Fonctions de Liouville et solutions continues d'équations elliptiques semilinéaires

Khalifa El Mabrouk

Abstract : We study semilinear elliptic equations of the form (E) $\Delta u = \Psi(\cdot, u)\mu$. For every positive harmonic function h on a Green domain $X \subset \mathbb{R}^d$, we give a characterization of Kato measures on X such that the trivial solution is the unique one of (E) dominated by h. Solutions of (E) with boundary data a positive harmonic function are also studied.

1 Introduction

1.1. Définitions et notations : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, nous désignons par $\mathcal{C}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{B}(\Omega)$) l'espace de fonctions réelles continues (resp. numériques boréliennes) sur Ω. Si $\mathcal{A}$ est un ensemble de fonctions numériques, nous noterons par $\mathcal{A}^+$ (resp. $\mathcal{A}_b$) l'ensemble formé par les éléments positifs (resp. bornés) de $\mathcal{A}$. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit de Green si Ω admet une fonction de Green G_Ω ($\Delta G_\Omega(\cdot, y) = -\varepsilon_y$ pour tout $y \in \Omega$, où ε_y désigne la mesure de Dirac concentrée au point y). Si Ω est relativement compact, il est connu (voir [7]) qu'une fonction $f \in \mathcal{B}(\partial\Omega)$ est résolutive si et seulement si elle est intégrable par rapport à une mesure harmonique ω_x^Ω pour un point $x \in \Omega$ (et par suite pour tout point de Ω). Dans ce cas on notera par

$$H_\Omega f(x) = \int_{\partial\Omega} f(z)\, d\omega_x^\Omega(z).$$

Nous rappelons que si $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ et si Ω est un ouvert régulier, alors $H_\Omega f$ est l'unique fonction harmonique sur Ω prolongeant f par continuité sur $\overline{\Omega}$. L'espace de fonctions harmoniques, l'ensemble de fonctions surharmoniques, et le cône de potentiels sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, seront notés respectivement par $\mathcal{H}(\Omega), \mathcal{S}(\Omega), \mathcal{P}(\Omega)$.

Soit X un domaine (ouvert et connexe) de Green ; par $\mathcal{O}_r$ nous désignerons l'ensemble constitué par tout ouvert borné D régulier pour l'opérateur de Laplace tel que $\overline{D} \subset X$. Dans ce travail, nous considérons des équations elliptiques semilinéaires de type

$$\Delta u = \Psi(\cdot, u)\mu, \tag{1.1}$$

où μ est une mesure positive (localement) de Kato sur X (on écrit $\mu \in \mathbb{K}_{loc}^+$), i.e, μ est une mesure de Radon sur X telle que pour tout $\Omega \in \mathcal{O}_r$, $\int_\Omega G_\Omega(\cdot, y)\, d\mu(y)$ est un potentiel réel et continu sur Ω ; et Ψ est une fonction réelle définie et continue sur $X \times \mathbb{R}$ (voir le sous-pargraphe 1.4).

Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ${}^{\mu}\mathcal{U}(\Omega)$ désigne l'ensemble formé par toute les fonctions continues sur Ω qui sont solutions de (1.1) au sens des distributions sur Ω. Si $h \in \mathcal{H}^+(\Omega)$, par ${}^{\mu}\mathcal{U}_h(\Omega)$ nous notons l'ensemble de fonctions $u \in {}^{\mu}\mathcal{U}(\Omega)$ vérifiant $|u| \leq h$. La réunion d'ensembles ${}^{\mu}\mathcal{U}_h(\Omega)$ lorsque h décrit $\mathcal{H}^+(\Omega)$, sera notée par ${}^{\mu}\mathcal{U}_{\mathcal{H}}(\Omega)$. Une autre classe de fonctions que nous considérons dans ce travail est

$$ {}^{\mu}\mathcal{H}(\Omega) := \{h \in \mathcal{H}(\Omega) : \text{il existe } \; u \in {}^{\mu}\mathcal{U}_{\mathcal{H}}(\Omega); u + K_{\Omega}^{\mu} u = h\}, $$

où K_{Ω}^{μ} est l'opérateur (non-linéaire) défini sur $\mathcal{B}(\Omega)$ par

$$ K_{\Omega}^{\mu} f(\cdot) = \int_{\Omega} G_{\Omega}(\cdot, y) \Psi(y, f(y)) \, d\mu(y). \tag{1.2} $$

1.2. Position du problème : Étant données une mesure $\mu \in \mathbb{K}_{loc}^+$, et une fonction h harmonique positive sur X ; l'objet de ce travail et de répondre à la question suivante : Qu'elles conditions nécessaires et suffisantes qui doivent être vérifiées par h et μ, pour qu'il existe au moins une fonction $u \in {}^{\mu}\mathcal{U}(X)$ non identiquement nulle sur X et dominée par h ?

Dans le cas linéaire où $X = \mathbb{R}^d$ et $\Psi(\cdot, u) = u$, ce problème est étudié par Batty [2] en utilisant des méthodes probabilistes. Des résultats dans la même direction ont prouvés par Arendt, Batty et Bénilan dans [1]. En 1998, Grigor'yan et Hansen ont envisagé dans [11] le cas général où X est un espace harmonique.

Il est parfois possible de trouver $u \in {}^{\mu}\mathcal{U}^+(X)$ vérifiant

$$ u(x) + \int_X G_X(x, y) \Psi(y, u(y)) \, d\mu(y) = h(x), \; x \in X. \tag{1.3} $$

Nous proposons dans ce travail une caractérisation des mesures $\mu \in \mathbb{K}_{loc}^+$ telles que l'équation intégrale (1.3) admet une solution. Lorsque $\Psi(\cdot, u) = u|u|^{\alpha - 1}$, μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et X est un domaine borné suffisamment régulier, l'équation (1.3) est étudiée par Dynkin et Kuznetsov [10] pour $1 < \alpha \leq 2$; ils considèrent la fonction u comme l'unique solution du problème

$$ \Delta u = u|u|^{\alpha - 1} \quad \text{sur X} \tag{1.4} $$
$$ u = \nu \quad \text{sur } \partial\text{X}, \tag{1.5} $$

où ν est l'unique mesure de Radon sur la frontière ∂X de X vérifiant

$$ h = P\nu := \int_{\partial X} P(\cdot, z) \, d\nu(z). \tag{1.6} $$

Ici, P désigne un noyau de Martin défini sur $X \times \partial X$.

En appliquant des outils purement analytiques, le système d'équations (1.4) et (1.5) est étudié par Marcus et Véron dans [17] pour $1 < \alpha < (d+1)/(d-1)$, et dans [18] pour $\alpha \geq (d+1)/(d-1)$.

1.3. Résultat principal : Soit $h \in \mathcal{H}^+(X)$. Une mesure $\mu \in \mathbb{K}_{loc}^+$ sera dite *h-petite* (resp. *h-grande*) si $h \in {}^{\mu}\mathcal{H}(X)$ (resp. ${}^{\mu}\mathcal{U}_h(X) = \{0\}$). Nous remarquons que "$\mu$ est h-grande" signifie que l'unique solution continue de (1.1) dominée par

h est la solution nulle. Tandis que, "μ est h-petite" si et seulement si l'équation intégrale (1.3) admet une (qui sera l'unique) solution.

En général, le fait que la mesure μ n'est pas h-grande n'implique pas qu'elle est h-petite, et réciproquement. Cependant, si la fonction h est minimale (dans le sens que toute fonction harmonique positive majorée par h est le produit de h par une constante positive), nous montrerons que toute mesure $\mu \in \mathbb{K}_{loc}^{+}$ est h-grande ou bien h-petite (voir corollaire 4.6).

Dans le but de caractériser les mesure h-petites et les mesure h-grandes, nous introduisons les définitions suivantes. On dira qu'un ensemble $A \subset X$ est *h-épais* (resp. *h-effilé*) si $\hat{R}^A h = h$ (resp. $\hat{R}^A h \in \mathcal{P}(X)$), où $\hat{R}^A h$ est définie en tout point $y \in X$ par

$$\hat{R}^A h(y) = \liminf_{x \longrightarrow y} R^A h(x).$$

Si $s \in \mathcal{S}^+(X)$, $R^A s := \inf\{v \in \mathcal{S}^+(X) : v \geq s \ \text{ sur X}\}$. Nous démontrerons le résultat suivant.

THÉORÈME 1.1 *Soit une mesure $\mu \in \mathbb{K}_{loc}^{+}$ et soit h une fonction harmonique positive sur X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) μ est $h-$petite (resp. non$-h-$grande).

(ii) Il existe un ouvert $A \subset X$ tel que, A est $h-$effilé (resp. non$-h-$épais), et $K_X^{\nu} h$ est un potentiel continu sur X où $\nu = 1_{X \setminus A}\mu$.

(iii) Il existe deux mesures $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}_{loc}^{+}$ telles que, $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $K_X^{\mu_1} h < \infty$, et $\mu_2(X \setminus A) = 0$ où $A \subset X$ est un ensemble borélien $h-$effilé (resp. non$-h-$épais).

Notre résultat représente une généralisation du [11, Theorem 4.1] aux cas semilinéaires considérés dans ce travail.

Si $\mu \in \mathbb{K}_{loc}^{+}$; nous démontrerons que toute fonction harmonique positive sur X se décompose d'une manière unique en une somme de deux fonctions $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^+(X)$ telles que μ est h_1-petite et h_2-grande.

1.4. Fonction Ψ. Pour simplifier, le lecteur peut considérer Ψ comme la fonction définie sur $X \times \mathbb{R}$ par $\Psi(x,t) = t|t|^{\alpha-1}$ où $\alpha \geq 1$. Cependant, notre travail est développé pour toute fonction Ψ continue sur $X \times \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$\mathcal{P}1$. Pour tout $x \in X$, $\Psi(x, \cdot)$ est impaire strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\mathcal{P}2$. Pour tout $x \in X$, $\Psi(x, t+s) \geq \Psi(x,t) + \Psi(x,s)$ si $t, s \geq 0$.

$\mathcal{P}3$. Il existe $\kappa > 0$ tel que $\Psi(x, 2t) \leq \kappa\, \Psi(x,t)$, pour tout $t \geq 0$, $x \in X$.

$\mathcal{P}4$. Pour tout $r > 0$, il existe $\Upsilon = \Upsilon(r) > 0$ tel que : Quel que soit $x \in X$

$$|\Psi(x,t) - \Psi(x,s)| \leq \Upsilon\, |t-s|, \ \text{ si t, s} \in [\text{−r, r}]$$

Il est à signaler que les propriétés précédentes sont satisfaites pour toute fonction Ψ de la forme $\Psi(x,t) = \xi(x)\, \text{sgn}(t)\, M(|t|)$, où M est une N-fonction satisfaisant à la condition Δ_2 (voir [14]), et ξ est une fonction continue positive et bornée sur X. Ici, $\text{sgn}(t) = 1$ si $t \geq 0$, et $\text{sgn}(t) = -1$ si $t < 0$.

1.4. Plan du travail. Ces pages sont organisées de la façon suivante. Le paragraphe 2 est consacré à l'étude des solutions de l'équation semiliéaire (1.1) ; nous prouvons que $(X, {}^{\mu}\mathcal{U})$ est un espace harmonique semilinéaire dans un sens généralisant la notion d'espaces harmoniques introduites dans [3] (ou [8]). Avant de démontrer le théorème (1.1) dans le dernier paragraphe, nous introduisons au sein du paragraphe 3 les opérateurs L^μ et Q^μ, puis nous établissons dans ce même paragraphe quelques propriétés de ces deux opérateurs. La classe ${}^\mu\mathcal{H}^+(X)$ sera étudiée dans le paragraphe 4.

2 Perturbations semilinéaires

Soient $\mu \in \mathbb{K}_{loc}^+$, $\Omega \subset X$ un ouvert (nous rappelons que $X \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine de Green), et soit $f \in \mathcal{B}^+(\Omega)$. Il est clair que si $K_\Omega^\mu f < \infty$ sur Ω, alors $K_\Omega^\mu f$ est un potentiel sur Ω. Par suite, $K_\Omega^\mu f \in \mathcal{P}(\Omega) - \mathcal{P}(\Omega)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ telle que $K_\Omega^\mu |f| < \infty$ sur Ω. Supposons que $\Omega \in \mathcal{O}_r$ et $f \in \mathcal{B}_b(\Omega)$, alors $K_\Omega^\mu f \in \mathcal{C}_b(\Omega)$. Si $D \in \mathcal{O}_r$ tel que $D \subset\subset \Omega$, i.e., D est un ouvert borné vérifiant $\overline{D} \subset \Omega$, alors il est facile de vérifier que

$$K_D^\mu f = K_\Omega^\mu f - H_D K_\Omega^\mu f, \tag{2.1}$$

ce qui permet de conclure que

$$\lim_{x \in D, x \to z} K_D^\mu f(x) = 0, \quad z \in \partial D. \tag{2.2}$$

D'autre part pour tout $r > 0$, on peut trouver $p \in \mathcal{P}(\Omega) \cap \mathcal{C}_b(\Omega)$ tel que

$$0 \leq K_\Omega^\mu f - K_\Omega^\mu g \leq K_p(f-g), \tag{2.3}$$

pour tout $f, g \in B(0,r) = \{u \in \mathcal{B}_b(\Omega) : \sup_{x\in\Omega} |u(x)| < r\}$ vérifiant $f \geq g$. Ici K_p désigne le noyau du potentiel associé à p (voir [6]). Ainsi, en vertu de (2.1) et (2.3), on conclut ([19], voir aussi [16]) que $I_\Omega + K_\Omega^\mu$ (I_Ω désigne l'identité dans $\mathcal{B}(\Omega)$) est bijective de $\mathcal{B}_b(\Omega)$ sur lui même. En outre, si $f, g \in \mathcal{B}_b(\Omega)$ alors pour tout $x \in \Omega$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) + K_\Omega^\mu f(x) > g(x) + K_\Omega^\mu g(x). \tag{2.4}$$

PROPOSITION 2.1 (*Principe de comparaison 1*) *Soit un ouvert $\Omega \subset X$ et soient deux fonctions $f, g \in \mathcal{B}(\Omega)$ telles que $f > -\infty$, $g < \infty$ et $K_\Omega^\mu|f|$, $K_\Omega^\mu|g| < \infty$. Supposons que $u - v \in \mathcal{S}(\Omega)$, où $u = f + K_\Omega^\mu f$ et $v = g + K_\Omega^\mu g$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(*i*) $u - v \geq 0$ *sur* Ω

(*ii*) $f - g \geq 0$ *sur* Ω

(*iii*) $\liminf_{x \longrightarrow z} [f(x) - g(x)] \geq 0$ *pour tout* $z \in \partial\Omega$.

Démonstration. Désignons par $h = \Psi(\cdot, f) - \Psi(\cdot, g)$, $p = \int_\Omega G_\Omega(\cdot, y) h^+(y)\, d\mu(y)$ et $q = \int_\Omega G_\Omega(\cdot, y) h^-(y)\, d\mu(y)$. Alors $p, q \in \mathcal{P}(\Omega)$, et

$$u - v + q = f - g + p \quad \text{sur} \ \ \Omega.$$

Les implications $(ii) \Rightarrow (iii)$ et $(iii) \Rightarrow (i)$ sont triviales. Démontrons alors $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit $s = u - v + q$, alors s est une fonction surharmonique positive sur Ω dominant le potentiel p sur $E := \{x \in \Omega : f(x) - g(x) \geq 0\}$. Or la croissance de $\Psi(x, \cdot)$ entraîne que le support harmonique de p est inclus dans E. Ainsi, le principe de domination (voir[9, page 67]) assure que $s \geq p$ sur Ω, d'où $f - g \geq 0$ sur Ω. $\square$

En supposant que $f, g \in \mathcal{B}_b(\Omega)$, la proposition précédente est démontrée dans [19] pour une classe plus large de perturbations semilinéaires. Cependant, nous remarquons que la croissance de $\Psi(x, \cdot)$ (ou bien de K_U en utilisant les notations de [19]) ne permet pas seulement d'étendre ce principe de comparaison à une classe de fonctions boréliennes plus large que $\mathcal{B}_b(\Omega)$, mais elle permet aussi d'obtenir une démonstration rapide que nous voyons plus simple que la preuve de l'implication (1) $\Rightarrow$ (3) dans [19, Theorem 2.1].

Pour des fonctions continues, nous aurons besoin parfois de la version suivante du principe de comparaison démontrée dans [5]. Afin de convaincre le lecteur, nous répétons la démonstration.

PROPOSITION 2.2 (*Principe de comparaison 2*) *Soit $\Omega \subset X$ un ouvert relativement compact, et soient $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$ tels que $\Delta f - \Psi(\cdot, f)\mu \leq \Delta g - \Psi(\cdot, g)\mu$ au sens des distributions sur Ω. Si $\liminf\limits_{x \longrightarrow z}[f(x) - g(x)] \geq 0$ pour tout point $z \in \partial\Omega$, alors $f - g \geq 0$ sur Ω.*

Démonstration. Soient $u = f - g$ et $D = \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$. Si $f - g \ngeq 0$ sur Ω, alors D est un ouvert non vide de Ω. On a, $\liminf_{x \longrightarrow z} u(x) \geq 0$ pour tout $z \in \partial D$, et $\Delta u \leq 0$ sur D. Ainsi, $u(x) \geq 0$ pour tout $x \in D$. Ce qui nous amène à une contradiction. $\square$

THÉORÈME 2.3 *Soit $\Omega \in \mathcal{O}_r$ et soit f une fonction continue sur $\partial\Omega$, alors il existe une et une seule fonction dans ${}^{\mu}\mathcal{U}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ qui coïncide avec f sur $\partial\Omega$. Notons cette fonction par $U^{\mu}_{\Omega}f$, alors $U^{\mu}_{\Omega}f + K^{\mu}_{\Omega}U^{\mu}_{\Omega}f = H_{\Omega}f$. En outre si $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ vérifiant $f \geq g$, alors $U^{\mu}_{\Omega}f \geq U^{\mu}_{\Omega}g$.*

Démonstration. Comme $I_{\Omega} + K^{\mu}_{\Omega}$ est bijective dans $\mathcal{B}_b(\Omega)$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{B}_b(\Omega)$ vérifiant $u + K^{\mu}_{\Omega}u = H_{\Omega}f$. Il est trivial que u est continue sur Ω. D'autre part il est connu que $H_{\Omega}f = f$ sur $\partial\Omega$, d'où en tenant compte de (2.2), $\lim_{x \to z} u(x) = f(z)$ pour tout $z \in \partial\Omega$. Par un calcul élémentaire nous pouvons vérifier que u est une solution de (1.1) dans Ω. Enfin si $f \geq g$, le principe de comparaison assure que $U^{\mu}_{\Omega}f \geq U^{\mu}_{\Omega}g$. $\square$

Soit $\Omega \in \mathcal{O}_r$, pour tout $f \in \mathcal{B}_b(\partial\Omega)$ nous noterons également par $U^{\mu}_{\Omega}f$ l'unique antécédent de $H_{\Omega}f$ par $I_{\Omega} + K^{\mu}_{\Omega}$. Si f est une fonction borélienne localement bornée sur $\mathbb{R}^d$ nous définissons

$$U^{\mu}_{\Omega}f(x) = \begin{cases} U^{\mu}_{\Omega}(f_{/\partial\Omega})(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ f(x) & \text{si } x \in X \backslash \Omega. \end{cases}$$

REMARQUE. (Axiomatique de la théorie du potentiel non-linéaire) Un faisceau harmonique sur un espace topologique localement compact X est défini (voir [3, 7, 8, 4]) comme une application $\mathcal{F}$ associant à chaque ouvert $\Omega \subset X$ une partie $\mathcal{F}(\Omega)$ de $\mathcal{C}(\Omega)$, de telle sorte que les propriétés suivantes sont satisfaites.

$\mathcal{F}1$. Pour tout ouvert Ω de X, $\mathcal{F}(\Omega)$ est un **sous espace vectoriel** de $\mathcal{C}(\Omega)$.

$\mathcal{F}2$. Si D, Ω sont deux ouverts de X tels que $D \subset \Omega$, alors $\mathcal{F}(\Omega)_{/D} \subset \mathcal{F}(D)$.

$\mathcal{F}3$. Si $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ où Ω_i est un ouvert de X quel que soit $i \in I$, alors
$f \in \mathcal{F}(\Omega)$ si et seulement si $f_{/\Omega_i} \in \mathcal{F}(\Omega_i)$ pour tout $i \in I$.
Si de plus, les propriétés $(i)-(iv)$ du théorème 2.4 qui suit (en remplaçant ${}^\mu\mathcal{U}$ par $\mathcal{F}$) sont satisfaites, on dira que $(X, \mathcal{F})$ est un espace harmonique.

Nous appelons un *faisceau harmonique semilinéaire* sur X toute application $\mathcal{F}$ définie sur l'ensemble d'ouverts de X comme ci-dessus, vérifiant les propriétés $\mathcal{F}2$ et $\mathcal{F}3$ précédentes et la propriété $\mathcal{F}'1$ suivante.

$\mathcal{F}'1$. Pour tout ouvert $\Omega \subset X$, $0 \in \mathcal{F}(\Omega)$, et $-f \in \mathcal{F}(\Omega)$ si $f \in \mathcal{F}(\Omega)$.
On dira qu'un ouvert relativement compact $\Omega \subset X$ est *$\mathcal{F}$-régulier* si

(a) pour tout $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, il existe une fonction unique dans $\mathcal{F}(\Omega)$ notée $F_\Omega f$ prolongeant f par continuité sur $\overline{\Omega}$.

(b) si $f, g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ vérifiant $f \leq g$, alors $F_\Omega f \leq F_\Omega g$.
L'espace X muni d'un faisceau harmonique semilinéaire est dit *harmonique (semiliéaire)* si les propriétés $(i)-(iv)$ du théorème suivant sont vérifiées. Pour plus de détails sur l'axiomatique de la théorie du potentiel non-linéaire, le lecteur peut voir [15] et [13, chapitre 16].

THÉORÈME 2.4 *Soit un ouvert $\Omega \subset X$. On a :*

(0) *$u \in {}^\mu\mathcal{U}(\Omega)$ si et seulement si $u + K_D^\mu u \in \mathcal{H}(\Omega)$, pour tout $D \subset\subset \Omega$.*

(i) *${}^\mu\mathcal{U}$ est un faisceau harmonique semilinéaire sur X.*

(ii) *X admet une base $\mathcal{O}$ d'ouverts ${}^\mu\mathcal{U}-$réguliers vérifiant $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{O}$ si $D_1, D_2 \in \mathcal{O}$.*

(iii) *Pour tout $x \in X$, on peut trouver un voisinage ouvert D de x et une fonction $u \in {}^\mu\mathcal{U}(D)$ vérifiant $u(x) \neq 0$.*

(iv) *Si (u_n) est une suite croissante de fonctions de ${}^\mu\mathcal{U}(\Omega)$ telle que $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ est localement bornée sur Ω, alors $u \in {}^\mu\mathcal{U}(\Omega)$.*

Démonstration. L'assertion (i) est une conséquence de (0). Cette dernière peut être facilement vérifiée. L'existence d'une base $\mathcal{O}$ vérifiant les propriétés indiquées dans (ii) est assurée par le théorème 2.3. (iii) : Soit $D \in \mathcal{O}_r$ tel que $x \in D$; d'après (2.4) la fonction $u = U_D^\mu 1$ est strictement positive sur D. (iv) : En tenant compte de (i), il suffit de montrer que $u \in {}^\mu\mathcal{U}(D)$ pour tout $D \subset\subset \Omega$. Considérons un ouvert $D \subset\subset \Omega$ et soit $h_n = u_n + K_D^\mu u_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Alors (h_n) est une suite croissante de fonctions harmoniques sur D. Or, le fait que u est localement bornée sur Ω entraîne que (h_n) est bornée sur D et

$$u + K_D^\mu u = h \quad \text{sur } D.$$

Par suite, d'après (0), $u \in {}^\mu\mathcal{U}(D)$. □

PROPOSITION 2.5 *Soit un ouvert $\Omega \subset X$, et soit (u_n) une suite de fonctions de ${}^\mu\mathcal{U}(\Omega)$ uniformément bornées localement sur Ω. Alors on peut extraire de (u_n) une suite convergeant uniformément localement sur Ω.*

Démonstration. Soient deux ouverts V, D tels que $V \subset\subset D \subset\subset \Omega$, et soit $h_n = u_n + K_D^\mu u_n$; $n \geq 1$. Il existe $M > 0$ tel que $\sup_{x \in \overline{D}} |u_n(x)| \leq M$, pour tout $n \geq 1$. Par suite (h_n) est une suite de fonctions harmoniques uniformément bornées sur D, donc elle admet une sous-suite $(h_{n_k})_k$ convergeant uniformément sur $\overline{V}$. D'autre part, pour tout $n \geq 1$

$$K_D^\mu u_n = K_D^\mu u_n^+ - K_D^\mu u_n^-, \quad \text{et} \;\; K_D^\mu u_n^-,\, K_D^\mu u_n^+ \prec M\Upsilon(M) \int_D G_D(\cdot, y)\, d\mu(y).$$

Donc, d'après [12], $\{K_D^\mu u_{n_k}; k \geq 1\}$ est une famille équicontinue. D'où, en vertu du théorème d'Ascoli, on peut extraire de (u_{n_k}) une sous-suite (v_k) telle que $(K_D^\mu v_k)$ converge uniformément sur $\overline{V}$. Or, pour tout $k \geq 1$, $v_k = g_k - K_D^\mu v_k$ où (g_k) est une sous-suite de (h_{n_k}) ; par suite (v_k) converge uniformément sur $\overline{V}$ vers une fonction v qui sera bien-sur dans ${}^\mu\mathcal{U}(V)$. Ainsi, on a démontré que pour tout ouvert relativement compact $V \subset\subset \Omega$, on peut extraire de (u_n) une sous-suite (v_n) convergeant uniformément sur $\overline{V}$. Pour démontrer le résultat énoncé par la proposition, on considère une suite d'ouverts relativement compacts réguliers (Ω_n) vérifiant $\Omega_n \subset\subset \Omega_{n+1} \subset\subset \Omega$ et $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} \Omega_n$. On extrait tout d'abord une sou-suite $(u_n^{(1)})$ de (u_n) qui converge uniformément sur $\overline{\Omega}_1$. Puis on extrait de $(u_n^{(1)})$ une suite $(u_n^{(2)})$ convergeant uniformément sur $\overline{\Omega}_2$. Ainsi, par récurrence on construit une famille de suites $\{(u_n^{(k)})_n : k \geq 0\}$ $((u_n^{(0)}) = (u_n))$, de telle sorte que pour tout $k \geq 1$, $(u_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur $\overline{\Omega}_k$, et $(u_n^{(k)})_n$ est une sous-suite de $(u_n^{(k-1)})_n$. Par suite, le procédé diagonal (même raisonnement que dans [7, page 169]) entraîne que la suite $(u_n^{(n)})$ converge uniformément sur tout compact de Ω. □

COROLLAIRE 2.6 *Soit $\Omega \subset X$ un ouvert et soit (u_n) une suite de fonctions de ${}^\mu\mathcal{U}(\Omega)$. Supposons que (u_n) est localement bornée sur Ω, et $(u_n(x))$ converge vers $u(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Alors $u \in {}^\mu\mathcal{U}(\Omega)$, et (u_n) converge uniformément sur tout compact de Ω.*

3 Opérateurs L^μ et Q^μ

Dans la suite de ce travail, nous désignons par (Ω_n) une suite d'ouverts bornés réguliers vérifiant

$$\Omega_n \subset\subset \Omega_{n+1} \subset\subset X \quad \text{et} \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n. \tag{3.1}$$

Par μ, nous désignons toujours une mesure positive de Kato sur X. Afin d'avoir une notation plus claire, nous écrivons K^μ au lieu de K_X^μ. Soit $h \in \mathcal{H}^+(X)$, en tenant compte du principe de comparaison, il est facile de vérifier que

$$0 \leq U_{\Omega_{n+1}}^\mu h \leq U_{\Omega_n}^\mu h \leq h. \tag{3.2}$$

Ainsi, la suite $(U_{\Omega_n}^\mu h)$ converge dans X. Désignons par $L^\mu h$ cette limite, alors il est clair que

$$L^\mu h \in {}^\mu\mathcal{U}(X) \quad \text{et} \;\; 0 \leq L^\mu h \leq h, \tag{3.3}$$

ceci entraîne en particulier que

$$L^\mu h \leq U^\mu_\Omega(L^\mu h) \leq U^\mu_\Omega h, \tag{3.4}$$

quel que soit $\Omega \subset\subset X$. Par suite $L^\mu h$ ne dépend pas du choix de la suite (Ω_n). En suivant Grigor'yan et Hansen [11] qui ont traité le cas linéaire (i.e.,$\Psi(\cdot, u) = u$), nous appelons $L^\mu h$ la fonction de Liouville de h relativement à μ. Il est clair que l'application $h \longrightarrow L^\mu h$ est croissante sur $\mathcal{H}^+(X)$, i.e.,

$$h, g \in \mathcal{H}^+(X); \;\; h \leq g \Longrightarrow L^\mu h \leq L^\mu g. \tag{3.5}$$

LEMME 3.1 *Pour toute fonction* $u \in {}^\mu\mathcal{U}^+(X)$, $K^\mu u$ *est un potentiel réel et continu sur* X*. En outre, si* $h \in \mathcal{H}^+(X)$ *tel que* $u \in {}^\mu\mathcal{U}^+_h(X)$ *alors* $u + K^\mu u$ *est une fonction harmonique positive dominée par* h *sur* X*.*

Démonstration. Soit $h \in \mathcal{H}^+(X)$ et $u \in {}^\mu\mathcal{U}^+_h(\Omega)$. Pour tout $n \geq 1$, $K^\mu_{\Omega_n} u$ est un potentiel continu borné sur Ω_n et

$$u + K^\mu_{\Omega_n} u =: g_n \in \mathcal{H}^+(\Omega_n).$$

Il n'est pas difficile de voir que

$$g_n \leq g_{n+1} \leq h \;\;\text{ sur }\;\; \Omega_\mathrm{n}.$$

Ceci prouve que $\lim_{n\to\infty} g_n =: g \in \mathcal{H}^+(\Omega)$. Par suite, le résultat se déduit à partir du théorème de convergence monotone, en remarquant que (G_{Ω_n}) est une suite croissante vers G_X. □

Étant donné une fonction harmonique h positive sur X ; comme $L^\mu h \in {}^\mu\mathcal{U}^+_h(X) \subset {}^\mu\mathcal{U}^+_\mathcal{H}(X)$, le lemme précédent entraîne que

$$Q^\mu h := L^\mu h + K^\mu(L^\mu h) \tag{3.6}$$

est une fonction harmonique positive sur X qui est majorée par h. Vu que $K^\mu(L^\mu h) \in \mathcal{P}(X)$, nous déduisons à partir de (3.6) que

$$Q^\mu h = \sup_{n\geq 1} H_{\Omega_n} L^\mu h. \tag{3.7}$$

Ceci et (3.5) donnent la propriété suivante :

$$h, g \in \mathcal{H}^+(X); \;\; h \leq g \Longrightarrow Q^\mu h \leq Q^\mu g. \tag{3.8}$$

Nous montrerons plus tard que $Q^\mu h$ est le plus grand élément de ${}^\mu\mathcal{H}^+(X)$ qui est dominé par h. Pour le moment, remarquons que

$$Q^\mu h \in {}^\mu\mathcal{H}(X) \;\;\text{ et }\;\; 0 \leq L^\mu h \leq Q^\mu h \leq h. \tag{3.9}$$

LEMME 3.2 *Si* $h \in {}^\mu\mathcal{H}^+(X)$*, alors* $Q^\mu h = h$*.*

Démonstration. Soit u la solution continue de (1.1) sur X vérifiant $u+K^\mu u = h$. Pour tout $n \geq 1$, on

$$U^\mu_{\Omega_n} h(z) = h(z) \geq u(z), \quad z \in \partial\Omega_n. \tag{3.10}$$

D'où $U^\mu_{\Omega_n} h \geq u$ sur Ω_n, et par suite $L^\mu h \geq u$ sur X. Ainsi,

$$h = u + K^\mu u \leq L^\mu h + K^\mu L^\mu h = Q^\mu h,$$

d'où $h = Q^\mu h$ et $u = L^\mu h$. □

Le lemme précédent et le principe de comparaison entraînent le corollaire suivant.

Corollaire 3.3 *$Q^\mu \circ Q^\mu = Q^\mu$ et $L^\mu \circ Q^\mu = L^\mu$.*

Théorème 3.4 *Pour toute fonction $h \in \mathcal{H}^+(X)$, on a :*

(i) $L^\mu h = \sup\{u \in {}^\mu\mathcal{U}^+(X) : u \leq h\} = \sup\{u \in {}^\mu\mathcal{U}^+(X) : u \leq Q^\mu h\}$

(ii) $Q^\mu h = \sup\{g \in {}^\mu\mathcal{H}^+(X) : g \leq h\} = \inf\{g \in \mathcal{H}^+(X) : g \geq L^\mu h\}$

Démonstration. (i) : D'après (3.9), il suffit de prouver que

$$L^\mu h \geq \sup\{u \in {}^\mu\mathcal{U}^+(X) : u \leq h\}. \tag{3.11}$$

Soit $u \in {}^\mu\mathcal{U}^+(\Omega)$ tel que $u \leq h$, alors pour tout $n \geq 1$

$$u = U^\mu_{\Omega_n} u \leq U^\mu_{\Omega_n} h.$$

Par passage à la limite, nous obtenons $u \leq L^\mu h$.
(ii) : Soit $g \in {}^\mu\mathcal{H}^+(X)$ vérifiant $g \leq h$. Alors, d'après (3.8) et le lemme 3.2, $Q^\mu h \geq Q^\mu g = g$. D'où

$$Q^\mu h \geq \sup\{g : g \in {}^\mu\mathcal{H}^+(\Omega); g \leq h\}.$$

Par suite, la première inégalité de (ii) est prouvée en vertu de (3.9). Supposons maintenant que g est une fonction harmonique sur X majorant $L^\mu h$. Alors, pour tout $n \geq 1$

$$H_{\Omega_n} L^\mu h \leq H_{\Omega_n} g = g,$$

d'où, (3.7) entraîne que $Q^\mu h \leq g$. Ceci prouve que $\inf\{g : g \in \mathcal{H}^+(\Omega); g \geq L^\mu h\} = Q^\mu h$, car $Q^\mu h$ est harmonique sur X dominant $L^\mu h$. □

Soit une fonction $u \in {}^\mu\mathcal{U}(X)$ telle que $|u| \leq h$, où $h \in \mathcal{H}^+(X)$. Pour tout $n \geq 1$,

$$U^\mu_{\Omega_n}(-h) \leq U^\mu_{\Omega_n} u \leq U^\mu_{\Omega_n} h.$$

Or, $U^\mu_{\Omega_n}(-h) = -U^\mu_{\Omega_n} h$. D'où, on obtient $|u| \leq L^\mu h$. Ainsi, il est clair que si $L^\mu h = 0$ alors μ est h-grande. La réciproque est bien-sur évidente.

Corollaire 3.5 *Soit $h \in \mathcal{H}^+(X)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) μ est $h-$petite (resp. $h-$grande).

(ii) $Q^\mu h = h$ (resp. $Q^\mu h = 0$) sur X.

(iii) $h - L^\mu h$ est un potentiel (resp. $L^\mu h = 0$) sur X.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (iii)$ et $(ii) \Rightarrow (i)$ sont triviales. Pour prouver $(iii) \Rightarrow (ii)$, il suffit de remarquer que

$$h - L^\mu h \geq h - Q^\mu h \in \mathcal{H}^+(X),$$

ce qui assure que $Q^\mu h - h = 0$ dès que $(h - L^\mu h) \in \mathcal{P}(X)$. Signalons que le fait que $L^\mu h = 0$ entraîne que $Q^\mu h = 0$ d'après (3.7). □

4 Classe ${}^\mu\mathcal{H}^+(X)$

Nous montrerons dans le présent paragraphe que ${}^\mu\mathcal{H}^+(X)$ est un cône convexe. Vu que $\Psi(x, \cdot)$ n'est pas linéaire; $L^\mu(\alpha\, h + g)$ est en général différente de $\alpha\, L^\mu h + L^\mu g$, pour $\alpha > 0$, h, $g \in \mathcal{H}^+(X)$. Toutefois, nous prouverons dans ce qui suit que $Q^\mu(\alpha\, h + g) = \alpha\, Q^\mu h + Q^\mu g$. Rappelons tout d'abord le lemme connu suivant qui se déduit aussi facilement à partir du lemme de Fatou.

LEMME 4.1 *Soit $(E, \mathcal{E}, m)$ un espace mesuré, et soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions mesurables convergentes respectivement vers f et g, telles que $|f_n| \leq g_n$ pour tout $n \geq 1$, et $\lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, dm = \int_X g\, dm < \infty$. Alors $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, dm = \int_X f\, dm$.*

Avant de prouver que ${}^\mu\mathcal{H}^+(X)$ est stable par somme finie, signalons que la propriété $(\mathcal{P}3)$ de la fonction Ψ entraîne que $\Psi(x, t+s) \leq \kappa\, [\Psi(x,t) + \Psi(x,s)]$, si $x \in X$, t, $s \geq 0$. En effet, soit $a = \max\{t, s\}$ alors $\Psi(x, t+s) \leq \Psi(x, 2a) \leq \kappa\, \Psi(x, a) \leq \kappa\, [\Psi(x,t) + \Psi(x,s)]$.

PROPOSITION 4.2 *Soient $h, g \in \mathcal{H}^+(X)$. Si μ est $h-$petite et $g-$petite à la fois, alors μ est $(h+g)-$petite.*

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 1$, soient $u_n = U^\mu_{\Omega_n} h$, $v_n = U^\mu_{\Omega_n} g$, et $w_n = U^\mu_{\Omega_n}(h+g)$. Alors

$$\Delta(u_n + v_n) = \Psi(\cdot, u_n)\mu + \Psi(\cdot, v_n)\mu \leq \Psi(\cdot, u_n + v_n)\mu \quad \text{sur } \Omega_n.$$

Or, $u_n + v_n = h + g = w_n$ sur $\partial\Omega_n$, d'où $u_n + v_n \geq w_n$ sur Ω_n. Par suite, pour tout $x \in X$, on peut trouver $N \geq 1$ tel que

$$G_{\Omega_n}(x, \cdot)\Psi(\cdot, w_n) \leq \kappa\, G_{\Omega_n}(x, \cdot)[\Psi(\cdot, u_n) + \Psi(\cdot, v_n)] \;\text{ sur } \Omega_n, \;\; n \geq N.$$

Ainsi, en appliquant le lemme précédent, nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} K^\mu_{\Omega_n} w_n = K^\mu w,$$

ce qui prouve que $w + K^\mu w = h + g$. □

Il est clair que la proposition précédente signifie que la somme de deux fonctions de ${}^\mu\mathcal{H}^+(X)$ est également dans ${}^\mu\mathcal{H}^+(X)$.

LEMME 4.3 *Soient un entier $j \geq 1$, et $\Omega \in \mathcal{O}_r$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^+(\partial\Omega)$, $U^\mu_\Omega(jf) \leq j\, U^\mu_\Omega f$.*

Démonstration. D'après ($\mathcal{P}2$), on remarque que $\Psi(x, jt) \geq j\Psi(x,t)$, pour tout $j \geq 1$. Posons $u = U^{\mu}_{\Omega} f$ et $v = U^{\mu}_{\Omega}(jf)$, alors

$$\Delta(j\,u) = j\,\Psi(\cdot, u)\mu \leq \Psi(\cdot, j\,u)\mu.$$

Or $ju = jf = v$ sur $\partial\Omega$, d'où le principe de comparaison prouve que $ju \geq v$. □

A partir de ce lemme, on conclut que si $h \in \mathcal{H}^{+}(X)$ et j un entier ≥ 1, alors

$$L^{\mu}(j\,h) \leq \; jL^{\mu}h. \tag{4.1}$$

Ceci entraîne, en vertu de (3.7) que

$$Q^{\mu}(j\,h) \leq j\,Q^{\mu}h. \tag{4.2}$$

PROPOSITION 4.4 *Soient $h, g \in \mathcal{H}^{+}(X)$ tels que $h \leq g$. Si μ est $g-$petite (resp. $g-$grande), alors μ est $h-$petite (resp. $h-$grande).*

Démonstration. Si μ est $g-grande$, alors (3.5) donne immédiatement que $L^{\mu}h = 0$ et par suite μ est $h-$grande. Supposons alors que μ est $g-$petite dans Ω. Pour tout $n \geq 1$, $U^{\mu}_{\Omega_n} h \leq U^{\mu}_{\Omega_n} g$, or

$$\lim_{n\to\infty} K^{\mu}_{\Omega_n}(U^{\mu}_{\Omega_n} g) = K^{\mu}_{\Omega_n}(L^{\mu}g) < \infty.$$

Ainsi, en appliquant le lemme 4.1, on aura

$$\lim_{n\to\infty} K^{\mu}_{\Omega_n}(U^{\mu}_{\Omega_n} h) = K^{\mu}_{\Omega_n}(L^{\mu}h),$$

et par suite $L^{\mu}h + K^{\mu}(L^{\mu}h) = h$, ce qui signifie que μ est $h-$petite. □

Il résulte alors, qu'une fonction harmonique positive sur Ω dominée par une fonction de ${}^{\mu}\mathcal{H}^{+}(X)$, est nécessairement dans ${}^{\mu}\mathcal{H}^{+}(X)$. En particulier, ceci prouve la réciproque de la proposition 4.2.

PROPOSITION 4.5 *Soit $h \in \mathcal{H}^{+}(X)$. La mesure μ est $h-$petite (resp. $h-$grande) si et seulement si μ est $(\alpha h)-$petite (resp. $(\alpha h)-$grande), pour tout $\alpha > 0$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\alpha > 0$, μ est nécessairement $(\alpha h)-$petite (resp. $(\alpha h)-$grande) si μ est $h-$petite (resp. $h-$grande). Soit $\alpha > 0$ et choisissons un entier $j \geq 1$ tel que $\alpha \leq 2^j$. Ainsi,

$$L^{\mu}(\alpha\,h) \leq L^{\mu}(2^j\,h) \leq 2^j\,L^{\mu}h.$$

Ceci prouve que μ est $(\alpha h)-$grande si μ est $h-$grande. Supposons maintenant que μ est $h-$petite ; alors pour tout $n \geq 1$

$$U^{\mu}_{\Omega_n}(\alpha\,h) \leq U^{\mu}_{\Omega_n}(2^j\,h) \leq 2^j\,U^{\mu}_{\Omega_n} h,$$

d'où

$$\Psi(\cdot, U^{\mu}_{\Omega_n}(\alpha\,h)) \leq \Psi(\cdot, 2^j\,U^{\mu}_{\Omega_n} h) \leq \kappa^j\,\Psi(\cdot, U^{\mu}_{\Omega_n} h).$$

Par suite, en appliquant le lemme 4.1, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} K^{\mu}_{\Omega_n}(U^{\mu}_{\Omega_n}(\alpha\,h)) = K^{\mu}L^{\mu}(\alpha\,h).$$

Or, $U^{\mu}_{\Omega_n}(\alpha\,h) + K^{\mu}_{\Omega_n}U^{\mu}_{\Omega_n}(\alpha\,h) = \alpha\,h$ sur Ω_n. D'où $L^{\mu}(\alpha\,h) + K^{\mu}L^{\mu}(\alpha\,h) = \alpha\,h$, ce qui achève la démonstration. □

Les propositions (4.2) et (4.5) entraînent que ${}^{\mu}\mathcal{H}^{+}(\Omega)$ est un cône convexe.

Corollaire 4.6 *Soit $h \in \mathcal{H}^+(X)$. Supposons que h est minimale, alors μ est h-petite ou bien h-grande.*

Démonstration. Puisque $0 \leq Q^\mu h \leq h$, et vu que h est minimale; alors il existe $\alpha \geq 0$ tel que $Q^\mu h = \alpha h$. Si $\alpha = 0$ alors μ est h-grande. Si $\alpha > 0$ alors $h = \frac{1}{\alpha} Q^\mu h$, or μ est $(Q^\mu h)$-petite, par suite μ est h-petite. □

En tenant compte de la propriété $(\mathcal{P}2)$ (voir la démonstration de la proposition 4.2), il résulte que si $\Omega \in \mathcal{O}_r$ alors pour tout $f,\, g \in \mathcal{C}^+(\partial\Omega)$,

$$U_\Omega^\mu(f+g) \leq U_\Omega^\mu f + U_\Omega^\mu g. \tag{4.3}$$

Il est ainsi facile de déduire que pour tout $h,\, g \in \mathcal{H}^+(X)$, on a

$$L^\mu(h+g) \leq L^\mu h + L^\mu g, \;\text{ et }\; Q^\mu(h+g) \leq Q^\mu(h) + Q^\mu(g). \tag{4.4}$$

Proposition 4.7 *Soient $h \in \mathcal{H}^+(X)$, et (h_n) une suite monotone de fonctions harmoniques positives sur X. Si (h_n) converge vers h dans X, alors $(L^\mu h_n)$ et $(Q^\mu h_n)$ convergent dans X vers $L^\mu h$ et $Q^\mu h$ respectivement.*

Démonstration. Signalons que (3.5) et (3.8) entraînent que $(L^\mu h_n)$ et $(Q^\mu h_n)$ sont de même monotonie que (h_n). Pour prouver la proposition, il suffit de remarquer que par (4.4), on a

$$|L^\mu h - L^\mu h_n| \leq |h - h_n| \;\text{ et }\; |Q^\mu h - Q^\mu h_n| \leq |h - h_n|.$$

□

Corollaire 4.8 *Soit (h_n) une suite croissante de fonctions harmoniques positives sur X, et supposons que $h = \sup_{n\geq 1} h_n \in \mathcal{H}^+(X)$. Si μ est h_n-petite (resp. h_n-grande) quel que soit $n \geq 1$, alors μ est $h-$petite (resp. $h-$grande).*

Proposition 4.9 *Soient $h,\, g \in \mathcal{H}^+(X)$ et soit $\alpha \geq 0$. Alors $Q^\mu(\alpha\, h) = \alpha\, Q^\mu h$ et $Q^\mu(h+g) = Q^\mu h + Q^\mu g$.*

Démonstration. D'après le théorème (3.4. *ii*), $Q^\mu h + Q^\mu g \leq Q^\mu(h+g)$. Ceci et (4.4) entraînent que $Q^\mu(h+g) = Q^\mu h + Q^\mu g$. Par le même théorème on a $\alpha\, Q^\mu h \leq Q^\mu(\alpha\, h)$, car $\alpha\, Q^\mu h \leq \alpha\, h$ et $\alpha Q^\mu h \in {}^\mu\mathcal{H}^+(X)$. Ainsi par (4.2), pour tout entier $j \geq 1$

$$Q^\mu(j\, h) = j\, Q^\mu h.$$

D'autre part

$$Q^\mu h = Q^\mu(j\, \frac{h}{j}) = j\, Q^\mu(\frac{h}{j}).$$

Par suite, $Q^\mu(r\, h) = r\, Q^\mu h$ pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$. Choisissons alors une suite croissante (r_n) dans $\mathbb{Q}_+$ qui converge vers α, puis appliquons la proposition 4.7 pour obtenir

$$Q^\mu(\alpha\, h) = \lim_{n\to\infty} Q^\mu(r_n\, h) = \lim_{n\to\infty} r_n\, Q^\mu h = \alpha\, Q^\mu h.$$

□

Soit $h \in \mathcal{H}^+(X)$, alors $Q^\mu(h - Q^\mu h) = Q^\mu h - Q^\mu Q^\mu h = 0$. Supposons qu'il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^+(X)$ vérifiant $Q^\mu h_1 = h_1$, $Q^\mu h_2 = 0$ et $h = h_1 + h_2$. Alors

$$Q^\mu h = Q^\mu h_1 + Q^\mu h_2 = h_1.$$

On conclut alors que, l'écriture $h = Q^\mu h + (h - Q^\mu h)$ est l'unique décomposition de h en une somme de deux fonctions $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^+(X)$ telles d'une part μ est h_1-petite, et d'autre part μ est h_2-grande.

PROPOSITION 4.10 *Soit une fonction $h \in \mathcal{H}^+(X)$ telle que $K^\mu h < \infty$, alors $h \in {}^\mu\mathcal{H}^+(X)$.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, $U^\mu_{\Omega_n} h + K^\mu_{\Omega_n} U^\mu_{\Omega_n} h = h$. Soit $x \in X$, alors pour n assez grand

$$0 \leq G_{\Omega_n}(x, \cdot)\Psi(\cdot, U^\mu_{\Omega_n} h) \leq G_X(x, \cdot)\Psi(\cdot, h).$$

D'où, en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_n} G_{\Omega_n}(x, y)\Psi(y, U^\mu_{\Omega_n} h(y))\, d\mu(y) = \int_X G_X(x, y)\Psi(y, L^\mu h(y))\, d\mu(y) < \infty.$$

Par suite $L^\mu h + K^\mu L^\mu h = h$, et $h \in {}^\mu\mathcal{H}^+(X)$. □

5 Démonstration du théorème 1.1

Soit h une fonction harmonique positive sur X. Avant de démontrer le théorème 1.1, nous nous proposons d'établir quelques propositions ayant relations avec les applications $\mu \longrightarrow L^\mu h$ et $\mu \longrightarrow Q^\mu h$. Ces propositions et les résultats que nous avons déjà établi dans ce qui précède, nous permettrons d'appliquer des arguments analogues à ceux de Grigor'yan et Hansen pour obtenir une génération de leur résultat [11, Theorem 4.1] aux cas semilinéaires considérés dans ce travail.

PROPOSITION 5.1 (c.f. [11, Lemma 3.4]) *Soient $\mu, \nu \in \mathbb{K}^+_{loc}$. On a*

(i) Si $\mu \leq \nu$ alors $L^\nu h \leq L^\mu h$ et $Q^\nu h \leq Q^\mu h$.

(ii) $L^\mu h + L^\nu h \leq h + L^{\mu+\nu} h$ et $Q^\mu h + Q^\nu h \leq h + Q^{\mu+\nu} h$

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, considérons $u_n = U^\mu_{\Omega_n} h$ et $v_n = U^\nu_{\Omega_n} h$.
(i) : Supposons que $\mu \leq \nu$, alors

$$\Delta u_n = \Psi(\cdot, u_n)\mu \leq \Psi(\cdot, u_n)\nu.$$

Or, $u_n = h = v_n$ sur $\partial\Omega_n$, d'où $u_n \geq v_n$ sur Ω_n. En tendant n vers l'infini nous obtenons $L^\mu h \geq L^\nu h$.
(i) : Soit $w_n = U^{\mu+\nu}_{\Omega_n} h$, alors $w_n \leq u_n$ et $w_n \leq v_n$ sur Ω_n (mêmes arguments que dans (i)). Or Ψ est croissante par rapport à sa deuxième variable, d'où $\Psi(\cdot, w_n) \leq \Psi(\cdot, u_n) + \Psi(\cdot, v_n)$. Ainsi,

$$h - w_n = K^{\mu+\nu}_{\Omega_n} w_n \leq K^\mu_{\Omega_n} u_n + K^\nu_{\Omega_n} v_n = 2h - u_n - v_n.$$

D'où le résultat est prouvé par passage à la limite. □

Corollaire 5.2 (c.f. [11, Lemma 3.2]) *Soient* $\mu, \nu \in \mathbb{K}_{loc}^{+}$ *et supposons que* $\mu \leq \nu$.

(*i*) *Si* ν *est* $h-$*petite alors* μ *l'est aussi.*

(*ii*) *Si* μ *est* $h-$*grande alors* ν *l'est aussi.*

Corollaire 5.3 (c.f. [11, Proposition 3.7]) *Soient* $\mu, \nu \in \mathbb{K}_{loc}^{+}$.

(*i*) *Si* μ *est* $h-$*petite et* $\mu+\nu$ *est* $h-$*grande, alors* ν *est* $h-$*grande.*

(*ii*) *Si* μ *et* ν *sont* $h-$*petites, alors* $\mu+\nu$ *est* $h-$*petite.*

(*iii*) μ *est* $h-$*petite (resp.* $h-$*grande) si et seulement si* $\alpha\mu$ *est* $h-$*petite (resp.* $h-$*grande), pour tout* $\alpha > 0$.

Démonstration. (*i*) et (*ii*) sont des conséquences de l'inégalité

$$Q^{\mu}h + Q^{\nu}h \leq h + Q^{\mu+\nu}h.$$

(*iii*) se déduit de l'inégalité suivante qui se démontre de la même façon que [11, Proposition 7.20].

$$Q^{\mu}h = Q^{\alpha\mu}h, \quad \text{pour tout} \quad \alpha > 0.$$

□

Démonstration du théorème 1.1. (*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*) : Considérons

$$A = \{x \in X : 2L^{\mu}h(x) < h(x)\},$$

donc $h \leq 2(h - L^{\mu}h)$ sur A. Or $h - L^{\mu}h \in \mathcal{S}^{+}(X)$ donc $\hat{R}^{A}h \leq 2(h - L^{\mu}h)$. Ainsi, si μ est $h-$petite, le corollaire (3.5) entraîne que $h - L^{\mu}h \in \mathcal{P}(X)$ et par suite $\hat{R}^{A}h \in \mathcal{P}(X)$. Si μ est non-h-grande alors $Q^{\mu}h \not\equiv 0$. Supposons que $\hat{R}^{A}h = h$, alors on aura $2\,L^{\mu}h \leq h$. Ainsi par (3.7), $2\,Q^{\mu}h \leq h$. Ceci implique que $2\,Q^{\mu}h \leq Q^{\mu}h$, ce qui est impossible car $Q^{\mu}h \not\equiv 0$. Il nous reste à démontrer que pour la mesure $\nu = 1_{X\setminus A}\mu$, $K^{\nu}h \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{C}(X)$. Pour cela, il est suffisant de prouver $K^{\nu}h$ est un potentiel sur X car $\nu \in \mathbb{K}_{loc}^{+}$. Il est clair que $h \leq 2L^{\mu}h$ sur $X\setminus A$, d'où en tenant compte de ($\mathcal{P}3$), on obtient

$$K^{\nu}h \leq \kappa\, K^{\nu}L^{\mu}h \leq \kappa\, K^{\mu}L^{\mu}h.$$

(*ii*) $\Longrightarrow$ (*iii*) : Triviale. (*iii*) $\Longrightarrow$ (*i*) : D'après la proposition (4.10), μ_1 est $h-$petite. Donc, il suffit de prouver que μ_2 est $h-$petite (resp. non-$h-$grande). Ceci se déduit à partir de l'inégalité suivante

$$L^{\mu}h \geq h - \hat{R}^{A}h. \tag{5.1}$$

En effet ; si A n'est pas $h-$épais alors $L^{\mu_2}h \not\equiv 0$ sur X. Si A est $h-$effilé alors (5.1) et (3.7) entraînent que $Q^{\mu_2}h \geq h$, ce qui prouve que $Q^{\mu_2}h = h$. Pour montrer (5.1), rappelons que

$$\Gamma = \{x \in A : h(x) - \hat{R}^{A}h(x) \neq 0\}$$

est un polaire. Donc Γ est μ_2-négligeable car $\mu_2 \in \mathbb{K}_{loc}^{+}$. D'autre part, $h - \hat{R}^{A}h$ est une fonction sousharmonique positive sur X. Par suite

$$\Delta(h - \hat{R}^{A}h) \geq 0 = \Psi(\cdot, h - \hat{R}^{A}h)\,\mu_2.$$

Or pour tout $n \geq 1$, $U_{\Omega_n}^{\mu}h = h \geq h - \hat{R}^{A}h$ sur $\partial\Omega_n$. D'où le principe de comparaison (Proposition 2.1) entraîne que, $U_{\Omega_n}^{\mu}h \geq h - \hat{R}^{A}h$ sur Ω_n. En tendant n vers l'infini, on obtient l'inégalité cherchée. □

Références

[1] W. Arendt, C. J. K. Batty, and P. Bénilan. Asymptotic stability of Schrödinger semigroups on $L^1(\mathbf{R}^N)$. *Math. Z.*, 209(4) :511–518, 1992.

[2] C. J. K. Batty. Asymptotic stability of Schrödinger semigroups : path integral methods. *Math. Ann.*, 292(3) :457–492, 1992.

[3] H. Bauer. *Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Lecture Notes in Mathematics, No. 22.* Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[4] J. Bliedtner and W. Hansen. *Potential theory. An analytic and probabilistic approach to balayage.* Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[5] A. Boukricha. Harnack inequality for nonlinear harmonic spaces. *Preprint.*

[6] A. Boukricha, W. Hansen, and H. Hueber. Continuous solutions of the generalized Schrödinger equation and perturbation of harmonic spaces. *Exposition. Math.*, 5(2) :97–135, 1987.

[7] M. Brelot. *Éléments de la théorie classique du potentiel. Les cours de Sorbonne, 3e cycle. 2e édition.* Centre de Documentation Universitaire, Paris, 1961.

[8] C. Constantinescu and A. Cornea. *Potential theory on harmonic spaces.* Springer-Verlag, New York, 1972.

[9] J. L. Doob. *Classical potential theory and its probabilistic counterpart.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[10] E. B. Dynkin and S. E. Kuznetsov. Solutions of $Lu = u^\alpha$ dominated by L-harmonic functions. *J. Anal. Math.*, 68 :15–37, 1996.

[11] A. Grigor'yan and W. Hansen. A Liouville property for Schrödinger operators. *Math. Ann.*, 312(4) :659–716, 1998.

[12] W. Hansen. Semipolar sets and quasibalayage. *Math. Ann.*, 257(4) :495–517, 1981.

[13] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio. *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993.

[14] M. A. Krasnoselskii and Ya. B. Rutickii. *Convex functions and Orlicz spaces.* P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.

[15] I. Laine. Introduction to a quasilinear potential theory. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 10 :339–348, 1985.

[16] F. Y Maeda. Semilinear perturbation of harmonic spaces. *Hokkaido Math. J.*, 10 :464–493, 1981.

[17] M. Marcus and L. Véron. The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations : the subcritical case. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 144(3) :201–231, 1998.

[18] M. Marcus and L. Veron. The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations : the supercritical case. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 77(5) :481–524, 1998.

[19] F. van Gool. Semilinear perturbation of linear harmonic spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 17(2) :367–391, 1992.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
D-33501 Bielefed, Germany.
E-mail : mabrouk@mathematik.uni-bielefeld.de.