# Noyaux et Résolvantes Non Linéaires

A. Baalal

**Abstract.** Let $V$ be a proper kernel on a locally compact space $X$ with a countable base, satisfying the complete maximum principle and which is absolutely continuous with respect to a finite positive measure. Let $\varphi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ be a Carathéodory function such that $\varphi(.,0) = 0$. We prove that if $V$ is parabolic and $\varphi$ satisfies the hypothesis $(P_1) - (P_3)$ below, the operator $V\varphi$ defines a nonlinear resolvent, and on the other hand, under the hypothesis $(M_1)$ or $(M_2)$ below, the operator $V\varphi$ satisfies the nonlinear complete maximum principle and it is associated to a sub-Markov resolvent. Finally we consider the perturbation of the linear resolvents by $\varphi$.

## Introduction

Soit $X$ un espace localement compact à base dénombrable. Nous désignons par $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}_b$) l'espace de toutes les fonctions numériques boréliennes (resp. boréliennes bornées) sur $X$. Pour un ensemble $\mathcal{A}$, de fonctions numériques, $\mathcal{A}^+$ désigne l'ensemble de tous ses éléments positifs. Soit $V$ un noyau propre défini sur $(X, \mathcal{B}_b)$, vérifiant le principe complet du maximum (notation : PCM) et soit $\varphi$ une fonction de Carathéodory définit de $X \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ( i.e. $x \longrightarrow \varphi(x,z)$ est borélienne pour tout $z \in \mathbb{R}$ et $z \longrightarrow \varphi(x,z)$ est continue pour tout $x \in X$) telle que $\varphi(.,0) = 0$. Dans la suite, nous noterons par $\Phi$ l'opérateur de Nemyntskii associé à $\varphi$ ( $\Phi(f)(x) := \varphi(x, f(x))$ ) et $\psi$ la fonction définie de $X \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\psi(x,z) = z^{-1}\varphi(x,z)$ si $z \neq 0$ et $\psi(x,0) = 0$ L'opérateur $V\Phi$ sera désigné par $U$.
Le noyau $V$ est dit *parabolique* si pour tout compact $K$ non vide de $X$ il existe $x \in K$ tel que $V\chi_K(x) = 0$, $\chi_K$ étant la fonction indicatrice de $K$ [HH88], [BJ85] et [Rit75].
On suppose dans ce qui suit que le noyau $V$ est basique (i.e. Il existe une mesure finie et positive sur $X$ telle que, pour tout $x \in X$ la mesure $\varepsilon_x V$ est absolument continue par rapport à $\mu$) et on se propose d'étudier les pertur-

[0]Mathematics Subject Classification : 31C45, 31D05.

[0]Mots Clés et Phrases : Noyaux et résolvantes non linéaires, Fonctions excessives.

bations des noyaux et des résolvantes par une fonctiona $\varphi$ dans chacun des trois cas suivants :

**Cas parabolique** :

$(P_1)$ $V$ est parabolique,

$(P_2)$ $\varphi$ est localement lipschitzienne : pour tout réel $a > 0$ il existe une fonction borélienne $k_a$ positive définie sur $X \times [-a, a] \times [-a, a]$ bornée et telle que

$$|\varphi(x, z_1) - \varphi(x, z_2)| \leqslant k_a(x, z_1, z_2)\, |z_1 - z_2|$$

pour tout $(x,\, z_1, z_2) \in X \times [-a, a] \times [-a, a]$.

$(P_3)$ $\psi^-$ est $V$–bornée : il existe une fonction borélienne $g$ positive telle que $|V\psi^-(, u)| \leqslant Vg$, pour tout $u \in \mathcal{B}_b$.

**Cas monotone** :

$(M_1)$ Pour tout $x \in X$ l'application $z \longrightarrow \varphi(., z)$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et il existe une constante réelle $C > 0$ telle que :

$$|\varphi(x; z)| \leqslant C(1 + |z|),$$

pour tout $x \in X$ et pour tout $z \in \mathbb{R}$.

**Où bien**

$(M_2)$ Pour tout $x \in X$ l'application $z \longrightarrow \varphi(., z)$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\psi$ est localement bornée uniformément par rapport á $x$.

Dans le cas parabolique, nous montrons que l'opérateur $U = V\varphi$ définit une résolvante non linéaire et dans le cas monotone l'opérateur $U = V\varphi$ satisfait le principe complet du maximum (version non linéaire [Del92]) et qu'il est associé à une résolvante sousmarkovienne $\mathbb{U} = (U_\lambda)_{\lambda>0}$ telle que $(I-\lambda U_\lambda)(I+\lambda U) = I$. Dans la dernière partie nous considérons une résolvante linéaire $\mathbb{V} = (V_\lambda)_{\lambda>0}$ sur $(X, \mathcal{B}_b)$ et une fonction $\varphi$ comme ci-dessus et nous montrons qu'il existe une résolvante (non linéaire) $\mathbb{W} = (W_\lambda)_{\lambda>0}$ telle que :

$$W_\lambda f + V_\lambda \Phi(W_\lambda f) = V_\lambda f,$$

pour toute fonction $f$ dans $\mathcal{B}_b$. La fonction $W_\lambda f$ est alors une solution de l'équation semi-linéaire :

$$-Au + \lambda u + \varphi(., u) = f,$$

où $(\lambda I + A)^{-1} = V_\lambda$.

La condition $(M_1)$ est satisfaite par exemple si $\varphi(.,u) = sgn(u)\,|u|^\alpha$ avec $0 < \alpha \leqslant 1$ et la condition $(M_2)$ correspond au cas $\alpha \geqslant 1$.
Les hypothèses de [Maa94] ou [Goo98a] ne permettent pas d'obtenir nous résultats. L'exemple suivant montre qu'il existe des opérateurs (non linéaires) non lipschitziens et auxquels on peut associer des résolvantes :

Soient $0 < \alpha < 1$ et $U$ l'opérateur définit sur $\mathcal{B}_b$ par

$$U(f)(x) = sgn(f(x))\,|f(x)|^\alpha\,.$$

$U$ rentre dans le cas $(M_1)$ et $U$ n'est pas lipschitzien.

On rappelle qu'une fonction $u \in \mathcal{B}^+$ est dite $V-$*dominante* si pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_b$ telle que $Vf \leqslant u$ sur $\{f > 0\}$ on a $Vf \leqslant u$ partout. Si la constante 1 est $V-$*dominante* on dit que $V$ vérifie le principe complet du maximum. Les fonctions de la forme $Vf$, $f \geqslant 0$, sont appelées potentiels. Une fonction $u$ est dite excessive (relativement à $V$) s'il existe une suite ( $f_n)_n$ de fonctions mesurables telle que $Vf_n$ croit vers $u$.

# 1 Noyaux Non Linéaires

Il est conu que le noyau basique $V$ est compact pour la topologie de la convergence simple [Mey71, Proposition 1] et il existe une suite $(X_n)_n$ d'ensembles boreliens qui croient vers $X$ tels que $\chi_{X_n}V$ soit compact pour la topologie de la convergence uniforme [Rev84, Proposition 5.5].
Dans tout ce travail nous supposerons que le noyaux est borné ; le cas propre s'en déduit.En effet, soit $(A_n)_n$ une suite croissante de boréliens dans $X$ telle que $X = \cup A_n$ et $\chi_{A_n}V$ soit borné pour tout $n$. Soient $f \in \mathcal{B}_b$ et $(u_n)_n$ une suite dans $\mathcal{B}_b$ (ici nous identifions une fonction sur $(A_n)_n$ est son prolongement par 0) telle que, pour tout n, on a

$$u_n + \chi_{A_n}V\varphi(.,u_n) = \chi_{A_n}f.$$

Alors, le PCM implique que $(u_n)_n$ est uniformement bornée. La compacité de $V$ (pour la topologie de la convergence simple) et les hypothèses faites sur $\varphi$ donne l'existence d'une sous suite extraite qui converge vers une fonction $u \in \mathcal{B}_b$ telle que

$$u + V\varphi(.,u) = f.$$

## 1.1 Cas Parabolique

Dans cette partie le noyau $V$ est supposé être basique, parabolique et vérifiant le PCM. La fonction $\varphi$ localement lipschitzienne et $\psi$ est $V$–bornée.

**Lemme 1.1** *Pour tout réel $\lambda$ l'opérateur $I+\lambda V\Phi$ et injectif sur $\mathcal{B}_b$.*

**Démonstration.** Soient $u$ et $v$ dans $\mathcal{B}_b$ telles que $u-v+\lambda V\left[\Phi(u)-\Phi(v)\right]=0$. Posons $\Theta(x,u(x),v(x))=(u(x)-v(x))^{-1}\left[\varphi(x,u(x))-\varphi(x,v(x))\right]$, si $u(x)\neq v(x)$ et $\Theta(x,u(x),u(x))=0$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$, en écrivant $I+\lambda V\Theta(.u,v)=I+\lambda V\left[\Theta(.u,v)\right]^+-\lambda V\left[\Theta(.u,v)\right]^-$ nous pouvons supposer que $\lambda>0$. Comme $I+\lambda V\left[\Theta(.u,v)\right]^+$ est inversible et l'opérateur

$$\lambda\left(I+\lambda V\left[\Theta(.u,v)\right]^+\right)^{-1}V\left[\Theta(.u,v)\right]^-$$

est parabolique, $I+\lambda V\Theta(.u,v)$ est injectif d'après [HH88, Theorem 2.4]. □

**Proposition 1.2** *Pour tout réel positif $\lambda$ l'opérateur $I+\lambda V\varphi$ est inversible de $\mathcal{B}_b$ dans $\mathcal{B}_b$.*

**Démonstration.** Comme $V$ est basique nous pouvons supposer qu'il est compact sans perdre de généralité. D' après le Lemme 1.1, il suffit de montrer la surjection. Supposons que $V$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme et considérons l'application $\psi(.,z)=z^{-1}\varphi(.,z)$, si $z\neq 0$ et $\psi(.,0)=0$. Soient $v\in\mathcal{B}_b$, $\lambda\geqslant 0$ un nombre réel ; notons par $V^{v,\psi_\lambda^+}$ (resp. $V^{v,\psi_\lambda^-}$ ) le noyau $f\longrightarrow\lambda V\left(\psi(.,v)\right)^+f$ (resp. $f\longrightarrow\lambda V\left(\psi(.,v)\right)^-f$ ). On a

$$I+\lambda V\psi(.,v)=\left(I+V^{v,\psi_\lambda^+}\right)\left[I-\left(I+V^{v,\psi_\lambda^+}\right)^{-1}V^{v,\psi_\lambda^-}\right]$$

et il suffit alors de prouver la surjection de $I-\left(I+V^{v,\psi_\lambda^+}\right)^{-1}V^{v,\psi_\lambda^-}$. D'après [HH88, Theorem 2.4] et le fait que $\left(I+V^{v,\psi_\lambda^+}\right)^{-1}V^{v,\psi_\lambda^-}$ est compact nous obtenons le résultat en remarquant que $I-\left(I+V^{v,\psi_\lambda^+}\right)^{-1}V^{v,\psi_\lambda^-}$ est un opérateur de Fredholm.

A présent nous allons prouver la surjection de l'opérateur $I+\lambda V\varphi$. Puisque $\psi^-$ est $V-$bornée, la série

$$\sum_{n\geq 0}\left[\left(I+V^{v,\psi_\lambda^+}\right)^{-1}V^{v,\psi_\lambda^-}\right]^{(n)}1$$

est bornée indépendamment de $v$ ; notons par $C_1$ un majorant de cette série. Pour $f\in\mathcal{B}_b$ fixée, considérons l'application $v\longrightarrow\mathcal{G}(v)$ définie sur $\mathcal{B}_b$ par

$$\mathcal{G}(v)=\sum_{n\geqslant 0}\left[(I+V^{v,\psi_\lambda^+})^{-1}V^{v,\psi_\lambda^-}\right]^{(n)}(I+V^{v,\psi_\lambda^+})^{-1}f.$$

Il est facile de vérifier que $\mathcal{G}(v)$ est une solution de l'équation

$$w + \lambda V w\psi(.,v) = f.$$

En utilisant le principe complet de maximum, on obtient $\left|(I + V^{v,\psi_\lambda^+})^{-1} f\right| \leqslant 2\|f\|$ et par suite $\|\mathcal{G}(v)\| \leqslant 2C_1\|f\|$. De plus, si $M = 2\|f\| C_1$ et $\mathcal{K} = \{v \in \mathcal{B}_b : \|v\| \leqslant M\}$ alors $\mathcal{G}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$. Pour conclure, nous montrons que $\mathcal{G}$ admet un point fixe dans $\mathcal{K}$. Pour cela, il suffit de prouver qu'elle est complètement continue sur $\mathcal{K}$.
*Continuité* : Soit $(v_i)$ une suite dans $\mathcal{K}$ convergente vers $v$, D'où

$$\mathcal{G}(v_i) - \mathcal{G}(v) = [\lambda V \mathcal{G}(v_i)\left(\psi(.,v) - \psi(.,v_i)\right)] - [\lambda V\left(\mathcal{G}(v_i) - \mathcal{G}(v)\right)\psi(.,v)]\,. \tag{1}$$

Puisque $\|\lambda V \mathcal{G}(v_i)\left(\psi(.,v) - \psi(.,v_i)\right)\| \leqslant C\|\psi(.,v) - \psi(.,v_i)\|$, on en déduit que la suite $\left(\lambda V \mathcal{G}(v_i)\left(\psi(.,v) - \psi(.,v_i)\right)\right)_i$ converge vers 0. Comme l'opérateur $u \longrightarrow \lambda V\psi(.,v)u$ et complètement continu, la suite de fonctions

$$\left(\lambda V\left(\mathcal{G}(v_i) - \mathcal{G}(v)\right)\psi(.,v)\right)_i$$

est relativement compact dans $\mathcal{B}_b$. Considérons alors une sous-suite extraite $\left(\mathcal{G}(v_{i_k}) - \mathcal{G}(v)\right)_k$ qui converge vers une limite $w$ ; on a alors, d'après l'équation (1),

$$\|\lambda V\left(\mathcal{G}(v_{i_k}) - \mathcal{G}(v)\right)\psi(.,v)\| \to 0$$

et par suite $w = 0$. Ceci étant encore valable pour toute sous suite extraite de $\left(\mathcal{G}(v_i)\right)_i$ ; on a donc toute la suite qui converge. D'où la continuité de $\mathcal{G}$.

*Compacité* : $V$ étant compact, $\mathcal{G}$ est un opérateur borné et $\mathcal{G} = f - \lambda V\psi(.,v)\mathcal{G}$, on en déduit facilement la compacité de $\mathcal{G}$.

Le théorème du point fixe de Schauder implique l'existence d'un point fixe pour $\mathcal{G}$ ; ce dernier est alors solution de l'équation

$$v + \lambda V\Phi(v) = f.$$

Dans le cas générale, notons par $\chi_n$ l'indicatrice de $X_n$ et par $v_n$ la solution sur $X_n$ de l'équation

$$v + \lambda\chi_n V\Phi(v) = f.$$

En prolongeant par 0 sur $X \setminus X_n$, on a pour tout $n$

$$v_n + \lambda\chi_n V\Phi(v_n) = \chi_n f.$$

Comme les $v_n$ sont uniformememt bornées et $V$ compact pour la topologie de la convergence simple, nous pouvons extraire une suite, notée encore $(v_n)_n$, qui converge simplement vers une fonction borélienne bornée $v$ vérifiant l'équation

$$v + \lambda V\Phi(v) = f.$$

$\square$

**Théorème 1.3** *Pour tout $\lambda \geqslant 0$, l'opérateur $I + \lambda U$ est inversible. Soit $U_\lambda = U\,(I + \lambda U)^{-1}$, alors $\mathbb{U} = (U_\lambda)_{\lambda>0}$ vérifie l'équation résolvante (non linéaire) :*

$$\forall \lambda, \mu \geqslant 0 \text{ } on \text{ } a \text{ } U_\lambda = U_\mu(I + (\mu - \lambda)U_\lambda).$$

**Démonstration.** D'après la Proposition 1.2 l'opérateur $I + \lambda U$ est inversible et il est facile de montrer que $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ vérifie l'équation résolvante : pour tout $\lambda, \mu > 0$

$$(I - (\lambda - \mu)U_\lambda)(I + (\lambda - \mu)U_\mu) = I,$$

soit encore $U_\mu = U_\lambda(I + (\lambda - \mu)U_\mu)$. $\square$

Soit $v \in \mathcal{B}_b$, nous rappelons que $v$ est dite que $\mathbb{U}-$*surmédiane* si $U_\lambda(\lambda v) \leqslant v$, $\forall \lambda > 0$ ; et que toute fonction $\mathbb{U} -$ *surmédiane* est positive. En effet, en posant $u = (I + \lambda U)^{-1}\,\lambda v$ on a $Uu = U_\lambda(\lambda v) \leqslant v = \frac{u}{\lambda} + Uu$ ce qui implique $u \geqslant 0$.

## 1.2 Le cas Monotone

Dans cette partie le noyau $V$ est supposé être basique et vérifiant le PCM. La fonction $\varphi$ vérifie l'une des deux conditions $(M_1)$ ou $(M_2)$.

**Lemme 1.4** [BH00] *Soient $\lambda > 0$ et $u, v, w$ trois fonctions dans $\mathcal{B}_b$ tels que :*

**a)** $\{w > \lambda v\} \subset \{w \geqslant \lambda u\}$,

**b)** $\{w < \lambda v\} \subset \{w \leqslant \lambda u\}$,

**c)** $u + \lambda V v = V w$.

*Alors,* $\lambda\|u\| \leqslant \|w\|$.

**Démonstration.** On a, d'après a),

$$\begin{aligned} V(\lambda(w - \lambda v)) &= \lambda V w - \lambda^2 V v = \lambda V w - \lambda(V w - u) \\ &= \lambda u < w \leqslant \|w\| \quad \text{sur } \{w > \lambda v\}. \end{aligned}$$

Le principe complet du maximum implique que $\lambda u = V(\lambda(w-\lambda v)) \leqslant \|w\|$.

De même

$$V(\lambda(\lambda v - w)) = -\lambda u < -w \quad \text{sur } \{w < \lambda v\}$$

implique que $-\lambda u \leqslant \|w\|$. □

**Lemme 1.5** [BH00] *Soient $u, v$ et $w \in \mathcal{B}_b$ telles que :*

*i)* $\{v > 0\} \subset \{u \geqslant 0\}$,

*ii)* $\{v < 0\} \subset \{u \leqslant 0\}$,

*iii)* *il existe $s$ bornée $V-$dominante telle que $|w| \leqslant s$,*

*iv)* $u + Vv = w$.

*Alors, on a $|u - w| \leqslant s$.*

**Démonstration.** $Vv \leqslant s$ sur $\{v > 0\}$, donc partout ; d'où $u - w \geqslant -s$. On montre de même que $u - w \leqslant s$ □

**Proposition 1.6** *l'opérateur $U = V\Phi$ est positif, croissant et vérifie le principe complet du maximum (version non-linéaire) : $\forall\ f,\ g \in \mathcal{B}_b$, $\forall \lambda \geqslant 0$*

$$Uf \leqslant Ug + \lambda \quad \textit{sur } \{f > g\} \Longrightarrow Uf \leqslant Ug + \lambda \quad \textit{partout.}$$

**Démonstration.** Il suffit de montrer que $U$ satisfait le principe complet du maximum.
Soient $f, g \in \mathcal{B}_b$ et soit $\lambda \geqslant 0$ tels que

$$Uf \leqslant Ug + \lambda \quad \text{sur} \quad \{f > g\}.$$

Puisque $\Phi$ est croissante, $\{\Phi(f) > \Phi(g)\} \subset \{f > g\}$. On a donc

$$V[\Phi(f) - \Phi(g)] \leqslant \lambda \quad \text{sur} \quad \{\Phi(f) > \Phi(g)\}$$

et d'après le principe complet du maximum, $V[\Phi(f) - \Phi(g)] \leqslant \lambda$ partout ; c'est-à-dire $Uf \leqslant Ug + \lambda$ partout □

**Lemme 1.7** *Pour tout $\lambda \geqslant 0$, l'opérateur $I + \lambda U$ est injectif sur $\mathcal{B}_b$*

**Démonstration.** Soient $u, v \in \mathcal{B}_b$, alors

$$u - v + \lambda Uu - \lambda Uv = u - v + \lambda V[\Phi(u) - \Phi(v)] = 0$$

implique, d'après le Lemme 1.4, $u = v$ □

**Proposition 1.8** *Supposons que $\varphi$ vérifie $(M_1)$. Soit $\lambda$ un réel, $0 < \lambda < \frac{1}{C\|V\|}$. Alors, l'opérateur $I + \lambda U$ est inversible sur $\mathcal{B}_b$ et $U(I + \lambda U)^{-1}$ est continu croissant. De plus on a pour tous $f, g \in \mathcal{B}_b$ :*

$$\begin{aligned}
\lambda|U(I+\lambda U)^{-1}f - U(I+\lambda U)^{-1}g| &\leqslant \|f-g\|, \\
\|(I+\lambda U)^{-1}f - (I+\lambda U)^{-1}g\| &\leqslant 2\|f-g\|.
\end{aligned}$$

**Démonstration.** Soit $\lambda$ un réel, $0 < \lambda < \frac{1}{C\|V\|}$. Pour montrer l'inversibilité de l'opérateur $I + \lambda U$, il suffit, d'après le Lemme 1.7, de montrer qu'il est surjectif sur $\mathcal{B}_b$. D'autre part, $V$ étant basique, des arguments utilisś dans la démonstration de la Proposition 1.2 nous permet de se ramener au cas $V$ compact pour la topologie de la convergence uniforme. Supposons alors que $V$ est compact et montrons que pour $g \in \mathcal{B}_b$ l'équation

$$u + \lambda U u = g,$$

admet au moins une solution dans $\mathcal{B}_b$.
Soit $g \in \mathcal{B}_b$ fixé. Considérons l'application $\mathcal{G}$ définie de $\mathcal{B}_b$ dans $\mathcal{B}_b$, par

$$\mathcal{G}(f) := g - V\Phi(f),$$

L'opérateur $V$ est complètement continu sur $\mathcal{B}_b$ et comme $\Phi$ est continu, $\mathcal{G}$ est un opérateur complètement continu de $\mathcal{B}_b$ dans $\mathcal{B}_b$.
Soit $M$ un réel tel que $\frac{(1+\|g\|)}{1-\lambda C\|V\|} \leqslant M$, et soit

$$E_M(X) := \{h \in \mathcal{B}_b : \|h\| \leqslant M\}.$$

Si $f \in E_M(X)$, on a

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}(f)\| &\leqslant \|g\| + C\lambda\|V\|(1+M) \\
&\leqslant M.
\end{aligned}$$

Le théorème du point fixe de Schauder implique que $\mathcal{G}$ admet au moins un point fixe dans $E_M(X)$, soit $u_0$ un tel point. Alors $u_0 + \lambda U(u_0) = g$.
Soient $f, g \in \mathcal{B}_b$ et $u = (I+\lambda U)^{-1}f$, $v = (I+\lambda U)^{-1}g$. On a :

$$u - v + \lambda V[\Phi(u) - \Phi(v)] = f - g,$$

$\lambda|U(I+\lambda U)^{-1}f - U(I+\lambda U)^{-1}g| = |u - v - (f-g)| \leqslant \|f-g\|$ d'après le Lemme 1.5, et par suite $\|(I+\lambda U)^{-1}f - (I+\lambda U)^{-1}g\| = \|u-v\| \leqslant 2\|f-g\|$. Si $f \leqslant g$, alors $\lambda V[\Phi(u) - \Phi(v)] \leqslant 0$ sur l'ensemble $\{\Phi(u) > \Phi(v)\}$ donc partout, ou encore $U(I+\lambda U)^{-1}f \leqslant U(I+\lambda U)^{-1}g$ $\square$

Pour tout $\lambda \geqslant 0$ tel que $I + \lambda U$ est inversible, on définit l'opérateur $U_\lambda = U(I+\lambda U)^{-1}$. $U_\lambda$ est un opérateur croissant.

**Proposition 1.9** *Supposons que $\varphi$ satisfait les mêmes hypothèses que la* Proposition 1.8*. Soit $0 < \lambda < \frac{1}{C\|V\|}$. Alors pour tout $\mu$, $0 < \mu < \frac{1}{2C\|V\|}$, l'opérateur $I + \mu U_\lambda$ est inversible.*

**Démonstration.** Soient $f, g \in \mathcal{B}_b$ telles que $f + \mu U_\lambda f = g + \mu U_\lambda g$. Posons $u = (I + \lambda U)^{-1} f$ et $v = (I + \lambda U)^{-1} g$. On a $Uu = U_\lambda f$, $Uv = U_\lambda g$ et

$$\begin{aligned} -\mu(Uu - Uv) &= f - g = u - v + \lambda(Uu - Uv) \\ &= u - v - \frac{\lambda}{\mu}(f - g) \end{aligned}$$

d'où $u - v = (1 + \frac{\lambda}{\mu})(f - g)$ et par suite $\{f > g\} = \{(I + \lambda U)^{-1} f > (I + \lambda U)^{-1} g\}$, $\{f < g\} = \{(I + \lambda U)^{-1} f < (I + \lambda U)^{-1} g\}$ et on déduit de l'équation

$$f - g + \mu V[\Phi(u) - \Phi(v)] = f - g + \mu U_\lambda f - \mu U_\lambda g = 0,$$

et du Lemme 1.5 que $f = g$. D'où l'injection de l'opérateur $I + \mu U_\lambda$.
on déduit de la Proposition 1.8 que la fonction $\Phi_\lambda = \Phi(I + \lambda U)^{-1}$ est continue de $\mathcal{B}_b$ dans $\mathcal{B}_b$ et vérifie :

$$|\Phi_\lambda(f)| \leqslant 2C(1 + \|f\|).$$

La surjection de l'opérateur $I + \mu U_\lambda = I + \mu V \Phi_\lambda$ se démontre alors de la même façon que dans la Proposition 1.8 $\square$

**Proposition 1.10** *Soit $\lambda > 0$. Supposons que $\varphi$ vérifie l'hypothèse $(M_2)$. Soit $g \in \mathcal{B}_b$, alors l'équation*

$$u + \lambda U u = g, \tag{2}$$

*admet au moins une solution dans $\mathcal{B}_b$. De plus, pour tout $\lambda \geqslant 0$, l'opérateur $I + \lambda U$ est inversible de $\mathcal{B}_b$ dans $\mathcal{B}_b$ et $U_\lambda = U(I + \lambda U)^{-1}$ est lipschitzien et croissant.*

**Démonstration.** Sans perdre de généralité nous pouvons supposer que $V$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}_b$. Pour $v$ dans $\mathcal{B}_b$ on note par $\mathfrak{S}(v)$ l'élément de $\mathcal{B}_b$ tel que

$$\mathfrak{S}(v) + \lambda V \mathfrak{S}(v) \psi(., v) = g. \tag{3}$$

L'application $\mathfrak{S}$ est Complètement continue de $\mathcal{B}_b$ dans $\mathcal{B}_b$. En effet, soit $(v_n)$ une suite qui converge vers $v$ dans $\mathcal{B}_b$ ; alors

$$\mathfrak{S}(v_n) - \mathfrak{S}(v) = \lambda V \psi(., v) \left[\mathfrak{S}(v) - \mathfrak{S}(v_n)\right] + \lambda V \left[\psi(., v) - \psi(., v_n)\right] \mathfrak{S}(v_n) \tag{4}$$

il est clair que $\lambda \left\| V\left[\psi(.,v) - \psi(.,v_n)\right] \mathfrak{S}(v_n)\right\| \longrightarrow 0$ lorsque $n$ tend vers l'infini. L'opérateur $f \longrightarrow \lambda V\psi(.,v)f$ étant compact, il existe au moins une sous-suite $(n_k)_k$ strictement croissante telle que $\left(\lambda V\psi(.,v)\left[\mathfrak{S}(v) - \mathfrak{S}(v_{n_k})\right]\right)_k$ converge. Notons $w$ la limite de $\left(\mathfrak{S}(v_{n_k}) - \mathfrak{S}(v)\right)_k$ lorsque $k$ tend vers l'infini. On obtient, par passage à la limite dans (4) $w + \lambda V\psi(.,v)w = 0$ et par suite $w = 0$ et on conclut que $\left\|\mathfrak{S}(v_n) - \mathfrak{S}(v)\right\| \longrightarrow 0$, puisque ceci est encore valable pour toute sous-suite extraite. La compacité du noyau $V$ implique celle de $\mathfrak{S}$.
D'après le principe complet du maximum on déduit de (3) que pour tout $v$ dans $\mathcal{B}_b$ on a $\|\mathfrak{S}(v)\| \leqslant 2\|g\|$ et d'après le théorème du point fixe de Schauder appliqué sur l'ensemble des éléments dans $\mathcal{B}_b$ de norme majorée par $2\|g\|$, il existe au moins un point fixe pour l'application $\mathfrak{S}$. Ce dernier vérifie évidement l'équation (2). Comme $z \longrightarrow \varphi(.,z)$ est croissante l'équation (2) admet une et une seule solution. La démonstration de la dernière assertion est analogue à celle donnée pour la Proposition 1.8 $\square$

**Théorème 1.11** *Pour tout $\lambda \geqslant 0$, l'opérateur $I + \lambda U$ est inversible et $\mathbb{U} = (U_\lambda)_{\lambda>0}$ est une résolvante (non linéaire) sous-markovienne, avec $U_0 = U$ et $\lambda U_\lambda 1 \leqslant 1$, pour tout réel positif $\lambda$.*

**Démonstration.** Dans le cas de l'hypothèse $(\mathbf{M}_2)$ la Proposition 1.10 donne le résultat. Supposons que $\varphi$ satisfait $(\mathbf{M}_1)$ et soit $\Lambda = \{\lambda > 0 : I + \lambda U$ est inversible $\}$. D'après la Proposition 1.8, $\Lambda$ contient l'intervalle $]0, \frac{1}{C\|V\|}[$. Soit $\lambda_0 \in \Lambda$ et soit $\lambda_0 \leqslant \lambda < \frac{3}{2}\lambda_0$. Alors, $\lambda - \lambda_0 < \frac{1}{2}\lambda_0 < \frac{1}{2C\|V\|}$ ; ce qui implique d'après la Proposition 1.9 que $I + (\lambda - \lambda_0)U_{\lambda_0}$ est inversible et comme $I + \lambda U = [I + (\lambda - \lambda_0)U_{\lambda_0}](I + \lambda_0 U)$ on en déduit que $\lambda \in \Lambda$. Ainsi pour tout $\lambda \geqslant 0$, l'opérateur $I + \lambda U$ est inversible de $\mathcal{B}_b$ dans $\mathcal{B}_b$.
La famille $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ vérifie évidemment l'équation résolvante et D'après la Proposition 1.8, on a

$$\lambda |U(I + \lambda U)^{-1} f - U(I + \lambda U)^{-1} g| \leqslant \|f - g\|,$$

d'où $\|\lambda U_\lambda f - \lambda U_\lambda g\| \leqslant \|f - g\|$, ce qui implique que $\lambda U_\lambda$ est sous-markovienne. $\square$

L'opérateur $U_\lambda$ étant croissant on définit $U_\lambda f$ pour $f \in \mathcal{B}^+$ en posant $U_\lambda f = \sup_n U_\lambda(f \wedge n)$.
Une fonction $v \in \mathcal{B}^+$ est dit $\Phi-$ *surmédiane* si $U_\lambda(\lambda v) \leqslant v$ pour tout $\lambda > 0$. On note par $\mathcal{S}_\Phi$ l'ensemble de toutes les fonctions $\Phi$–surmédianes et par $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les fonctions $V$–surmédianes.
$\mathcal{S}_\Phi$ est $\sigma$–stable, inf–stable et $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\Phi$.

**Proposition 1.12** *Pour tout $v$ dans $\mathcal{S}_\Phi$, l'application $\lambda \longrightarrow U_\lambda(\lambda v)$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.*

**Démonstration.** Supposons que $v$ est bornée, le cas général s'en déduit par monotonie. D'après l'équation résolvante on a

$$\begin{aligned} U_\mu(\mu v) &= U_\lambda[\mu v + (\lambda - \mu)U_\mu(\mu v)] \\ &= U_\lambda[\lambda v + (\mu - \lambda)(v - U_\mu(\mu v))] \\ &\geqslant U_\lambda(\lambda v). \end{aligned}$$

□

Une fonction $v \in \mathcal{S}_\Phi$ telle que

$$v = \sup_{\lambda > 0} U_\lambda(\lambda v)$$

est dite $\Phi-$ *excessive*. On désigne par $\mathcal{E}_\Phi$ l'ensemble de toutes les fonctions $\Phi$–excessives et par $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les fonctions excessives relativement à $V$. $\mathcal{E}_\Phi$ est $\sigma$–stable.

**Proposition 1.13** *i)* $\forall f \in \mathcal{B}^+$, $Uf \in \mathcal{E}_\Phi$.

*ii)* $\forall v \in \mathcal{E}_\Phi$, *il existe* $(f_n)_{n\geqslant 0} \subset \mathcal{B}_b^+(X)$ *telle que* $v = \sup_n Uf_n$. *De plus* $\mathcal{E}_\Phi \subset \mathcal{E}$.

**Démonstration.** *i)* Puisque $\mathcal{E}_\Phi$ est $\sigma$–stable, on peut supposer que $f \in \mathcal{B}_b^+(X)$. On a $Uf = V\Phi(f) \in \mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\Phi$. D'après la Proposition 1.8 on a, pour $\lambda > 0$, $Uf - U_\lambda(\lambda Uf) = U_\lambda(I + \lambda U)f - U_\lambda(\lambda Uf) \leqslant \frac{\|f\|}{\lambda}$. D'où

$$U_\lambda(\lambda Uf) \leqslant Uf \leqslant U_\lambda(\lambda Uf) + \frac{\|f\|}{\lambda},$$

pour $\lambda > 0$ et par suite $Uf = \sup_{\lambda>0} U_\lambda(\lambda Uf)$.
*ii)* Soient $v \in \mathcal{E}_\Phi$ et $v_n = v \wedge n$. On a $v_n \in \mathcal{S}_\Phi$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$v = \sup_n U_n(nv) = \sup_n U_n(nv_n) = \sup_n U[n(v_n - U_n(nv_n))].$$

Alors, $v = \sup_n Uf_n$ avec $f_n := n(v_n - U_n(nv_n)) \in \mathcal{B}_b$ et $v = \sup_n V(\Phi f_n) \in \mathcal{E}$.
□

# 2 Perturbations des Résolvantes

Soit $\mathbb{V} = (V_\lambda)_{\lambda>0}$ une résolvante sous- markovienne que nous supposerons basique (i.e. $V_\lambda$ basique pour tout $\lambda > 0$), définie sur l'espace $X$ localement compact à base dénombrable.

**Théorème 2.1** *I) Dans le cas parabolique ou dans le cas monotone on a pour tout $\lambda > 0$, il existe un unique opérateur continu $W_\lambda$, positif et croissant de $\mathcal{B}_b$ dans $\mathcal{B}_b$, tel que pour tout $f \in \mathcal{B}_b$ on a :*

$$W_\lambda f + V_\lambda(\Phi W_\lambda f) = V_\lambda f$$

*et la famille d'opérateur $\mathbb{W} = (W_\lambda)_{\lambda>0}$ est une résolvante.*

*II) De plus,*

*a) Dans le cas parabolique, l'opérateur $W_\lambda$ est croissant et localement lipschitzien pour tout $\lambda \geqslant 0$.*

*b) Dans le cas monotone, la résolvante $\mathbb{W} = (W_\lambda)_{\lambda>0}$ est sous-markovienne : $\forall \lambda > 0$, $\lambda W_\lambda 1 \leqslant 1$.*

**Démonstration.** $I$) Il suffit de remarquer que, dans tous les cas, les résultats obtenus dans la Section 1 sont encore valables pour tout $V_\lambda$, $\lambda > 0$. Considérons l'opérateur $Q_\lambda := V_\lambda \Phi$, alors $I + Q_\lambda$ est inversible ; on pose alors, pour $f \in \mathcal{B}_b$,

$$\begin{aligned} W_\lambda f &= (I + Q_\lambda)^{-1} V_\lambda f \\ &= (I + V_\lambda \Phi)^{-1} V_\lambda f, \end{aligned} \tag{5}$$

d'où

$$V_\lambda f = W_\lambda f + V_\lambda \Phi(W_\lambda f). \tag{6}$$

Soit $f \in \mathcal{B}_b$ et soient $\lambda, \mu > 0$. On déduit de l'équation résolvante

$$V_\lambda = V_\mu + (\mu - \lambda) V_\lambda V_\mu,$$

l'identité suivante :

$$Q_\lambda = Q_\mu + (\mu - \lambda) V_\lambda Q_\mu.$$

D'autre part

$$(I + Q_\mu)^{-1} = I - Q_\mu (I + Q_\mu)^{-1};$$

par suite

$$\begin{aligned} (I + Q_\lambda) W_\mu &= (I + Q_\lambda)(I + Q_\mu)^{-1} V_\mu \\ &= (I + Q_\mu)^{-1} V_\mu + Q_\lambda (I + Q_\mu)^{-1} V_\mu \\ &= [(I + Q_\mu)^{-1} + Q_\mu (I + Q_\mu)^{-1}] V_\mu + (\mu - \lambda) V_\lambda Q_\mu (I + Q_\mu)^{-1} V_\mu \\ &= V_\mu + (\mu - \lambda) V_\lambda (V_\mu - W_\mu) \\ &= V_\lambda [I + (\lambda - \mu) W_\mu]. \end{aligned}$$

Nous arrivons alors à

$$\begin{aligned} W_\mu f &= (I+Q_\lambda)^{-1}V_\lambda[f+(\lambda-\mu)W_\mu f] \\ &= W_\lambda[f+(\lambda-\mu)W_\mu f], \end{aligned}$$

d'où l'équation résolvante pour la famille $\mathbb{W}=(W_\lambda)_{\lambda>0}$.

*II*) *a*) Soit $f,g\in\mathcal{B}_b$, on a

$$\begin{aligned} V_\lambda(f-g) &= W_\lambda f - W_\lambda g + V_\lambda[\Phi(W_\lambda f)-\Phi(W_\lambda g)] \\ &= W_\lambda f - W_\lambda g + V_\lambda \Phi_{f,g}\,(W_\lambda f - W_\lambda g) \\ &= \left(I+V_\lambda\Phi^+_{f,g}\right)\left[I-\left(I+V_\lambda\Phi^+_{f,g}\right)^{-1}V_\lambda\Phi^-_{f,g}\right](W_\lambda f - W_\lambda g) \end{aligned}$$

et par suite

$$W_\lambda f - W_\lambda g = \left[I-\left(I+V_\lambda\Phi^+_{f,g}\right)^{-1}V_\lambda\Phi^-_{f,g}\right]^{-1}\left(I+V_\lambda\Phi^+_{f,g}\right)^{-1}V_\lambda(f-g). \quad (7)$$

D'où la croissance de $W_\lambda$.

Soit $f,g\in\mathcal{B}_b$. D'après (7) et le principe complet du maximum on obtient

$$-V_\lambda(f-g)^- \leqslant \left(I+V_\lambda\Phi^+_{f,g}\right)^{-1}V_\lambda(f-g)\leqslant V_\lambda(f-g)^+$$

et comme l'opérateur $\left[I-\left(I+V_\lambda\Phi^+_{f,g}\right)^{-1}V_\lambda\Phi^-_{f,g}\right]^{-1}$ est borné positif on en déduit que $W_\lambda$ est localement lipschitzien.

*b*) Soient $f_1,f_2\in\mathcal{B}_b$. Alors, sur l'ensemble $\{\Phi W_\lambda f_1>\Phi W_\lambda f_2\}\subset\{W_\lambda f_1 - W_\lambda f_2>0\}$ on a $V_\lambda[\Phi(W_\lambda f_1)-\Phi(W_\lambda f_2)]\leqslant V_\lambda(f_1-f_2)^+$ ; donc partout, et par suite $W_\lambda f_1 - W_\lambda f_2 = V_\lambda(f_2-f_1)-V_\lambda[\Phi(W_\lambda f_1)-\Phi(W_\lambda f_2)]\geqslant -V_\lambda(f_1-f_2)^-$. On montre de même que $W_\lambda f_1 - W_\lambda f_2\leqslant V_\lambda(f_1-f_2)^+$ et on en déduit que l'opérateur $W_\lambda$ est positif croissant. On obtient, pour tout $\lambda>0$ et pour toutes $f_1,f_2\in\mathcal{B}_b$,

$$-V_\lambda(f_2-f_1)^-\leqslant W_\lambda f_2 - W_\lambda f_1\leqslant V_\lambda(f_2-f_1)^+$$

d'où

$$|\lambda W_\lambda f_2-\lambda W_\lambda f_1|\leqslant\|f_2-f_1\|\lambda V_\lambda 1\leqslant\|f_2-f_1\|.$$

Donc $\mathbb{W}=(W_\lambda)_{\lambda>0}$ est sous-markovienne □

Si $f\in\mathcal{B}^+$ on pose $W_\lambda f=\sup_n W_\lambda(f\wedge n)$. De plus pour toute suite croissante $(f_n)_n\subset\mathcal{B}^+$, on a $W_\lambda f=\sup_n W_\lambda f_n$. Une fonction $v\in\mathcal{B}^+$ est dite $\mathbb{W}-$*surmédiane* si pour tout $\lambda>0$, $W_\lambda(\lambda v)\leqslant v$. On note $\mathcal{S}_\Phi$ (resp. $\mathcal{S}$) l'ensemble de toutes les fonctions $\mathbb{W}$–surmédianes (resp. $\mathbb{W}$–surmédianes).

On a $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\Phi$. $\mathcal{S}_\Phi$ est inf–stable et $\sigma$–stable. $\forall f \in \mathcal{B}^+$, $Wf$ est $\mathbb{W}$–surmédiane. $\forall v \in \mathcal{S}_\Phi$, l'application $\lambda \longrightarrow W_\lambda(\lambda v)$ est croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Une fonction $v \in \mathcal{S}_\Phi$ est dite $\mathbb{W}-$*excessive* si $\lim_{\lambda\to\infty} W_\lambda(\lambda v) = v$. On note $\mathcal{E}_\Phi$ (resp. $\mathcal{E}$) l'ensemble de toutes les fonctions $\mathbb{W}$–excessives (resp. $\mathbb{V}$–excessives. $\forall v \in \mathcal{E}_\Phi$, il existe une suite $(f_n)_n \subset \mathcal{B}_b^+$ telle que $v = \sup_n Wf_n$. $\forall f \in \mathcal{B}^+$, $Wf$ est $\mathbb{W}$–excessive.

**Théorème 2.2** *I) Si $v \in \mathcal{S}_\Phi$, alors $v + V(\Phi v) \in \mathcal{S}$ et $v' + V(\Phi v) \in \mathcal{E}$, où $v' = \sup_{\lambda>0} W_\lambda(\lambda v)$. De plus $v'$ est la plus grande minorante $\mathbb{W}$–excessive de $v$.*

*II) Soit $v \in \mathcal{B}_b^+$ telle que $v + V(\Phi v) \in \mathcal{S}$ (resp. $\in \mathcal{E}$), alors $v \in \mathcal{S}_\Phi$ (resp. $\in \mathcal{E}_\Phi$).*

**Démonstration.**

*I*) Soient $v \in \mathcal{S}_\Phi \cap \mathcal{B}_b^+$ et $u = v + V(\Phi v)$. Alors pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda V_\lambda u &= V_\lambda(\lambda v) + \lambda V_\lambda V(\Phi v) \\
&= W_\lambda(\lambda v) + V_\lambda[\Phi W_\lambda(\lambda v)] + \lambda V_\lambda V(\Phi v) \\
&\leqslant v + V_\lambda(\Phi v) + \lambda V_\lambda V(\Phi v) \\
&= v + V(\Phi v).
\end{aligned}$$

$u$ appartient donc à $\mathcal{S}$.
On a $\sup_{\lambda>0} \lambda V_\lambda V[\Phi W_\lambda(\lambda v)] = V(\Phi v')$. Comme

$$\lambda V_\lambda u = W_\lambda(\lambda v) + V[\Phi W_\lambda(\lambda v)] - \lambda V_\lambda V[\Phi W_\lambda(\lambda v)] + \lambda V_\lambda V(\Phi v),$$

on en déduit que $v' + V(\Phi v) = \sup_{\lambda>0} \lambda V_\lambda u \in \mathcal{E}$. En écrivant, pour $v \in \mathcal{S}_\Phi$, $v = \sup_n(v \wedge n)$ on montre que $v' + V(\Phi v) \in \mathcal{E}$.
Soit maintenant $v \in \mathcal{S}_\Phi$. Alors pour tout $\lambda > 0$, on obtient $V_\lambda v = V_\lambda(v')$. D'autre part le Théorème 2.1 implique que $0 \leqslant W_\lambda(\lambda v) - W_\lambda(\lambda v') \leqslant \lambda V_\lambda(v - v') = 0$ et par suite $v' \in \mathcal{E}_\Phi$.
Soit $w \in \mathcal{E}_\Phi$ telle que $w \leqslant v$, alors pour tout $\lambda > 0$, $W_\lambda(\lambda w) \leqslant W_\lambda(\lambda v) \leqslant v'$ et par suite $w \leqslant v'$ ; $v'$ est donc la plus grande minorante $\mathbb{W}$–excessive de $v$.

*II*) Soit $v \in \mathcal{B}_b^+$ telle que $u = v + V(\Phi v) \in \mathcal{S}$. On a

$$\begin{aligned}
W_\lambda(\lambda v) &= W_\lambda(\lambda v) - V_\lambda[\Phi W_\lambda(\lambda v)] \\
&= \lambda V_\lambda u - \lambda V_\lambda V(\Phi v) - V_\lambda[\Phi W_\lambda(\lambda v)].
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$v - W_\lambda(\lambda v) + V_\lambda[\Phi v - \Phi W_\lambda(\lambda v)] = u - \lambda V_\lambda u \geqslant 0.$$

Alors, le Théorème 2.1 implique que $v - W_\lambda(\lambda v) \geqslant 0$ ; c'est-à-dire $v \in \mathcal{S}_\Phi$.
D'après $I)$ on a, $u_0 = \sup_{\lambda>0} \lambda V_\lambda u = v' + V(\Phi v) \in \mathcal{E}$ et en utilisant ce qui précède on obtient

$$v' - W_\lambda(\lambda v') + V_\lambda[\Phi v' - \Phi W_\lambda(\lambda v')] = u_0 - \lambda V_\lambda u_0;$$

d'où

$$v - v' + V_\lambda(\Phi v - \Phi v') = u - u_0.$$

On en déduit que, si $u \in \mathcal{E}$ alors $v \in \mathcal{E}_\Phi$

□

# Références


[BH00] A. Baalal and W. Hansen, *Nonlinear perturbation of balayage spaces* , (2000). Preprint.

[BJ85] H. Ben Saad and K. Janssen, *A characterization of parabolic potential theory*, Math. ann. (1985), no. 272, 289–281.

[BH86] J. Bliedtner and W. Hansen, *Potential theory, an analytic and probabilistic approach to balayage*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Bou98b] A. Boukricha, *Nonlinear semigroups*, preprint.

[Del92] C. Dellacherie, *Une version non linéaire du théorème de Hunt*, Potential theory (Nagoya, 1990), de Gruyter, Berlin, (1992), pp. 25–32.

[Goo98a] F. A. van Gool, *Non-linear kernels and their resolvents*, Potential Analysis 12, 2000, pp. 203-210.

[Goo98b] F. A. van Gool, *Resolventes in semi-linear harmonic spaces*, Potential Analysis 12, 2000, pp. 191-201.

[HH88] W. Hansen and H. Hueber, *Eigenvalues in potential theory*, J. Differential Equations (1988), 73(1) :133–152.

[Maa94] H. Maagli, *Perturbation semi-linéaire des résolvantes et des semi-groupes*, Proceedings from the International Conference on Potential Theory (Amersfoort, 1991) (Dordrecht), vol. 3, Kluwer Acad. Publ., 1994, pp. 61–87.

[Mey71] P. A. Meyer, *Représentation intégrale des fonctions excessives, résultat de Mokobodzki*, Seminar on Probability, V, Springer, Berlin, 1971, pp. 196–208.

[Rev84] D. Revuz, *Markov Chains*, North-Holland, Amsterdam - New York - Oxford, 1984.

[Rit75] G. Ritter, *Konstruktion von opertoren und kernen mit hilfe von absoptionsmengen*, Math. ann. (1975), no. 216, 51–66.

Azeddine Baalal
Université Hassan II Aïn Chock,
Faculté des Sciences Aïn Chock, Département de Mathématiques et d'Informatiques, Km8, Route El Jadida B.P. 5366 Mâarif, Casablanca (Maroc),
Fax : (212) 2 23 06 74,
E-mail : baalal@facsc-achok.ac.ma