda_0+y_n\right)\right|\left|\left(\varepsilon\star\psi_{n+q}\right)\left(\lambda_0+y_n\right)\right|\\ \leq&\sum_{p,q=-d}^{d}O(\sqrt{n})\left|\varepsilon\star\psi_{n+p}\left(\lambda_0+x_n\right)-\varepsilon\star\psi_{n+p}\left(\lambda_0+y_n\right)\right|=O(1/\sqrt{n})\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}&\left|\varepsilon\star\psi_{n+p}\left(\lambda_0+x_n\right)-\varepsilon\star\psi_{n+p}\left(\lambda_0+y_n\right)\right|\\ =&\left|\int_{\lambda_0+y_n}^{\lambda_0+x_n}\psi_{n+p}\right|=O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

De manière similaire

$$|(\varepsilon\star\alpha_n)(\lambda_0+x_n)-(\varepsilon\star\alpha_n)(\lambda_0+y_n)|=O(1/\sqrt{n}),$$

ainsi, on a le résultat.

(iii) On constate donc que le noyau matriciel admet une limite avec une normalisation non homogène. Cependant comme nous devons montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(n\rho_n\left(\lambda_0\right)\right)^k}\operatorname{Qdet}\left(\sigma_{n1}\left(\lambda_0+\frac{x_p}{n\rho_n\left(\lambda_0\right)},\lambda_0+\frac{x_q}{n\rho_n\left(\lambda_0\right)}\right)\right)_{1\leq p,q\leq k}=\operatorname{Qdet}\left(\tau_1\left(x_p,x_q\right)\right)_{1\leq p,q\leq k}$$

uniformément pour $(x_p)_{1\leq p\leq k}$ dans un compact de $\mathbb{R}^k$, il suffit de voir que dans l'expression du déterminant quaternionique les termes antidiagonaux sont toujours multipliés entre eux en nombres égaux. Compte tenu de la formule algébrique qui définit le déterminant quaternionique $\operatorname{Qdet}(q_{rs})_{1\leq r,s\leq k}$, il suffit de prouver que la propriété tient pour

$$\frac{1}{\left(n\rho_n\left(\lambda_0\right)\right)^\ell}\operatorname{Tr}(q_{p_1p_2}q_{p_2p_3}\cdots q_{p_\ell p_1}),$$

notons

$$q_{p_ip_{i+1}}=\left(\begin{array}{cc}a_{11}^{(i)}&a_{12}^{(i)}\\a_{21}^{(i)}&a_{22}^{(i)}\end{array}\right),$$

alors

$$\mathrm{Tr}(q_{p_1p_2}q_{p_2p_3}\cdots q_{p_\ell p_1}) = \sum_{s_1,\ldots,s_\ell=1}^{2} a^{(1)}_{s_1s_2}\cdots a^{(\ell)}_{s_\ell s_1}.$$

Il faut prouver qu'il y a autant de termes $a^{(i)}_{12}$ que de termes $a^{(j)}_{21}$ (i et j ne comptant pas) dans la somme ci-dessus. Or une telle suite d'indices est formée de la façon suivante $(s_1s_2)(s_2s_3)(s_3s_4)\cdots(s_\ell s_1)$ où $s_1s_2s_3s_4\cdots s_\ell$ est une suite quelconque de 1 et de 2. Une récurrence assure alors du résultat. On prend pour hypothèse de récurrence : *pour ℓ entier ≥ 1, il y a autant de* (12) *que de* (21). Pour $\ell = 1$, pas de tel couple, donc c'est vrai. Montrons que si l'hypothèse de récurrence est vraie pour les entiers $\leq \ell$, alors elle est vraie pour $\ell+1$. Considérons une suite de $\ell+1$ couples. Premier cas, si le dernier couple est (11) ou (22) alors on a une suite de la forme

$$(1\cdot)\cdots(\cdot 1)(11) \quad \text{ou} \quad (2\cdot)\cdots(\cdot 2)(22)$$

et on peut appliquer l'hypothèse à la suite des ℓ premiers couples. Deuxième cas, si le dernier couple est (12) ou (21) alors quitte à inverser les rôles de 1 et 2, on peut prendre (21) alors on a une suite de la forme

$$(1\cdot)\cdots(\cdot 2)(21)$$

qui plus précisément est de la forme

$$(1\cdot)\cdots(\cdot 1)(12)(22)\cdots(22)(21),$$

où le nombre de (22) consécutifs devant le dernier couple (21) peut être nul ; on peut alors appliquer l'hypothèse à la suite notée

$$(1\cdot)\cdots(\cdot 1)$$

ci-dessus et on obtient le résultat.

(iv) Pour finir, on doit prouver que l'on peut passer à la limite dans

$$\begin{aligned} & R_n\left(\left(\lambda_0,\lambda_0+\frac{s}{n\rho_n(\lambda_0)}\right)\right) \\ = & \sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\int_0^s\cdots\int_0^s \mathrm{Qdet}\left(\widetilde{\sigma_{n1}}\left(\lambda_0+\frac{x_p}{n\rho_n(\lambda_0)},\lambda_0+\frac{x_q}{n\rho_n(\lambda_0)}\right)\right)_{1\leq p,q\leq \ell}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_\ell, \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{\sigma_{n1}}\left(\lambda_0+\frac{x_p}{n\rho_n(\lambda_0)},\lambda_0+\frac{x_q}{n\rho_n(\lambda_0)}\right)$$

est le noyau avec sa normalisation inhomogène et où l'on dérive et intègre par rapport aux x_p. Posons

$$d^{(n)}_\ell = \frac{(-1)^\ell}{\ell!}\int_0^s\cdots\int_0^s \mathrm{Qdet}\left(\widetilde{\sigma_{n1}}\left(\lambda_0+\frac{x_p}{n\rho_n(\lambda_0)},\lambda_0+\frac{x_q}{n\rho_n(\lambda_0)}\right)\right)_{1\leq p,q\leq \ell}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_\ell,$$

si $0\leq \ell\leq n$ et $d^{(n)}_\ell = 0$ si $\ell > n$. Alors,

$$R_n\left(\left(\lambda_0,\lambda_0+\frac{s}{n\rho_n(\lambda_0)}\right)\right) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} d^{(n)}_\ell.$$

De plus, pour tout $\ell\in\mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} d^{(n)}_\ell = d_\ell,$$

où

$$d_\ell = \frac{(-1)^\ell}{\ell!}\int_0^s\cdots\int_0^s \mathrm{Qdet}\,\left(\tau_1(x_p,x_q)\right)_{1\leq p,q\leq \ell}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_\ell.$$

Enfin, comme la convergence

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{\sigma_{n1}} \left(\lambda_0 + \frac{x}{n\rho_n(\lambda_0)}, \lambda_0 + \frac{y}{n\rho_n(\lambda_0)}\right) = \tau_1(x,y)$$

est uniforme sur $(0,s)^2$ et que les éléments de $\tau_1(x,y)$ sont des fonctions bornées sur $(0,s)$, on en déduit que les éléments de $\widetilde{\sigma_{n1}} \left(\lambda_0 + \frac{x}{n\rho_n(\lambda_0)}, \lambda_0 + \frac{y}{n\rho_n(\lambda_0)}\right)$ sont bornés par une constante $C > 0$. Ainsi, en appliquant l'inégalité d'Hadamard, on obtient

$$\left| \mathrm{Qdet} \left(\widetilde{\sigma_{n1}} \left(\lambda_0 + \frac{x_p}{n\rho_n(\lambda_0)}, \lambda_0 + \frac{x_q}{n\rho_n(\lambda_0)} \right) \right)_{1\le p,q\le \ell} \right| \le \left(2\ell C^2\right)^{\ell/2},$$

d'où

$$\left| d_\ell^{(n)} \right| \le \frac{s^\ell}{\ell!} \left(2\ell C^2\right)^{\ell/2}.$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente, donc, en appliquant le théorème de convergence dominé, on obtient le résultat.

(v) Pour le comportement au bord du spectre, on procède comme précédemment. D'après les résultats de [2] sur le noyau reproduisant, on sait que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_j n^{2/3}} K_n \left(Z_j + \frac{x}{c_j n^{2/3}}, Z_j + \frac{y}{c_j n^{2/3}} \right) = a(x,y).$$

Il suffit donc de montrer que les termes complémentaires dans l'expression du noyau matriciel sont négligeables. En procédant comme ci-dessus, on trouve

$$\frac{1}{\left(c_j n^{2/3}\right)^2} \|M_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = O\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right),$$

$$\frac{1}{c_j n^{2/3}} \|\varepsilon_\mu \star M_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = O\left(\frac{1}{n^{1/6}}\right)$$

et

$$\frac{1}{c_j n^{2/3}} \|\alpha_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = O\left(\frac{1}{n^{1/6}}\right).$$

Enfin, on a, uniformément en x et y,

$$\left| \varepsilon_\lambda \star (\varepsilon_\mu \star M_n) \left(Z_j + \frac{x}{c_j n^{2/3}}, Z_j + \frac{y}{c_j n^{2/3}} \right) - \varepsilon_\lambda \star (\varepsilon_\mu \star M_n) \left(Z_j + \frac{y}{c_j n^{2/3}}, Z_j + \frac{y}{c_j n^{2/3}} \right) \right| = O\left(\frac{1}{n^{1/6}}\right)$$

et

$$\left| (\varepsilon \star \alpha_n) \left(Z_j + \frac{x}{c_j n^{2/3}} \right) - (\varepsilon \star \alpha_n) \left(Z_j + \frac{y}{c_j n^{2/3}} \right) \right| = O\left(\frac{1}{n^{1/6}}\right).$$

Ce qui donne le résulat cherché.

Preuve du théorème 4.3. — Pour le cas $\beta = 4$, la preuve est similaire à celle du cas $\beta = 1$.

Références

[1] M. Abramowitz, I.A. Stegun, (Eds.), *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York, 1968.

[2] P. Bleher, A. Its, *Semi-classical asymptotics of orthogonal polynomials, Riemann-Hilbert problem and universality in the matrix model*, Ann. of Math., 150, (1999), 185-266.

[3] N. Bleistein, R.A. Handelsman, *Asymptotic expansions of integrals*, Dover, New York, 1986.

[4] A. Boutet de Monvel, L. Pastur, M. Shcherbina, *On the statistical mechanics approach to the random matrix theory: the integrated density of states*, J.Stat.Phys., **79**, 585-611 (1995).

[5] P. Deift, T. Kriecherbauer, K.T-R. McLaughlin, S. Venakides and X. Zhou, *Asymptotics for polynomial orthogonal with respect to varying exponential weight*, Inter. Math. Res. Notes, **16**, 759–782 (1997).

[6] P. DiFrancesco, P.Ginsparg, J.Zinn-Justin, *2D gravity and random matrices*, Phys.Reports, **254**, 1-133 (1995).

[7] K. Johansson, *On fluctuation of eigenvalues of random Hermitian matrices*, Duke Math. J., **91**, 151–204 (1998).

[8] M.L. Mehta, *Random matrices, and the statistical theory of energy levels*, Academic Press, New York, 1967.

[9] M.L. Mehta, *Matrix theory, selected topics and useful results*, Les Éditions de physique, France, 1989.

[10] M.L. Mehta, *Random matrices*, Academic Press, New York, 1991.

[11] L. Pastur, M. Shcherbina, *Universality of the local eigenvalue statistics for a class of unitary invariant random matrix ensembles*, J.Stat.Phys., **86**, 109-147 (1997).

[12] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, AMS., Providence, 1939.

[13] C.A. Tracy, H. Widom, *Correlation Functions, cluster functions and spacing distributions for random matrices*, J.Stat.Phys., **92**, 809-835 (1998).

[14] H. Widom, *On the relation between orthogonal, symplectic and unitary matrix ensembles*, J.Stat.Phys., **94**, 347-364 (1999).