Identification des mesures vérifiant l'inégalité de Poincaré-Friedrichs et estimation du shift spectral pour le laplacien de Dirichlet.

A. Ben Amor
Universität Bielefeld. Fakultät für Mathematik.
BiBoS. D-33501. Bielefeld.
Germany.

6 octobre 2000

Résumé

On se propose de prouver que les mesures μ vérifiant l'inégalité de Poincaré-Friedrichs sont exactement les mesures dont l'opérateur associé K_Ω^μ est borné sur $L^2(\Omega,\mu)$. Etant donné deux mesures positives μ, ν avec μ dans la classe de Kato locale et ν vérifiant l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, une estimation du shift spectral et du trou spectral de la forme $-\Delta+\nu$ sur l'espace $L^2(\Omega,\mu)$ sont établies.

Key words : Mesure d'énergie finie, valeur propre, opérateur de Schrödinger, forme quadratique, shift spectral, trou spectral.

1 Introduction

Dans [29], P.Stollmann et J.Voigt ont prouvé que pour une certaine classe de mesures μ, on a : Pour tout $\alpha>0$, il existe une constante positive $C(\alpha)$ telle que tout $f\in H^1(I\!R^d)$, vérifi l'inégalité suivante :

$$\int_{I\!R^d}|f|^2d\mu \leq\ C(\alpha)(\int_{I\!R^d}|f|^2dx\ +\ \alpha\int_{I\!R^d}|\nabla f|^2dx) \tag{1}$$

En particulier pour des ouverts bornés Ω de $\mathbb{R}^d$, μ vérifie une inégalité de type Poincaré-Friedrichs : Pour tout $f \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega |f|^2 d\mu \leq \; C \int_\Omega |\nabla f|^2 dx \tag{2}$$

Pour une mesure μ dans la classe de Kato généralisée, l'inégalité (2) est prouvée dans [5]. Alors que pour μ localement potentiellement bornée cette inégalité est prouvée dans [4]. Pour une mesure admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue dont la densité est dans la classe de Kato, l'inégalité(1) a été prouvé par M.Schechter dans [27].
Ces types d'inégalités sont importantes pour l'étude des perturbations de la forme de Dirichlet associée à l'opérateur de Laplace par une mesure et pour traiter des problèmes relatifs aux opérateurs obtenus dits de Schrödinger généralisés [8], [29] , [5] et [3] : Propriétés spectrales, répartition des valeurs propres, propriétés des fonctions propres et estimation du nombre des valeurs propres inférieurs à un réel E.
Par ailleurs il serait intéréssant de caractériser les mesures vérifiant l'inégalité de Poincaré-Friedrichs.
Dans ce papier on se propose de prouver qu'une mesure de Radon positive ne chargeant pas les ensembles polaires vérifie l'inégalité de Poincaré-Friedrichs si et seulement si, pour tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, l'opérateur

$$K_\Omega^\mu : \; L^2(\Omega, \mu) \to L^2(\Omega, \mu), \; K_\Omega^\mu f = \int_\Omega G_\Omega(\cdot, y) f(y) d\mu(y) \tag{3}$$

est borné ; où G_Ω est la fonction de Green dans Ω telle qu'elle est définie dans [28] ou aussi [20].
Il s'en suit que si $d = 1$ alors pour toute mesure μ de Radon positive, K_Ω^μ est borné sur $L^2(\Omega, \mu)$. En plus pour tout $d \geq 1$, toute mesure dans la classe de Kato généralisée, K_Ω^μ est continue sur $L^2(\Omega, \mu)$, et il en est de même pour les mesures localement potentiellement bornées i.e les mesures μ telles que $G_\Omega^\mu \in L^\infty(\Omega, \mu)$, pour tout ouvert borné Ω.
Le papier sera organisé comme suit : Tout d'abord nous caractérisons les mesures qui vérifient l'inégalité(2). Ensuite, étant données deux mesures μ, ν, nous construisons la forme $-\Delta + \nu$ sur l'espace $L^2(\Omega, \mu)$, à l'aide des formes quadratiques. On montrera principalement qu'il est à résolvente compacte. A la fin nous donnerons differentes estimation du shift spectral.
Nous allons tout d'abord adopter quelques définitions et notations nécessaires

pour aborder le problème.
Par $\mathcal{S}^+$, on désigne l'ensemble de mesures positives ne chargeant pas les ensembles polaires de la théorie du potentiel classique. Ce sont les mesures dites régulières. L'ensemble des mesures de Radon positives localement potentiellement bornées sera noté par $\mathcal{M}^+_{pb,loc}$, alors que celui des mesures d'énergie localement finie sera noté par $\mathcal{E}^+_{loc}$.
Soient μ une mesure de Radon avec $\mu \in \mathcal{S}^+$ et Ω un ouvert de $I\!R^d$. On dit que μ est potentiellement bornée sur Ω si $G^\mu_\Omega \in L^\infty(\Omega, \mu)$. L'ensemble de ces mesures sera noté par $\mathcal{M}^+_{pb}(\Omega)$. Nous dirons que μ est localement potentiellement bornée si [18] $\mu \in \mathcal{M}^+_{pb}(\Omega)$, pour tout ouvert borné Ω. Elle est dite localement d'énergie finie [13] si $G^\mu_\Omega \in L^1(\Omega, \mu)$, pour tout ouvert borné Ω. Elle est dite de Kato locale (resp. de Kato) si [7] $G^\mu_B \in C_0(B)$ pour toute boule ouverte B (resp.$G^\mu = \int_{I\!R^d} G(\cdot, y) d\mu(y) \in C_0(I\!R^d)$).
Enfin on dit que μ est dans la classe de Kato généralisée, $\mathcal{K}^+_{gen}$, si

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{x \in I\!R^d} \int_{|x-y|<\epsilon} G(x,y) d\mu(y) = 0 \tag{4}$$

où G est le noyau défini par

$$G(x,y) = \begin{cases} 1 & ; \quad d = 1 \\ |\log|x-y|| & ; \quad d = 2 \\ |x-y|^{2-d} & ; \quad d \geq 3 \end{cases}$$

On a alors les inclusions suivantes :

$$\mathcal{K}^+_{loc} \subset \mathcal{K}^+_{gen} \subset \mathcal{M}^+_{pb,loc} \subset \mathcal{E}^+_{loc} \subset \mathcal{S}^+ \tag{5}$$

Rappelons le résultat suivant dont on va souvent se servir [20] concernant la caractérisation des potentiels qui sont dans $H^1_0(\Omega)$: $\mu \in \mathcal{E}^+_{loc}$ si et seulement si $G^\mu_\Omega \in H^1_0(\Omega)$, où $H^1_0(\Omega)$ est l'espace de Sobolev classique.
La notion de capacité utilisée est celle de Dirichlet classique, on la notera par cap. Pour un ouvert borné U, la capacité de U est définie par

$$\text{cap}(U) = \inf\{\int_U |\nabla f|^2 dx, \ f \in H^1_0(U), \ f \geq 1, \ p.p, \ \text{sur } U\}\cdot \tag{6}$$

Elle est prolongée d'une manière habituelle pour des ensembles quelconques.
Une fonction f définie sur Ω est dite quasi-continue (ce que nous noterons q.c) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert U telle que $\text{cap}(U) < \epsilon$ et $f_{|\Omega \cap U^c}$

est continue. Rappelons le fait bien connu que toute fonction $f \in H_0^1(\Omega)$ admet un représentant quasi-continu [13]. Enfin une propriété est dite vraie quasi-partout (q.p) si elle est vraie à un ensemble polaire près.
D'après [13]p.353, toute fonction $f \in H_0^1(\Omega)$ peut être modifiée de telle sorte qu'elle devient quasi-continue. Dans toute la suite, nous allons supposer que les éléments de $H_0^1(\Omega)$ sont modifiés de cette façon.
Enfin nous dirons qu'une mesure positive μ, vérifie l'inégalité de Poincaré-Friedrichs si pour tout ouvert borné Ω de $I\!R^d$ il existe une constante $C = C(\Omega, \mu)$ telle que pour toute fonction $f \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega |f|^2 d\mu \leq \; C \int_\Omega |\nabla f|^2 dx \cdot \tag{7}$$

L'ensemble de ces mesures va être noter par $\mathcal{M}^+_{P-F}$. La mesure de Lebesgue sur $I\!R^d$ sera notée par λ^d, sous le signe intégrale on la notera simplement par dx ; pour une mesure μ positive, l'espace $L^2(I\!R^d, \mu)$ sera noté par $L^2(\mu)$. Enfin pour tout ouvert Ω, on notera par $\mathcal{B}(\Omega)$ la tribu borélienne sur Ω.

2 Caractérisation des mesures vérifiant l'inégalité de Poincaré-Friedrichs

Pour parvenir à prouver le résultat nous avons besoin de quelques lemmes préparatoires.

Lemme 2.1 *Soit μ une mesure de Radon sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$. Supposons que $\mu \in \mathcal{S}^+$, alors il existe une suite de mesures $(\mu_n) \subset \mathcal{M}^+_{pb}(\Omega)$ telle que pour tout $n \in I\!N$, on a $\mu_n(\Omega) \leq \mu(\Omega)$ et $G_\Omega^{\mu_n}(x)$ croit vers $G_\Omega^\mu(x)$, $\mu - p.p$ sur Ω.*

Démonstration
La démonstration est inspirée de celle de A.Grégoryan et W.Hansen [16]. Puisque $\mu \in \mathcal{S}^+$, alors l'ensemble $\{G_\Omega^\mu = +\infty\} = 0$ est un polaire et par suite $\mu\{G_\Omega^\mu = +\infty\} = 0$. Pour tout $n \in I\!N$, on note par A_n l'ensemble

$$A_n := \{x \in \Omega, \; G_\Omega^\mu(x) < n\} \tag{8}$$

Posons $\mu_n := 1_{A_n}\mu$, on constate alors que $G_\Omega^{\mu_n}$ croit vers G_Ω^μ et que $\mu_n(\Omega) \leq \mu(\Omega)$. D'autre part, on a $G_\Omega^{\mu_n} \leq \; G_\Omega^\mu \leq \; n$ sur A_n et donc partout. Il en découle que $G_\Omega^{\mu_n} \in L^\infty(\Omega, \mu)$, et donc $\mu_n \in \mathcal{M}^+_{pb}(\Omega)$. $\square$

Lemme 2.2 *Soit μ une mesure de Radon avec appartenant à $\mathcal{S}^+$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Supposons qu'il existe une constante positive $C = C(\Omega, \mu)$ telle que pour toute fonction f de $H_0^1(\Omega)$ on a*

$$\int_\Omega |f|^2 d\mu \leq \ C \int_\Omega |\nabla f|^2 dx \tag{9}$$

Alors $\mu \in \mathcal{E}^+_{loc}$.

Démonstration

Soit (μ_n) une suite de mesures telle qu'elle est donnée par le lemme(2.1). Le fait que μ_n soit potentiellement bornée sur Ω implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a [20], [21]

$$G_\Omega^{\mu_n} \ \in \ H_0^1(\Omega) \tag{10}$$

et alors

$$\int_\Omega |G_\Omega^{\mu_n}|^2 d\mu \leq \ C \int_\Omega |\nabla G_\Omega^{\mu_n}|^2 dx \tag{11}$$

D'autre part [20](théorème.1 ou [21] théorème.9), on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla G_\Omega^{\mu_n}|^2 dx \ &= \ \int_\Omega G_\Omega^{\mu_n} d\mu_n \\ &\leq \mu_n(\Omega)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |G_\Omega^{\mu_n}|^2 d\mu_n)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \ \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |G_\Omega^{\mu_n}|^2 d\mu)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \ C^{\frac{1}{2}} \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |\nabla G_\Omega^{\mu_n}|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{12}$$

Finalement on obtient $\int_\Omega |G_\Omega^{\mu_n}|^2 d\mu \leq \ C\mu(\Omega)$. D'autre part $G_\Omega^{\mu_n} \to G_\Omega^{\mu}, \ \mu -$ $p.p$ sur Ω. En utilisant le théorème de convergence monotone, on obtient $\int_\Omega |G_\Omega^\mu|^2 d\mu < +\infty$ et il en est de même pour $\int_\Omega G_\Omega^\mu d\mu$. Donc $\mu \in \mathcal{E}^+_{loc}$. $\square$

On est en mesure maintenant d'établir le résultat caractérisant les mesures vérifiant l'inégalité de Poincaré-Friedrichs.

Théorème 2.1 *Soit μ une mesure de Radon appartenant à $\mathcal{S}^+$, alors μ vérifie l'inégalité de Poincaré-Friedrichs si et seulement si l'opérateur :*

$$K_\Omega^\mu : \ L^2(\Omega, \mu) \to L^2(\Omega, \mu), \ K^\mu f = \int_\Omega G_\Omega(\cdot, y) f(y) d\mu(y)$$

est borné. Dans ces condition la plus petite constante de l'inégalité vaut $\|K_\Omega^\mu\|$.

Démonstration
Supposons que K_Ω^μ est borné et notons par $C_\Omega(\mu) := \|K_\Omega^\mu\|_{L^2(\Omega,\mu)}$. Soit $f \in C_0^\infty(\Omega)$, positive : alors on a

$$-\Delta K_\Omega^\mu f = f\mu \tag{13}$$

au sens des distributions. Posons $\nu = f\mu$, alors $\nu \in \mathcal{E}_{loc}^+$, en effet

$$\begin{aligned}\int_\Omega G^\nu d\nu &= \int_\Omega f K_\Omega^\mu f d\mu \\ &\leq \|K_\Omega^\mu f\|_{L^2(\Omega,\mu)} \|f\|_{L^2(\Omega,\mu)} \ .\end{aligned} \tag{14}$$

Il s'en suit que $G^\nu = K_\Omega^\mu f \in \ H_0^1(\Omega)$, et donc (13) implique que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla K_\Omega^\mu f \nabla f \ dx &= \int_\Omega f^2 d\mu \\ &\leq (\int_\Omega |\nabla K_\Omega^\mu f|^2 \ dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |\nabla f|^2 \ dx)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{15}$$

D'autre part on a [20] :

$$\int_\Omega |\nabla K_\Omega^\mu f|^2 \ dx = \int_\Omega f K_\Omega^\mu f \ \leq \ C_\Omega(\mu) \int_\Omega f^2 \ d\mu$$

Ce qui nous mène à : $\int_\Omega |f|^2 \ d\mu \leq \ C_\Omega(\mu) \int_\Omega |\nabla f|^2 \ dx$, pour tout $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Pour $f \in H_0^1(\Omega)$, l'inégalité s'obtient en utilisant le lemme de Fatou.
Réciproquement, supposons qu'il existe une constante $C_\Omega(\mu)$ telle que pour tout $f \in H_0^1(\Omega)$, on a : $\int_\Omega |f|^2 \ d\mu \leq \ C_\Omega(\mu) \int_\Omega |\nabla f|^2 \ dx$. D'après le lemme 2.2, $\mu \in \mathcal{E}_{loc}^+$ donc , pour tout $f \in C_0^\infty(\Omega)$, $K_\Omega^\mu f \in H_0^1(\Omega)$ et alors :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |K_\Omega^\mu f|^2 d\mu \leq \ C_\Omega(\mu) \int_\Omega |\nabla K_\Omega^\mu f|^2 \ dx &= C_\Omega(\mu) \int_\Omega f K_\Omega^\mu f d\mu \\ &\leq \ C_\Omega(\mu) (\int_\Omega |f| d\mu)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |K_\Omega^\mu f|^2 d\mu)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{16}$$

Enfin on a : $\|K_\Omega^\mu f\|_{L^2(\Omega,\mu)} \ \leq \ C_\Omega(\mu) \|f\|_{L^2(\Omega,\mu)}$, pour tout $f \in C_0^\infty(\Omega)$ et parsuite pour tout $f \in L^2(\Omega, \mu)$.
Le reste est facile à établir. □
Ainsi le problème de vérifier qu'une mesure satisfait l'inégalité de Poincaré-Friedrichs revient un tester la continuité d'un opérateur à noyau sur un éspace L^2. Ce dernier probème est souvet plus facile à aborder par exemple, à l'aide du "Test de Shur" [17].

Remarque 2.1 *Comme pour le cas des mesures localement potentiellement bornées [4], il est possible de prouver que pour tout μ vérifiant l'inégalité de Poincaré-Friedrichs et pour tout $f \in H_0^1(\Omega)$ il existe une constante C tel que*

$$\int_\Omega |\nabla K_\Omega^\mu f|^2 d\mu \;\leq\; C \int_\Omega |f|^2 d\mu \tag{17}$$

Ce qui implique que l'opérateur

$$K_\Omega^\mu : \; L^2(\Omega,\mu) \longrightarrow \; H_0^1(\Omega), \; K_\Omega^\mu f = \int_\Omega G_\Omega(\cdot,y) f(y) d\mu(y) \tag{18}$$

est borné.

Un sous ensemble de l'ensemble de $\mathcal{M}_{P-F}^+$, est celui des mesures localement potentiellement bornées. Pour ces mesures il est même possible de donner une estimation de la constante intervenant dans l'inégalité de Poincaré-Friedrichs. En fait on a [4] : pour toute fonction $f \in \; H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega |f|^2 d\mu \;\leq\; \|G_\Omega^\mu\|_\infty \int_\Omega |\nabla f|^2 dx \tag{19}$$

Nous allons maintenant envisager d'établir une inégalité du type : Pour tout $k \geq 0$, pour tout $f \in H^1(I\!R^d)$,

$$\int_{I\!R^d} |f|^2 d\mu \;\leq\; C(k)(\int_{I\!R^d} |f|^2 dx \;+\; k^2 \int_{I\!R^d} |\nabla f|^2 dx) \tag{20}$$

où $C(k)$ est une constante positive.
Pour cela nous allons introduire les notations suivantes : Soit $k \geq 0$, on note par G_k (resp. $G_{k,\Omega}$) la fonction de Green de l'opérateur $L_k := -\Delta \;+\; k^2$ (resp. $L_{k,\Omega} = \; -\Delta \;+\; k^2$, sur Ω, c'est à dire opérant sur des fonction définie sur Ω). Les potentiels correspondants seront notés par G_k^μ (resp. $G_{k,\Omega}^\mu$).

Théorème 2.2 *Soit k un réel positif et μ une mesure de Radon positive et régulière tels que l'opérateur*

$$K_k^\mu \; : L^2(\mu) \to L^2(\mu), \; K_k^\mu f \;=\; \int_{I\!R^d} G_k(\cdot,y) f(y) d\mu(y) \tag{21}$$

est borné. Alors l'inégalité(20) est réalisée.

Démonstration
Soit $f \in C_0^\infty(I\!R^d)$, Ω un ouvert borné de $I\!R^d$ contenant le support de f. D'après [20], [28] et en raisonnant comme pour la preuve du théorème2.1, on a :

$$\int_{I\!R^d} |f|^2 d\mu \ = \int_\Omega |f|^2 d\mu \ \leq \ \|K_{k,\Omega}^\mu\|_{L^2(\Omega,\mu)} (\int_\Omega |f|^2 dx \ + \ k^2 \int_\Omega |\nabla f|^2 dx)$$

Comme $G_{k,\Omega} \ \leq \ G_k$, on obtient

$$\int_{I\!R^d} |f|^2 d\mu \ \leq \ \|K_k^\mu\|_{L^2(\mu)} (\int_{I\!R^d} |f|^2 dx \ + \ k^2 \int_{I\!R^d} |\nabla f|^2 dx) \tag{22}$$

Pour un élement f quelconque de $H^1(I\!R^d)$ la preuve se fait en l'approchant par une suite de $C_0^\infty(I\!R^d)$. $\square$

Remarque 2.2 *Notons que la classe des mesures pour lesquelles l'inégalité (20) est vraie, est plus large que celle $\widehat{S}_K$ introduite dans [29]. En effet la classe $\widehat{S}_K$ correspond à celles des mesures potentiellement bornées relativement à G_k pour un certain $k > 0$, i.e : $\|G_k^\mu\|_\infty < \infty$. Or si cette condition est vérifiée alors K_k^μ est borné et on a $\|K_k^\mu\|_{L^2(\mu)} \ \leq \ \|G_k^\mu\|_\infty$.*
On a en fait élargit la classe des mesures pour lesquelles une perturbation du laplacien par une mesure peut être considérée.

3 Estimations du shift spectral pour le Laplacien perturbé

La perturbation du laplacien avec conditions de Dirichlet par une fonction ou plus généralement par une mesure a fait l'objet d'une littérature assez vaste et diversifiée, [4] [7], [6], [5], [3], [19] , [22] et [11].
Rappelons que l'opérateur de Laplace $-\Delta$ avec condition de Dirichlet sur un ouvert borné Ω, est associé à la forme de Dirichlet

$$\mathcal{F}_0, \ D(\mathcal{F}_0) = H_0^1(\Omega), \ \mathcal{F}_0[f] = \int_\Omega |\nabla \ f|^2 dx \tag{23}$$

Cette construction est traditionnellement faite sur l'espace $L^2(\Omega, \lambda^d)$, mais une fois qu'on a établi l'inclusion

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega, \mu) \tag{24}$$

pour toute mesure $\mu \in \mathcal{E}_{loc}^{+}$, on peut se demander s'il est possible de construire $-\Delta$ dans l'espace $L^2(\Omega, \mu)$. On s'aperçoit immédiatement que pour qu'une telle construction soit possible, il faut que l'inclusion en question soit injective. Pour cela on a le

Lemme 3.1 *$H_0^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^2(\Omega, \mu)$ si et seulement si Ω est dans le support fin de μ.*

Le support fin de μ est le support de μ relativement à la topologie fine.
Pour la démonstration, nous renvoyons à [4].
Dans toute la suite, on suppose que le support fin de μ est $\mathbb{R}^d$. Ceci nous permet de considérer la forme $\mathcal{F}_0$ dans l'espace $L^2(\Omega, \mu)$ et en fait, on a :

Proposition 3.1 *La forme $\mathcal{F}_0$ est préfermée dans $L^2(\Omega, \mu)$.*

Démonstration
Soit $(f_n) \subset H_0^1(\Omega)$ une suite telle que $f_n \to 0$ dans $L^2(\Omega, \mu)$ et $\mathcal{F}_0[f_n - f_m] \to 0$ ce qui implique que (f_n) converge vers f dans $H_0^1(\Omega)$. Il faut prouver que $f = 0, \lambda^d - p.p.$ Or par l'inégalité de Poincaré-Friedrichs on conclut que $f = 0.\ \mu - p.p.$ et donc par lemme(3.1), on conclut que $f = 0,\ \lambda^d - p.p.$ $\square$
Nous noterons encore par $\mathcal{F}_0$ la fermeture de $\mathcal{F}_0$ dans $L^2(\Omega, \mu)$.

Lemme 3.2 *La forme $\mathcal{F}_0$ est une forme de Dirichlet régulière locale et positive dans $L^2(\Omega, \mu)$.*

La démonstration est tout à fait similaire au cas classique [15], on va donc l'omettre.
Notons par H_0 l'unique opérateur auto-adjoint associé à $\mathcal{F}_0$: H_0 est tel que $H_0^1(\Omega) \subset D(H_0^{\frac{1}{2}})$ et pour tout $f,\ g \in D(H_0^{\frac{1}{2}})$ on a :

$$(H_0 f, g)_{L^2(\Omega,\mu)} = \mathcal{F}_0(f, g) \tag{25}$$

Nous allons tout d'abord étudier les propriétés spectrales de l'opérateur H_0. Pour cela nous allons introduire la notion de μ-valeur propre déjà investiguée dans [18], [19], [5], [3] et [4]. Par la suite nous allons mentionner quelques remarques concernant la relation (ou la comparaison) entre les valeurs propres de $\mathcal{F}_0$ et les μ-valeurs propres. Rappelons tout d'abord la définition d'une μ-valeur propre.

Définition 3.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et μ une mesure positive appartenant à la classe de Kato généralisée. On dit qu'un réel λ est une μ-valeur propre de $-\Delta$ sur Ω, s'il existe une fonction $f \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ telle que*

$-\Delta f = \lambda f \mu$ au sens des distributions. Une telle fonction est dite μ-fonction propre.

Il est connu [5] [4], que si la mesure μ est dans $\mathcal{K}^+_{loc}$ ou bien dans $\mathcal{K}^+_{gen}$, que les μ-valeurs propres sont positives, au plus dénombrables et tendent vers l'infinie. En plus les μ-fonctions propres forment une base orthonormale de $L^2(\Omega, \mu)$. Si en plus Ω est régulier alors elles sont continues bornées.
Dans toute la suite on suppose que $\mu \in \mathcal{K}^+_{loc}$ et on désigne par Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$.

Proposition 3.2 *Toute μ-valeur propre de $-\Delta$ sur Ω est une valeur propre de $\mathcal{F}_0$ et réciproquement.*

Démonstration
Soit λ une μ-valeur propre de $-\Delta$ sur Ω ayant f pour μ-fonction propre, puisque $H^1_0(\Omega) \subset L^2(\Omega, \mu)$ alors $\int_\Omega |\nabla f|^2 dx = \lambda \int_\Omega |f|^2 d\mu$. Donc λ est une valeur propre de $\mathcal{F}_0$.
Réciproquement, soient (f_k) les μ-fonctions propres de $-\triangle$ sur Ω, il est connu [18],[5] que (f_k) forme une base orthogonale de l'espace $L^2(\Omega, \mu)$. D'autre part comme $\mathcal{F}_0$ est symétrique alors deux fonctions propres associées à deux valeurs propres différentes sont orthogonales dans $L^2(\Omega, \mu)$. Soit λ une valeur propre de $\mathcal{F}_0$ ayant f_λ pour fonction propre. Supposons que λ n'est pas une μ-valeur propre alors $(f_\lambda, f_k) = 0$, pour tout k et donc $f_\lambda = 0$, ce qui est absurde. $\square$
Nous allons maintenant procéder à une perturbation de $\mathcal{F}_0$ par une mesure ν positive et étudier les propriétés spectrales de la forme perturbée. Une condition nécéssaire pour que la perturbation ait un sens est que ν ne charge pas les ensembles polaires. Ainsi deux représentants quasi-continues $f_1,\ f_2$ de f sont égaux quasi-partout et donc

$$\int_\Omega |f_1|^2 d\nu \;=\; \int_\Omega |f_2|^2 d\nu \;\cdot \tag{26}$$

On suppose dans toute la suite, sauf mention contraire, que $\nu \in \mathcal{E}^+_{loc}$.

Proposition 3.3 *Sous les conditions précédentes, la forme*

$$\mathcal{F}_\nu,\ D(\mathcal{F}_\nu) = H^1_0(\Omega),\ \mathcal{F}_\nu[f] = \mathcal{F}_0[f] + \int_\Omega |f|^2 d\nu \tag{27}$$

est fermée dans $L^2(\Omega, \mu)$. En plus elle est semibornée inférieurement.

Nous allons noter par H_ν l'opérateur associé à $\mathcal{F}_\nu$. Formellement $H_\nu = -\Delta + \nu$. La question qui se pose maintenant est la suivante : H_ν est-il à résolvente compacte ? Dans plusieurs cas la réponse est affirmative. Par exemple si ν est dans la classe de Kato locale, ou bien si ν est à densité par rapport à μ.

Proposition 3.4 *L'opérateur H_ν est à résolvente compacte.*

Démonstration
Posons

$$U_{H_\nu}(f_1, ..., f_n) = \inf\{(H_\nu f, f);\ f \in D(H_\nu), \|f\|_{L^2(\Omega,\mu)} = 1,\ f \in [f_1, ..., f_n]^\perp\}$$

et

$$\lambda_n(H_\nu) = \sup_{f_1,\cdots,f_{n-1}} \{U_{H_\nu}(f_1, ..., f_n)\}$$

Puisque $H_\nu \geq H_0$, on a $\lambda_n(H_\nu) \geq \lambda_n(H_0)$. D'autre part comme le support fin de μ contient Ω alors l'espace $L^2(\Omega, \mu)$ est de dimension infinie. Il s'en suit [4] que les μ-valeurs propres $-\Delta$ tendent vers $+\infty$. Or celles ci sont exactement les valeurs propres H_0 donc

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n(H_\nu) = +\infty \tag{28}$$

On conclut enfin en utilisant le théorème XIII.64 dans [26]p.245. $\square$
Sous une perturbation positive de la forme $\mathcal{F}_0$, on constate que les valeurs propres seront translatées vers la droite, puisque visiblement $\mathcal{F}_\nu \geq \mathcal{F}_0$. On note par $\lambda_{1,\nu}$, la plus petite valeur propre de la forme $\mathcal{F}_\nu$; pour $\nu = 0$ on notera $\lambda_{1,0}$ simplement par λ_1.
Le problème d'établir une estimation du shift spectral i.e. :$\lambda_{1,\nu} - \lambda_1$ est intéréssant en tant que tel.
Pour $\mu = \lambda^d$ et $\nu = V$ avec $V \in L^\infty(\Omega)$, il a été établie par E.B. Davies [12] que

$$|\lambda_{k,V} - \lambda_k| \leq \ \|V\|_\infty \tag{29}$$

Le même problème a été traité par I. McGillivray [24] pour $\mu = \lambda^d$ et la forme perturbée est celle correspondant au problème de Laplace avec conditions de Dirichlet sur un compacte $K \subset I\!R^d$. Sous l'hypothese que H est irréductible (Ω est connexe par exemple) et $\exp(-tH)$ est ultracontractant pour tout $t > 0$, une estimation en terme de la capacité de K a été établie.

Récemment A. Noll [25] a pu dans la même direction généralisé ces résultats en terme de la capacité d'un sous espace vectoriel.
Dans ce qui suit, on va noter par C_μ (resp. C_ν) la norme $\|K_\Omega^\mu\|_{L^2(\Omega,\mu)}$ (resp. $\|K_\Omega^\nu\|_{L^2(\Omega,\nu)}$). L'énergie de μ sur Ω sera notée par $E_\Omega(\mu)$, si $\mu = \lambda^d$, $E_\Omega(\lambda^d)$ sera notée par E_Ω. Nous allons établir une estimation du shift spectral en termes de quantités relatives à Ω, μ et ν.

Proposition 3.5 *On a*

$$0 \leq \; \lambda_{1,\nu} - \lambda_1 \leq \; C_\nu \frac{E_\Omega(\mu)}{\|G_\Omega^\mu\|^2_{L^2(\Omega,\mu)}} \tag{30}$$

$$1 \; \leq \; \frac{\lambda_{1,\nu}}{\lambda_1} \; \leq \; 1 + C_\nu \tag{31}$$

Démonstration
Par le principe du min-max, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda_{1,\nu} \;&=\; \inf\{\mathcal{F}_\nu[f],\; f \in D(\mathcal{F}_\nu),\; \|f\|_{L^2(\mu)} = 1\} \\ &\leq\; \lambda_1 + \inf\{\int_\Omega |f|^2 d\nu,\; f \in D(\mathcal{F}_\nu),\; \|f\|_{L^2(\mu)} = 1\} \end{aligned} \tag{32}$$

Puisque le support fin de μ est $I\!R^d$ alors $G_\Omega^\mu \neq 0$, $q.p$ en plus il est dans $H_0^1(\Omega)$. Posons

$$g = \frac{G_\Omega^\mu}{\|G_\Omega^\mu\|_{L^2(\mu)}}$$

alors

$$\inf\{\int_\Omega |f|^2 d\nu \, f \in D(\mathcal{F}_\nu),\; \|f\|_{L^2(\mu)} = 1\} \leq \; \int_\Omega |g|^2 d\nu \tag{33}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_\Omega |g|^2 d\nu \;&=\; \frac{1}{\|G_\Omega^\mu\|^2_{L^2(\mu)}} \int_\Omega |G_\Omega^\mu| d\nu \\ &\leq \frac{C_\nu}{\|G_\Omega^\mu\|^2_{L^2(\mu)}} \int_\Omega |\nabla G_\Omega^\mu|^2 dx = C_\nu \frac{E_\Omega(\mu)}{\|G_\Omega^\mu\|^2_{L^2(\mu)}} \end{aligned} \tag{34}$$

L'inégalité(31) est facile à établir. □

Remarque 3.1 *On a* $E_\Omega(\mu) \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}}\|G_\Omega^\mu\|_{L^2(\mu)}$ *et donc on obtient*

$$0 \leq \ \lambda_{1,\nu} - \lambda_1 \leq \ C_\nu \frac{\mu(\Omega)^{\frac{1}{2}}}{\|G_\Omega^\mu\|_{L^2(\mu)}} \tag{35}$$

Si en plus $\nu \in \mathcal{M}^+_{pb,loc}$ *alors* $C_\nu \leq \|G_\Omega^\nu\|_\infty$ *et donc*

$$0 \leq \lambda_{1,\nu} - \lambda_1 \leq \|G_\Omega^\nu\|_\infty \frac{\mu(\Omega)^{\frac{1}{2}}}{\|G_\Omega^\mu\|_{L^2(\mu)}} \tag{36}$$

Il s'en suit que si $\mu = \lambda^d$, $\nu = V \in L^\infty$ *et* Ω *est la boule de centre* 0 *et de rayon* R*, alors* $C_\nu \leq \ C_d\|V\|_\infty$*, où* C_d *est la constante intervenant dans l'inégalité de Poincaré-Friedrichs classique et elle vaut [1]* CR*, où* C *est une constante positive. Et donc*

$$0 \leq \ \lambda_{1,\nu} - \lambda_1 \leq \ C\frac{\|V\|_\infty}{|S_{d-1}|} \tag{37}$$

où $|S_{d-1}|$ *est la surface de la sphère unité dans* $\mathbb{R}^d$.

Exemple 3.1 *On suppose que* $d \geq 3$, $\nu = V \in \ L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ *avec* $d > \frac{d}{2}$ *et* $V \geq 0$*. Alors d'après [2],* $V \in {\mathcal{K}_{loc}}^+$*. Supposons de plus que* Ω *est la boule ouverte de centre* 0 *et de rayon* R *qu'on va noter par* B_R *alors que* $G_{B_R}^{\lambda^d}$ *sera noté par* G_{B_R}*, s'il n'y a pas de confusion avec la fonction de Green de la boule* B_R*. Nous allons tout d'abord établir une estimation pour* C_ν*.*
Soit p' *le conjugué de* p*, alors par l'inégalité de Hölder pour tout* $f \in H^1_0(\Omega)$*, on a*

$$\begin{aligned}\int_\Omega V|f|^2dx \ &\leq \ (\int_\Omega V^p dx)^{\frac{1}{p}}(\int_\Omega |f|^{2p'}dx)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \ |B_R|^{\frac{1}{q'p'}}\|V\|_{L^p(\Omega)}(\int_\Omega |f|^{\frac{2d}{d-2}}dx)^{\frac{p'(d-2)}{dp'}}\end{aligned} \tag{38}$$

où $q = \frac{d}{p'(d-2)}$, q' *et le conjugué de* q *et* $|B_R|$ *est le volume de* B_R*. Posons* $s = \frac{1}{q'p'}$ *alors on a* $(\int_\Omega |f|^{2p'}dx)^{\frac{1}{p'}} \leq \ |B_R|^s(\int_\Omega |f|^{\frac{2d}{d-2}}dx)^{\frac{d-2}{d}}$*. D'autre part on a [23]p.186*

$$(\int_\Omega |f|^{\frac{2d}{d-2}}dx)^{\frac{d-2}{d}} \leq \ S_d^{-1}\int_\Omega |\nabla f|^2dx \tag{39}$$

avec $S_d = \frac{d(d-2)}{4}|S_{d-1}|^{\frac{2}{d}}$ *et* S_{d-1} *est la sphère unité de* $I\!R^d$.
Tenant compte des inégalités déjà établies on obtient

$$C_\nu \;\leq\; \frac{|B_R|^s}{S_d}\|V\|_{L^p(\Omega)} \tag{40}$$

et donc

$$0 \;\leq\; \lambda_{1,\nu} - \lambda_1 \leq\; \frac{|B_R|^s}{S_d}\|V\|_{L^p(\Omega)}\frac{E_{B_R}}{\|G_{B_R}\|^2_{L^2(\Omega)}} \tag{41}$$

Pour améliorer l'inégalité(41), il serait intérressant de savoir sous qu'elles conditions a-t-on :

$$\frac{E_{B_R}}{\|G_{B_R}\|^2_{L^2(\Omega)}} \;\leq\; 1 \tag{42}$$

Pour répondre à cette question nous allons nous servir de l'estimation suivante établie pour la fonction de Green pour une boule dans [21](proposition.5) : il existe deux constantes $K_1,\ K_2 > 0$ *tel que*

$$K_1\|x-y\|^{2-d} \leq\; G_{B_R}(x,y) \leq\; K_2\|x-y\|^{d-2} \tag{43}$$

D'autre part, il est bien connu que si $R \leq R'$ *alors* $G_{B_R} \leq\; G_{B_{R'}}$ *et donc on peut choisir la constante* K_1 *comme fonction croissante du rayon* R.
Après un peu de calcul on parvient à l'estimation suivante :

$$\frac{E_{B_R}}{\|G_{B_R}\|^2_{L^2(\Omega)}} \;\leq\; \frac{2\tilde{P}(d)}{(d-2)P(d)K_1^2|S_{d-1}|^2R^2} \tag{44}$$

où $\tilde{P}(d)$ *et* $P(d)$ *sont deux fonctions rationnelles de la dimension* d. *Ce qui implique que pour des boules assez grandes le quotient est plus petit que* 1, *donc pour* R *suffisamment grand, on a*

$$0 \;\leq\; \lambda_{1,\nu} - \lambda_1 \leq\; \frac{|B_R|^s}{S_d}\|V\|_{L^p(B_R)} \tag{45}$$

L'exemple précédent nous incite à énoncer le résultat suivant, qui a ses origines dans [10](Vol1.p.447), concernant le comportement du shift spectral pour R assez grand. Nous allons noter par $\lambda_{1,\nu}(R)$, la plus petite valeur propre de $\mathcal{F}_\nu$, pour $\Omega = B_R$.

Proposition 3.6 *On suppose que $\mu = \lambda^d$, $\nu = V$ avec $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p > \frac{d}{2}$ et $d \geq 3$. Alors on a*

$$\lim_{R \to +\infty} (\lambda_{1,\nu}(R) - \lambda_1(R)) = 0 \tag{46}$$

Démonstration
L'inégalité(44), implique $0 \leq \lambda_{1,\nu}(R) - \lambda_1(R) \leq C(d)\|V\|_{L^p} R^{ds-2}$ où $C(d)$ est une constante qui ne dépend que de d et $s = \frac{2p-d}{dp}$ donc $ds - 2 = -dp^{-1} < 0$, ce qui achève la preuve. $\square$
Sans aucune difficulté, on peut étendre le résultat précédent au cas des mesures ν dans la classe de Kato ou plus généralement pour les mesures appartenant à $\mathcal{M}_{P-F}$.
Comme conséquence, on obtient le résultat suivant connu pour les valeurs propres de $-\Delta$ [9]p.38.
Corollaire 3.1 *On suppose que $\mu = \lambda^d$, ν est telle que K_k^ν est borné sur $L^2(\nu)$, pour un certain $k \geq 0$ et $\Omega = B_R$ alors on a :*

$$\lim_{R \to +\infty} \lambda_{1,\nu}(R) = 0 \tag{47}$$

Démonstration
Nous allons faire la démonstration pour $d \geq 3$. Pour $d = 1,\ 2$ la démonstration est techniquement différente (vu la structure de la fonction de Green), mais fondamentalement analogue.
D'après l'inégalité(30), on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda_{1,\nu}(R) - \lambda_1(R) &\leq \|K^\nu_{k,B_R}\|_{L^2(B_R,\nu)} \frac{E_{B_R}}{\|G_{B_R}\|^2_{L^2(B_R)}} \\ &\leq \|K_k^\nu\|_{L^2(\nu)} \frac{2\tilde{P}(d)}{(d-2)P(d)K_1^2|S_{d-1}|^2 R^2} \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\lim_{R \to +\infty} (\lambda_{1,\nu}(R) - \lambda_1(R)) = 0$, donc pour aboutir au résultat il suffit de prouver que $\lim_{R \to +\infty} \lambda_1(R) = 0$. Or on a

$$\begin{aligned} \lambda_1(R) &\leq \frac{E_{B_R}}{\|G_{B_R}\|^2_{L^2(B_R)}} \\ &\leq \frac{2\tilde{P}(d)}{(d-2)P(d)K_1^2|S_{d-1}|^2 R^2} \to 0, \text{ si } R \to +\infty \end{aligned} \tag{48}$$

$\square$

Le corollaire(3.1) va nous permettre de donner explicitement la borne spectrale de la forme $\tilde{\mathcal{F}}_\nu$, $D(\tilde{\mathcal{F}}_\nu) = H^1(I\!R^d)$ avec $\tilde{\mathcal{F}}_\nu \; = \; \int_{I\!R^d} |\nabla f|^2 dx + \int_{I\!R^d} |f^2| d\nu$; considérée dans l'espace $L^2(\lambda^d)$.
Notons que la connaissance de la borne spectrale est assez importante pour savoir le comportement par rapport au temps du semi-groupe de la chaleur associé à la forme considérée [14].

Proposition 3.7 *Supposons que ν est telle que K_k^ν est borné sur $L^2(\nu)$, pour un certain $k \geq 0$. Soit $\tilde{H}_\nu$, l'opérateur auto-adjoint associé à $\tilde{\mathcal{F}}_\nu$. Notons par $\inf \sigma(\tilde{H}_\nu)$ la borne spectrale de $\tilde{H}_\nu$. Alors*

$$\inf \sigma(\tilde{H}_\nu) = 0 \; \cdot \tag{49}$$

Démonstration
Soit f_R la fonction propre normalisée associée à $\lambda_{1,\nu}(R)$. Soit $\tilde{f}_R$, le prolongement de f_R par 0 en dehors de B_R, alors $\tilde{f}_R \in D(\tilde{H}_\nu)$. Il s'en suit que $\lambda_{1,\nu}(R) \in \sigma(\tilde{H}_\nu)$ et donc $\lim\limits_{R \to +\infty} \lambda_{1,\nu}(R) = 0 \in \sigma(\tilde{H}_\nu)$. Puisque $\tilde{H}_\nu$ est positif, on conclut que $\inf \sigma(\tilde{H}_\nu) = 0$. $\square$
Parmi les mesures qui vérifient les conditions de la Proposition3.7, citons les mesures dans la classe de Kato généralisée à support compact. Pour ces mesures la Proposition(3.7) est connue [8]p.142.
Pour des mesures ν telle que K^2_{k,B_R} est borné mais K_k^ν ne l'est pas, on ne sait pas si ce résultat reste encore vraie. Puisque à priori pour ces types de mesures on a, pour $d \geq 3$ l'estimation suivante pour le shift spectral

$$0 \;\leq\; \lambda_{1,\nu}(R) - \lambda_1(R) \;\leq \tilde{C}\big(\frac{(|S_{d-1}|d^{-1})^{\frac{2}{d}}}{S_d} + R^{-2}\big) \tag{50}$$

où $\tilde{C}$ est une constante dependant éventuellement de d ; ce qui ne permet pas de conclure.
Pour des rayons R assez petit l'inégalité(31) nous donne le comportement du quotient des énergies minimales . Plus précisemment on a

Proposition 3.8 *On suppose que $\mu = \lambda^d$, $\nu \in \mathcal{K}^+_{loc}$, alors on a*

$$\lim_{R \to 0} \frac{\lambda_{1,\nu}(R)}{\lambda_1(R))} = 1 \tag{51}$$

Démonstration
Rappelons tout d'abord que les boules sont des ouverts régulier, d'autre part la famille des boules B_R décroit vers $\{0\}$ quand R décroit vers zero. Enfin le fait que $\nu \in K^+_{loc}$ implique que $G^\nu_{B_R}$ tend uniformément vers 0 pour R tendant vers 0 et il en est de même pour $C_\nu = C_\nu(R) \leq \|G^\nu_{B_R}\|_\infty$. On obtient enfin le résultat en utilisant l'inégalité(31). □

D'après les inégalités(30, 31), on constate que si $C_\nu = 0$, alors $\lambda_{1,\nu} = \lambda_1$. Mais $C_\nu = 0$ si et seulement si $\mathrm{Cap}(\mathrm{supp}(\nu) \cap \Omega) = 0$. Cette condition est-elle nécéssaire et suffisante pour que $\lambda_{1,\nu} = \lambda_1$. La réponse est affirmative si Ω est connexe.
Dans toute la suite, on suppose que Ω est connexe. Il s'ensuit d'après [4] que la plus petite valeur propre est non dégénérée i.e $\lambda_{1,\nu}$ est une valeur propre simple et elle admet une fonction propre $f > 0$, $q.p$ (notons que $f \in H^1_0(\Omega)$ et est normalisée)

Théorème 3.1 $\lambda_{1,\nu} = \lambda_1$ *si et seulement si* $\mathrm{Cap}(\mathrm{supp}(\nu) \cap \Omega) = 0$.

Démonstration
Supposons d'abord que, $\mathrm{Cap}((\mathrm{supp}\nu) \cap \Omega) > 0$. Soit f_1 resp. f_2 la fonction propre normalisée associée à $\mathcal{F}_0$, resp. $\mathcal{F}_\nu$. Alors d'après [4] $f_j > 0$, $q.p$ pour $j = 1, 2$. Donc $\int_\Omega |f_2|^2 d\nu > 0$ et alors

$$\begin{aligned}\lambda_1 = \int_\Omega |\nabla f_1|^2 dx \quad &\leq \quad \int_\Omega |\nabla f_2|^2 dx \\ &< \int_\Omega |\nabla f_2|^2 dx + \int_\Omega |f_2|^2 d\nu = \lambda_{1,\nu} \qquad (52)\end{aligned}$$

□

Nous allons pour terminer, donner une estimation du trou spectral de $-\Delta + \nu$.

Proposition 3.9 *Soit f la fonction propre associée à $\lambda_{1,\nu}$. Posons $\alpha = (G^\mu_\Omega, f)_{L^2(\mu)}$, $\beta = \|G^\mu_\Omega\|_{L^2(\mu)}$, alors on a :*

$$0 \leq \lambda_{2,\nu} - \lambda_{1,\nu} \leq \frac{\mathcal{F}_\nu[G^\mu_\Omega] - \beta^2 \lambda_{1,\nu}}{\beta^2 - \alpha^2} \qquad (53)$$

Démonstration
Posons $g = G^\mu_\Omega - \alpha f$, alors $(f, g)_{L^2(\Omega,\mu)} = 0$, donc $\lambda_{2,\nu} \leq \frac{\mathcal{F}_\nu[g]}{\|g\|^2_{L^2(\Omega,\mu)}} =$

$\frac{\mathcal{F}_\nu[G_\Omega^\mu]}{\|g\|^2_{L^2(\Omega,\mu)}}$. En plus on a :

$$|\nabla g|^2 = |\nabla G_\Omega^\mu|^2 + \alpha^2|\nabla f|^2 - 2\alpha\nabla G_\Omega^\mu \cdot \nabla f \tag{54}$$

et

$$|f|^2 = |G_\Omega^\mu|^2 + \alpha|f|^2 - 2\alpha f G_\Omega^\mu \tag{55}$$

ce qui nous donne $\lambda_{2,\nu} \leq \frac{\mathcal{F}_\nu[G_\Omega^\mu] - \lambda_{1,\nu}\|G_\Omega^\mu\|^2_{L^2(\Omega,\mu)}}{\|G_\Omega^\mu\|^2_{L^2(\Omega,\mu)} - \alpha^2}$. Ce qui aboutit à l'inégalité voulue. $\square$

Références

[1] R. A. Adams : *Sobolev Spaces. Acad. Press, 1975.*

[2] M. Aizenmann, B. Simon : *Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operators. Comm. Pure Appl. Math. 35 (1982), no. 2, 209–273.*

[3] A. Ben Amor : *On eigenvalues of generalized Schrödinger operators. Preprint.1999.*

[4] A. Ben Amor, W. Hansen : *Continuity of eigenvalues for Schrödinger operators, L^p-properties of Kato type integral operators. Preprint.2000.*

[5] A. Ben Amor, F. Sassi : *Estimation des μ-valeurs propres. Preprint.98.*

[6] Ph. Blanchard, M. Zhi Ming : *Semigroup of Schrödinger operators with potentials given by Radon measures. Stochastic processes, physics and geometry (Ascona and Locarno, 1988), 160–195, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1990.*

[7] A. Boukricha, W. Hansen, H. Hueber : *Continuous solutions of the generalized Schrödinger equation and perturbation of harmonic spaces. Expo.Math., 5(1987) 97-135.*

[8] J.F. Brasche : *Extensions of self-adjoint operators and spectral properties of generalized Schrödinger operators. Habilitationsschrift. Rhur Universität, Bochum. 1995.*

[9] I. Chavel : *The Laplacian on Riemannian manifolds. Spectral theory and geometry (Edinburgh, 1998), 30–75, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 273, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.*

[10] R. Courant, D.Hilbert : *Methods of Mathematical Physics. Vol1. Interscience Pub.1966.*

[11] E.B. Davies : *ICMS lecture notes on computational spectral theory. Spectral theory and geometry (Edinburgh, 1998), 76–94, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 273, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.*

[12] E.B. Davies : *Spectral theory and differential operators. Cambridge University Press, 1995.*

[13] J. Deny, J.L. Lions : *Les espaces du type de Beppo Levi. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 5 (1953–54), 305–370.*

[14] K.J. Engel, R. Nagel : *One-parameter semigroups for linear evolution equations. Graduate Texts in Mathematics, 194. Springer-Verlag, New York, 2000.*

[15] M. Fukushima : *Dirichlet forms and symmetric Markov processes. North-Holland 1980.*

[16] A. Grigor'yan, W. Hansen : *A Liouville property for Schrödinger operators. Math. Ann. 312 (1998), no. 4, 659–716.*

[17] P.R. Halmos, V.S. Sundler : *Bounded Integral Operators on* L^2 *Spaces. Springer Verlag, 1978.*

[18] W. Hansen : *Harnack inequalities for Schrödinger operators. Ann. Scuola Norm.Sup.Pisa Cl.Sci.(4) 28 (1999), no.3, 413–470.*

[19] W. Hansen, H. Hueber : *Eigenvalues in potential theory. J. Differential Equations 73 (1988), no. 1, 133–152.*

[20] R.M. Hervé, M. Hervé : *Les fonctions surharmoniques associées à un oprateur elliptique du second ordre à coefficients discontinus. Ann.Inst.Fourier (Grenoble) 19, (1969) fasc.1,305–359.*

[21] R.M. Hervé : *Quelques propriétés des sursolutions et sursolutions locales de d'une équation uniformément elliptique de la forme* $Lu = -\Sigma_i(\frac{\partial}{\partial xi})(\Sigma_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) = 0$. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 16(fasc.2) :241-267, 1966.*

[22] W. Kirsh, B. Simon : *Comparison theorems for the gap of Schrödinger operators. J. Funct. Anal. 75 (1987), no. 2, 396–410.*

[23] E. Lieb, M. Loss : *Analysis. Graduate Studies in Mathematics, 14. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.*

[24] I. McGillivray : *Capacitary estimates for Dirichlet eigenvalues. J. Funct. Anal. 139 (1996), no. 1, 244–259.*

[25] A. Noll : *Domain perturbations, shift of eigenvalues and capacity. J. Funct. Anal. 170 (2000), no. 1, 246–263.*

[26] M. Reed, B. Simon : *Methods of Modern Mathematical Physics. VolIV. Academic Press, 1977.*

[27] M. Schechter : *Spectra of partial differential operators. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 14. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London ; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1971.*

[28] G. Stampacchia : *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. Ann.Inst.Fourier(Grenoble) 15 1965 fasc. 1, 189–258.*

[29] P. Stollmann, J. Voigt : *Perturbation of Dirichlet forms by measures. Potential Anal. 5 (1996), no. 2, 109–138.*