Markov processes associated with L^p-resolvents, applications to quasi-regular Dirichlet forms and stochastic differential equations

Lucian Beznea[a], Nicu Boboc[b], Michael Röckner[c]

[a] *Institute of Math. "Simion Stoilow" of the Romanian Academy, P.O. Box 1-764, RO-014700 Bucharest, Romania*
[b] *Faculty of Mathematics and Informatics, University of Bucharest, str. Academiei 14, RO-010014 Bucharest, Romania*
[c] *Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Postfach 100 131, D-33501 Bielefeld, Germany, and Departments of Mathematics and Statistics, Purdue University, 150 N. University St. West Lafayette, IN 47907-2067, USA*

Abstract

We show that every C_0-resolvent on $L^p(E,\mu)$, where $(E,\mathcal{B})$ is a Lusin measurable space and μ is a σ-finite measure on $\mathcal{B}$, has an associate sufficiently regular Markov process on a (larger) Lusin topological space containing E as a Borel subset. We give general conditions on the resolvent's generator such that the above process lives on E. We present two applications: (1) we settle a question of G. Mokobodzki on the existence of a (Lusin) topology on E having $\mathcal{B}$ as Borel σ-algebra such that a given Dirichlet form on $L^2(E,\mu)$ becomes quasi–regular; (2) we solve stochastic differential equations on Hilbert spaces in the sense of a martingale problem.

Résumé

Processus de Markov associés aux résolvants sur L^p, applications aux formes de Dirichlet qusi-régulières et aux équations différentielles stochastiques. Nous montrons que à toute résolvante sous-markovienne continue sur $L^p(E,\mu)$, où $(E,\mathcal{B})$ est un espace mesurable de Lusin et μ est une mesure σ-finie sur $\mathcal{B}$, on peut associer un processus droit sur un espace topologique de Lusin contenant E comme un sousensemble borélien finement dense. Nous donnons des conditions sufficientes sur le générateur infinitesimale de la résolvante tel que l'espace d'états du processus soit E. Nous obtenons deux applications: (1) une réponse à une question posée par G. Mokobodzki sur l'existence d'une topologie de Lusin sur E ayant $\mathcal{B}$ comme tribue borélienne, telle que une forme de Dirichlet donnée sur $L^2(E,\mu)$ devienne quasi-régulière; (2) on résoudre des équations différentielles stochastiques sur des espaces de Hilbert, dans le sense du problème de martingale.

Version française abrégée

Soient $(E,\mathcal{B})$ un espace mesurable, μ une mesure σ-finie sur $E,B)$ et $p\in[1,+\infty]$. Dans cette section et dans la suivante $V_\alpha)_{\alpha>0}$ sera une résolvante de contractions sur $L^p(E,\mu)$ qui est fortement continue et sous-markovienne (i.e. si $f\in L^p(E,\mu)$, $0\le f\le 1$ alors $0\le \alpha V_\alpha f\le 1$ pour tout $\alpha>0$). Le premier résultat concernant l'association d'un processus de Markov avec la résolvante $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ est le suivant:

Théorème 1. *Supposons que $(E,\mathcal{B})$ est un espace mesurable de Lusin (i.e. il est mesurable isomorphe avec un sousensemble Borel d'un espace compact métrisable muni avec la tribu de Borel). Alors il existe un espace topologique métrisable de Lusin E_1 tel que $E\subset E_1, E\in\mathcal{B}_1$ (la tribu de Borel sur E_1), $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1|_E$ et un processus droit avec l'espace d'états E_1 tel que sa résolvante $\mathcal{U}^1=(U^1_\alpha)_{\alpha>0}$ regardée sur $L^p(E_1,\overline{\mu})$, coincide avec $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ et $U^1_\alpha(1_{E_1\setminus E})=0$, où $\overline{\mu}$ est la mesure sur $(E_1,\mathcal{B}_1)$ qui est l'extension de μ avec zero sur $E_1\setminus E$.*

Soit L le générateur infinitesimal de la résolvante $(V_\alpha)_{\alpha>0}$. Alors $D(L)=V_\beta\big(L^p(E,\mu)\big)$, $L(V_\alpha f)=\alpha V_\alpha f-f$ pour toute $f\in L^p(E,\mu)$. Soient $X=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,P^x)$ le processus de Markov, associé avec $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ dans le théorème (1.1), $g_0\in L^{p'}_+(E,\mu)$ (où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$) telle que $\int g_0\,\mathrm{d}\mu=1$ et $\nu=g_0\cdot\mu$. Le résultat suivant montre que le processus X résoudre le problème de martingale pour $\big(L,D(L)\big)$ et la probabilité $P^\nu=\int\ P^x\nu(\mathrm{d}x)$.

Corrolaire 2. *Pour toute $f\in D(L)$ le processus $(f(X_t)-\int_0^t Lf(X_s)\,\mathrm{d}s)_{t\ge0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$-martingale relative à la probabilité P^ν.*

Supposons que $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ est la résolvante d'une forme semi-Dirichlet $(\mathcal{E},D(\mathcal{E}))$ sur $L^2(E,\mu)$ (c.f. [6] et [10]), i.e. $V_\alpha(L^2(E,\mu))\subset D(\mathcal{E})$ et $\mathcal{E}_\alpha(V_\alpha f,u)=(f,u)_{L^2(E,\mu)}$ pour tous $\alpha>0$, $f\in L^2(E,\mu)$ et $u\in D(\mathcal{E})$, où

$\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E} + \alpha(\ ,\ )_{L^2(E,\mu)}$. Nous remarquons que la propriété de contraction unité de $\mathcal{E}$ est equivalente avec la propriété que $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ est sous-markovienne. Comme une conséquence du Théorème 1, la section 3.5 et le Théorème 3.7.8 de [3], et le résultat principal de [10] et [11], nous obtenons:

Corollaire 3. *Soit $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ une forme semi-Dirichlet sur $L^2(E,\mu)$ où μ et une mesure σ-finie sur l'espace mesurable de Lusin $(E,\mathcal{B})$. Alors il existe un espace topologique de Lusin E_1 tel que $E \subset E_1$, $E \in \mathcal{B}_1$ (la tribu de Borel de E_1), $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1|_E$, et $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ regardée comme une forme semi-Dirichlet sur $L^2(E_1,\overline{\mu})$ est quasi-régulière, où $\overline{\mu}$ est l'extension de μ sur $(E_1,\mathcal{B}_1)$ avec zero sur $E_1 \setminus E$.*

Supposons que E est un espace topologique de Lusin et soient $\mathcal{T}$ la topologie de E et $\mathcal{B}$ la tribu de Borel de E. Nous faisons les notations suivantes: $\mathcal{C}(E)$ et $b\mathcal{C}(E)$ pour l'espace des fonctions réelles continues et l'espace des fonctions réelles bornées et continues. Un élément $u \in L^p_+(E,\mu)$ s'appelle *β-excessif* si $\alpha V_{\beta+\alpha} u \leq u$ pour tout $\alpha > 0$. Nous désignerons par $\mathcal{E}_\beta$ l'ensemble de tous les éléments β-excessives. En fait $\mathcal{E}_\beta$ est min-stable et toute famille décroissante $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_\beta$ a un infimum désigné par $\bigwedge \mathcal{F}$. Si $f \in L^p(E,\mu)$ est tel qu'il existe $u \in \mathcal{E}_\beta$ avec $u \geq f$ nous désignerons par $R_\beta f$ la réduite de f dans $\mathcal{E}_\beta$, $R_\beta f := \bigwedge\{u \in \mathcal{E}_\beta \mid u \geq f\}$. Soit $p \in [1,\infty)$. Pour $u \in D(L)$ nous considérons la norm graph $\|u\|_{D(L)}$ de u, $\|u\|_{D(L)} = \|u\|_{L^p} + \|Lu\|_{L^p}$.

Proposition 4. *Pour tout $u \in D(L)$ et $\beta > 0$ on ait $R_\beta u \in D(L)$ et $\|R_\beta u\|_{D(L)} \leq (2 + 1/\beta)\|u\|_{D(L)}$.*

Théorème 5. *Supposons que les deux conditions suivantes soient satisfaites:*

(I) Il existe une suite croissante $(F_k)_k$ des ensembles $\mathcal{T}$-fermés de E telle que $\lim_k \|R_1(u 1_{E\setminus F_k})\|_{L^p} = 0$ pour tout $u \in D(L) \cap \mathcal{E}_1$.

(II) Il existe un espace $\mathbb{Q}$-linéaire dénombrable $\mathcal{A} \subset b\mathcal{C}(E) \cap D(L)$ tel que $\mathcal{A}$ est dense dans $D(L)$ relative à la norm graph, $\mathcal{A}$ separe les points de E et $u \wedge \alpha$ appartient à l'adhérence de $\mathcal{A}$ dans la norm uniforme pour tout $\alpha > 0$ et $u \in \mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{T}_0$ la topologie de Lusin (mètrisable) sur E engendrée par $\mathcal{A}$. Alors on ait les propriétés suivantes:

(a) Il existe un processus droit μ-standard avec l'espace d'états E (muni de la topologie $\mathcal{T}_0$) tel que sa résolvante régardée sur $L^p(E,\mu)$ coincide avec $(V_\alpha)_{\alpha>0}$

(b) Le processus est càdlàg dans la topologie $\mathcal{T}$, P^μ p.p.

(c) Chaque élément de $D(L)$ possède une version qui est μ-quasi continue (par rapport à la topologie $\mathcal{T}_0$).

Remarque. (*a*) La condition suivante implique que l'hypothèse (I) est remplie: *Il existe une fonction $u \in D(L) \cap \mathcal{C}(E)$ telle que $(L - \beta)u \leq 0$. pour un $\beta > 0$ et les ensembles de nivaux $[u \leq n]$ sont $\mathcal{T}$-compact.* Il est à remarquer qu'une telle fonction u vérifie la rélation $u = V_\beta g$ avec $g = (\beta - L)u$ et par conséquence $u \in \mathcal{E}_\beta$.

(*b*) L'hypothèse (II) est une conséquence de la condition suivante: *Il existe une Q-algebre dénombrable $\mathcal{A} \subset b\mathcal{C}(E) \cap D(L)$ telle que A est dense dans $D(L)$ relative à la norm graph et $\mathcal{A}$ sépare les points de E.*

Nous donnons maintenant une application des résultats précédentes pour la construction des solutions martingales des équations differentielles stochastiques du type (3.1), sur un espace de Hilbert H (avec le produit interieur $\langle\ ,\ \rangle$ et la norm $|\cdot|$); voir la section 5 dans [7] pour un traitement plus complet. Ici $W(t)$, $t \geq 0$ est un mouvement brownien cylindrique sur H, C est un opérateur linéaire positivement défini, auto-adjoint et $A : D(A) \subset H \to H$ est le générateur infinitesimal d'un semigroupe continu sur H. De plus F_0 est donné par (3.2), où $y_0 \in F(x)$ est tel que $|y_0| = \min\limits_{y \in F(x)} |y|$ et $F : D(F) \subset H \to 2^H$ est un map m-dissipative; i.e. $D(F)$ est un ensemble Borel dans H tel que $\langle u - v, x - y\rangle \leq 0$ pour tous $x, y \in D(F)$, $u \in F(x)$, $v \in F(y)$, et $\mathrm{Range}(I - F) := \bigcup_{x \in D(F)} \big(x - F(x)\big) = H$. Puisque pour chaque $x \in D(F)$ l'ensemble $F(x)$ est convexe fermé, F_0 est bien defini par (3.2). D'abord nous écrivons l'opérateur de Kolmogorov L_0 et puis les conditions precises sur les coefficients A, F_0 et C de (3.1) qui viennent d'assurer l'existence d'une mesure μ comme dans le Théorème 5 et aussi que toutes les conditions sont satisfaites pour la résolvante engendrée par la fermeture L de L_0.

Une application heuristique de la formule de Itô's à une solution de (3.1) implique que l'opérateur de Kolmogorov sur les fonctions test $\varphi \in \mathcal{E}_A(H) := \mathrm{lin.\,span}\big\{\sin\langle h, x\rangle,\ \cos\langle h, x\rangle \bigm| h \in D(A^*)\big\}$ a la forme $(*)$, où $D\varphi(x)$, $D^2\varphi(x)$ désignent la prémiere et la seconde dérivée de Fréchet de φ dans $x \in H$, considérées comme un élément de H et comme un opérateur sur H, respectivement. Nous avons $D\varphi(x) \in D(A^*)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{E}_A(H)$, $x \in H$. Il est clair que L_0 est bien défini pour tout φ de la forme $\varphi(x) = f\big(\langle h_1, x\rangle, \ldots, \langle h_M, x\rangle\big)$,$x \in H$, avec

$f \in C^2(\mathbb{R}^M)$, $M \in \mathbb{N}$, $h_1, \dots, h_M \in D(A^*)$. Comme dans [7], dans toute la suite nous faisons l'hypothése suivante:

$(H1)$ (i) A est le générateur infinitesimal d'un semigroupe e^{tA}, $t \geq 0$, fortement continue sur H et il existe une constante $\omega > 0$ telle que $\langle Ax, x\rangle \leq -\omega\, |x|^2$ pour tout $x \in D(A)$.
(ii) C est un opérateur auto-adjoint non-negatif défini et tel que $\operatorname{Tr} Q < \infty$ où $Qx := \int_0^\infty e^{tA}\, C\, e^{tA^*}\, x\; \mathrm{d}t$, $x \in H$.
$(H2)$ Il existe une probabilité μ sur la tribu de Borel de H telle que
(i) $\displaystyle\int_{D(F)} \big(|x|^{2p} = |F_0(x)|^p + |x|^{2p} \cdot |F_0(x)|^p\big)\; \mu(\mathrm{d}x) < \infty.$
(ii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{E}_A(H)$ nous avons $L_0\varphi \in L^p(H,\mu)$ et $\int L_0\varphi\; \mathrm{d}\mu = 0$ ("l'invariance infinitesimal").
(iii) $\mu(D(F)) = 1$.

Dans la suite, pour simplicité, nous allons traiter seulement le cas $p = 2$. De l'hypothèse $(H2)$ (ii) il est simple de montrer que $\big(L_0, \mathcal{E}_A(H)\big)$ est dissipative sur $L^2(H,\mu)$ (voir [7], Proposition 2.1) et par conséquence il est fermable. Soit $(L, D(L)$ sa fermeture. Le premier principal résultat de [7] este que $(H1)$ et $(H2)$ assurent que $(L, D(L))$ est m-dissipative (voir [7], Theorem 2.3) et par conséquence il est le générateur infinitesimal d'un semigroup continue $P_t := e^{tL}$, $t \geq 0$, sur $L^2(H,\mu)$. Du [7], Corollary 2.5, $(P_t)_{t\geq 0}$ est markovien, i.e. préserve la positivité et $P_t 1 = 1$ pour tout $t \geq 0$. Il est clair que μ est invariant pour $(P_t)_{t\geq 0}$, i.e.$\int P_t f\; \mathrm{d}\mu = \int f\; \mathrm{d}\mu$ pour tout $t \geq 0$ $f \in L^2(H,\mu)$.

Pour $f \in L^2(H,\mu)$ soit $V_\alpha f := \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t f dt$, $\alpha > 0$. Alors $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ est une résolvante markovienne de contractions sur $L^2(E,\mu)$, fortement continue, comme dans les sections précédentes.

Nous avons besoin d'une condition supplémentaire:

$(H3)$ (i) Il existe une base orthonormale $\{e_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ telle que $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} E_N$ avec $E_N := \operatorname{lin.span}\{e_j \mid 1 \leq j \leq N\}$ est dense dans $D(A^*)$ par rapport à $|\cdot|_{A^*}$ et telle que pour la projection orthogonale P_N sur E_N dans H la fonction $H \ni x \to \langle P_N x, A^* P_N x\rangle$ converge dans $L^1(H,\mu)$ vers $H \ni x \to \langle x, A^* x\rangle$ (definie $+\infty$ si $x \in E \setminus D(A^*)$).
(ii) Il existe deux fonctions croissantes de Borel $\varrho_1, \varrho_2 : [1,\infty) \to (0,\infty)$ tels que $\big|F_0(x)\big|^2 \leq \varrho_1\big(|x|\big) + \varrho_2\big(|x|\big)\, \big|\langle x, A^* x\rangle\big|$ pour tout $x \in H$, et la fonction de la partie droite est dans $L^1(H,\mu)$.

Théorème. *Supposons $(H1) - (H3)$ et soit $\mathcal{T}$ la topologie faible de H. Alors il existe un processus droit, avec l'espace d'états H, associé avec $(V_\alpha)_{\alpha>0}$, qui est une solution martingale du* (3.1).

D'apres Théorème 5 (b) nous savons que notre processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est càdlàg dans la topologie faible de H, P^μ p.p. Puisque notre opérateur de Kolmogorov est differentiel, les trajectoires sont, de plus, continues dans la topologie faible de H, P^μ p.p.

1. Let $(E, \mathcal{B})$ be a measurable space, μ be a σ-finite measure on $(E, \mathcal{B})$ and $p \in [1, +\infty]$.

In this section and the next $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ will be a resolvent of contractions on $L^p(E,\mu)$ which is strongly continuous and sub-Markovian (i.e. if $f \in L^p(E,\mu)$, $0 \leq f \leq 1$, then $0 \leq \alpha\, V_\alpha f \leq 1$ for all $\alpha > 0$).

We can now state the first result on the association of a Markov process with the L^p-resolvent $(V_\alpha)_{\alpha>0}$; for a comparison with related but different earlier results we refer to [4]:

(1.1) Theorem. *Assume that $(E, \mathcal{B})$ is a Lusin measurable space (i.e. it is measurable isomorphic to a Borel subset of a metrizable compact space endowed with the Borel σ-algebra). Then there exist a metrizable Lusin topological space E_1 with $E \subset E_1$, $E \in \mathcal{B}_1$ (the σ-algebra of all Borel subsets of E_1), $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1|_E$, and a right process with state space E_1 such that its resolvent $\mathcal{U}^1 = (U^1_\alpha)_{\alpha>0}$, regarded on $L^p(E_1, \overline{\mu})$, coincides with $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ and $U^1_\alpha(1_{E_1\setminus E}) = 0$, where $\overline{\mu}$ is the measure on $(E_1, \mathcal{B}_1)$ extending μ by zero on $E_1 \setminus E$.*
Sketch of the proof; see the paper [4] for a complete proof. Recall that a *Lusin topological space* is the continuous one-to-one image of a Polish space. One shows that there exists a sub-Markovian resolvent of kernels $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha>0}$ on $(E, \mathcal{B})$ such that:
(1.1.a) E coincides with the set of all non-branch points (with respect to $\mathcal{U}$);
(1.1.b) the σ-algebra generated by the set of all $\mathcal{B}$-measurable $\mathcal{U}$-excessive functions is precisely $\mathcal{B}$;
(1.1.c) $U_\alpha = V_\alpha$ as operators on $L^p(E,\mu)$ for all $\alpha > 0$.

The second step uses a Ray type compactification procedure which enables to enlarge E up to E_1 and to extend the resolvent of kernels $\mathcal{U}$ from E to E_1, a set on which the claimed right process exists (see e.g. [3]).

Let L be the infinitesimal generator of the given resolvent $(V_\alpha)_{\alpha>0}$. Then we have $D(L) = V_\beta\big(L^p(E,\mu)\big)$,

$L(V_\alpha f) = \alpha V_\alpha f - f$ for all $f \in L^p(E,\mu)$. Let $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ be the Markov process associated with $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ in Theorem (1.1), let $g_0 \in L_+^{p'}(E,\mu)$ (where $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) be such that $\int g_0 \, \mathrm{d}\mu = 1$ and put $\nu = g_0 \cdot \mu$. The next result shows that the process X solves the martingale problem for $\big(L, D(L)\big)$ under $P^\nu = \int P^x \nu(\mathrm{d}x)$.

(1.2) Corollary. *For every $f \in D(L)$ the process $(f(X_t) - \int_0^t Lf(X_s)\,\mathrm{d}s)_{t\geq 0}$ is an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale under P^ν.*

Assume that $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ is the resolvent of a semi-Dirichlet form $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ on $L^2(E,\mu)$ (cf. [6], [10]), i.e., $V_\alpha(L^2(E,\mu)) \subset D(\mathcal{E})$ and $\mathcal{E}_\alpha(V_\alpha f, u) = (f,u)_{L^2(E,\mu)}$ for all $\alpha > 0$, $f \in L^2(E,\mu)$ and $u \in D(\mathcal{E})$, where $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E} + \alpha(\ ,\ )_{L^2(E,\mu)}$. Notice that the unit contraction property of $\mathcal{E}$ is equivalent with the property of $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ to be sub-Markovian. It was shown in [3] (Theorem 7.5.19 and Corollary 7.7.8 applied to the (bounded) resolvent $(V_{\beta+\alpha})_{\alpha>0}$ associated with the semi-Dirichlet form $(\mathcal{E}_\beta, D(\mathcal{E}))$ which satisfies the sector condition; where $\beta > 0$ is fixed) that a semi-Dirichlet form associated with a right process is quasi-regular; compare with [8], [10] and [11]. As a consequence of Theorem (1.1), Section 3.5 and Theorem 3.7.8 in [3] and the main result in [10] and [11] we obtain:

(1.3) Corollary. *Let $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ be a semi-Dirichlet form on $L^2(E,\mu)$, where μ is a σ-finite measure on the Lusin measurable space $(E,\mathcal{B})$. Then there exists a (larger) Lusin topological space E_1 such that $E \subset E_1$, E belongs to $\mathcal{B}_1$ (the σ-algebra of all Borel subsets of E_1), $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1|_E$, and $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ regarded as a semi-Dirichlet form on $L^2(E_1, \overline{\mu})$ is quasi-regular, where $\overline{\mu}$ is the measure on $(E_1, \mathcal{B}_1)$ extending μ by zero on $E_1 \setminus E$.*

Example. Let $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ be the Dirichlet form associated with reflecting Brownian motion on $[0,1]$: $D(\mathcal{E}) = H^1(0,1)$, $\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2}\int_E u'v'dm$, m being the Lebesgue measure. It was shown in [12] that the Dirichlet form $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ is not quasi-regular, considered on $E = [0,1)$ endowed with the canonical topology. However, regarded on the enlarged space $E_1 = [0,1]$ (also endowed with the canonical topology) the form $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ is quasi-regular. One can show that E may be equipped with a second topology, preserving the Borel σ-algebra, such that $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ becomes quasi-regular, without enlarging E.

2. We assume now that E is a Lusin topological space, we shall denote by $\mathcal{T}$ the topology and by $\mathcal{B}$ the Borel σ-algebra on E. We use the following notation: $\mathcal{C}(E)$ and $b\mathcal{C}(E)$ denote the spaces of continuous and bounded continuous real-valued functions respectively; $bp\mathcal{B}$ denotes the set of all positive and bounded $\mathcal{B}$-measurable real-valued functions. Let $p \in [1,\infty)$.

An element $u \in L_+^p(E,\mu)$ is called *β-excessive* if $\alpha V_{\beta+\alpha} u \leq u$ for all $\alpha > 0$ and we shall denote by $\mathcal{E}_\beta$ the set of all β-excessive elements. Notice that $\mathcal{E}_\beta$ is min-stable and every decreasing family $\mathcal{F}$ from $\mathcal{E}_\beta$ has an infimum denoted by $\bigwedge \mathcal{F}$. If $f \in L^p(E,\mu)$ is such that there exists $u \in \mathcal{E}_\beta$ with $u \geq f$, we shall denote by $R_\beta f$ the reduced of f in $\mathcal{E}_\beta$, $R_\beta f := \bigwedge\{u \in \mathcal{E}_\beta \mid u \geq f\}$. If $u \in D(L)$ then we consider the *graph norm* $\|u\|_{D(L)}$ of u, $\|u\|_{D(L)} = \|u\|_{L^p} + \|Lu\|_{L^p}$.

(2.1) Proposition. *For every $u \in D(L)$ and $\beta > 0$ we have $R_\beta u \in D(L)$ and $\|R_\beta u\|_{D(L)} \leq (2 + 1/\beta)\|u\|_{D(L)}$.*

An increasing sequence $(F_k)_k$ of $\mathcal{T}$-closed sets in E is called *μ-nest* provided that $\lim_k \|R_1(u 1_{E\setminus F_k})\|_{L^p} = 0$ for all $u \in D(L) \cap \mathcal{E}_1$. The second result on the existence of a right process associated with $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ is the following:

(2.2) Theorem. *Assume that the following two conditions hold.*

(I) There exists a μ-nest of $\mathcal{T}$-compact sets.

(II) There exists a countable $\mathbb{Q}$-linear space $\mathcal{A} \subset b\mathcal{C}(E) \cap D(L)$ such that $\mathcal{A}$ is dense in $D(L)$ in the graph norm, $\mathcal{A}$ separates the points of E and $u \wedge \alpha$ belongs to the closure of $\mathcal{A}$ in the uniform norm for all $\alpha > 0$ and $u \in \mathcal{A}$.

Let $\mathcal{T}_0$ be the (metrizable Lusin) topology on E generated by $\mathcal{A}$. Then the following assertions hold.

(a) There exists a μ-standard right process with state space E (endowed with the topology $\mathcal{T}_0$) whose resolvent regarded on $L^p(E,\mu)$ coincides with $(V_\alpha)_{\alpha>0}$.

(b) The process is càdlàg in the topology $\mathcal{T}$ P^μ-a.e.

(c) Every element from $D(L)$ has a μ-quasi continuous version (with respect to the topology $\mathcal{T}_0$).

Sketch of the proof; see Sections 2-4 in [5] for further details. Proposition (2.1) allows to show (as in [13]) that if $(u_n)_n$ is a sequence in $D(L)$ such that every u_n possesses a μ-quasi continuous version $\widetilde{u}_n$ and it converges to $u \in D(L)$ in the graph norm, then u possesses a μ-quasi continuous version $\widetilde{u}$ and a subsequence of $(\widetilde{u}_n)_n$ converges μ-quasi uniformly to $\widetilde{u}$, consequently by assumption (II) it follows that assertion (c) holds. One proves then (using also Theorem 4.4 in [1]), that there exists a resolvent of kernels $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha>0}$ on $(E, \mathcal{B})$, satisfying conditions $(1.1.a) - (1.1.c)$, and such that $U_\alpha f$ is μ-quasi continuous for all $\alpha > 0$ and $f \in bp\mathcal{B}$. The claimed Markov process is obtained following the procedure from Theorem (1.1): by the above considerations, the Ray type compactification may be done by means of the given family $\mathcal{A}$ and consequently the obtained topology will be $\mathcal{T}_0$; assumption (I) implies that the set $E_1 \setminus E$ is μ-polar and therefore in this case the process lies on E.

(2.3) Remark. (a). The following condition implies that the above assumption (I) holds: *There exists a function $u \in \mathcal{C}(E) \cap D(L)$ such that $(L - \beta)u \le 0$ for some $\beta > 0$ and the level sets $[u \le n]$ are $\mathcal{T}$-compact.* We remark that since the function u is such that $u = V_\beta g$ with $g = (\beta - L)u$, it follows that $u \in \mathcal{E}_\beta$.

(b). Assumption (II) is implied by the following hypothesis: *There exists a countable $\mathbb{Q}$-algebra $\mathcal{A} \subset b\mathcal{C}(E) \cap D(L)$ such that $\mathcal{A}$ is dense in $D(L)$ in the graph norm and $\mathcal{A}$ separates the points of E.*

3. In this section we shall apply the above results to construct martingale solutions to stochastic differential equations on a Hilbert space H (with inner product $\langle\ ,\ \rangle$ and norm $|\cdot|$) of type

$$\mathrm{d}X(t) = \big[AX(t) + F_0\big(X(t)\big)\big]\,\mathrm{d}t + \sqrt{C}\,\mathrm{d}W(t)\,; \tag{3.1}$$

see Section 5 in [5] for a more complete treatment. Here $W(t)$, $t \ge 0$, is a cylindrical Brownian motion on H, C is a positive definite self-adjoint linear operator on H and $A : D(A) \subset H \to H$ the infinitesimal generator of a C_0-semigroup on H. Furthermore,

$$F_0(x) := y_0\,, \quad x \in D(F), \tag{3.2}$$

where $y_0 \in F(x)$ such that $|y_0| = \min\limits_{y \in F(x)} |y|$, and $F : D(F) \subset H \to 2^H$ is an m-dissipative map. This means that $D(F)$ is a Borel set in H and $\langle u - v, x - y\rangle \le 0$ for all $x, y \in D(F)$, $u \in F(x)$, $v \in F(y)$, and $\mathrm{Range}(I - F) := \bigcup_{x \in D(F)} \big(x - F(x)\big) = H$. Since for any $x \in D(F)$ the set $F(x)$ is closed, non-empty and convex, F_0 is well-defined by (3.2). Such equations have been studied in [7], the main novelty being that F_0 has no continuity properties. In [7], however, a martingale solution to (3.1) was only constructed under the assumption that the inverse C^{-1} of C exists and is bounded and that $A = A^*$ where $\big(A^*, D(A^*)\big)$ denotes the adjoint of $\big(A, D(A)\big)$. Hence, in particular, the case, where C is trace class, was not covered in the final result. Let us first write the underlying Kolmogorov operator L_0 and then formulate precise conditions on the coefficients A, F_0 and C in (3.1) which will ensure the existence of a measure μ as in Theorem (2.2) and imply that all its conditions are satisfied for the resolvent generated by the closure L of L_0.

A heuristic application of Itô's formula to a solution of (3.1) implies that the Kolmogorov operator on test functions $\varphi \in \mathcal{E}_A(H) := \mathrm{lin.\,span}\big\{\sin\langle h, x\rangle,\ \cos\langle h, x\rangle \;\big|\; h \in D(A^*)\big\}$ has the following form:

$$L_0\varphi(x) = \tfrac{1}{2} \cdot \mathrm{Tr}\big[CD^2\varphi(x)\big] + \big\langle x, A^*D\varphi(x)\big\rangle + \big\langle F_0(x), D\varphi(x)\big\rangle\,, \quad x \in H, \tag{$*$}$$

where $D\varphi(x)$, $D^2\varphi(x)$ denote the first and second Fréchet derivatives of φ at $x \in H$ considered as an element in H and as an operator on H, respectively. We note that by the chain rule $D\varphi(x) \in D(A^*)$ for all $\varphi \in \mathcal{E}_A(H)$, $x \in H$. Clearly, L_0 is well-defined for all φ of the form $\varphi(x) = f\big(\langle h_1, x\rangle, \ldots, \langle h_M, x\rangle\big)$, $x \in H$, with $f \in C^2(\mathbb{R}^M)$, $M \in \mathbb{N}$, $h_1, \ldots, h_M \in D(A^*)$. As in [7], from now on we make the following assumptions:

$(H1)$ (i) A is the infinitesimal generator of a strongly continuous semigroup e^{tA}, $t \ge 0$, on H, and there exists a constant $\omega > 0$ such that $\langle Ax, x\rangle \le -\omega\,|x|^2$ for all $x \in D(A)$.
(ii) C is self-adjoint, nonnegative definite and such that $\mathrm{Tr}\,Q < \infty$, where $Qx := \int_0^\infty e^{tA}\,C\,e^{tA^*}\,x\,\mathrm{d}t$, $x \in H$.

$(H2)$ There exists a probability measure μ on the Borel σ-algebra $\mathcal{B}(H)$ of H such that
(i) $\displaystyle\int_{D(F)} \big(|x|^{2p} + |F_0(x)|^p + |x|^{2p} \cdot |F_0(x)|^p\big)\,\mu(\mathrm{d}x) < \infty.$
(ii) For all $\varphi \in \mathcal{E}_A(H)$ we have $L_0\varphi \in L^p(H, \mu)$ and $\int L_0\varphi\,\mathrm{d}\mu = 0$ ("infinitesimal invariance").
(iii) $\mu\big(D(F)\big) = 1$.

In the sequel, for simplicity, we shall treat only the case $p = 2$.

By assumption $(H2)$ (ii) it is easy to prove that $\big(L_0, \mathcal{E}_A(H)\big)$ is dissipative on $L^2(H,\mu)$ (cf. [7, Proposition 2.1]), hence closable. Let $\big(L, D(L)\big)$ denote its closure. The first main result in [7], however, is that $(H1)$ and $(H2)$ imply that $\big(L, D(L)\big)$ is m-dissipative (cf. [7, Theorem 2.3]), hence generates a C_0-semigroup $P_t := e^{tL}$, $t \geq 0$, on $L^2(H,\mu)$. By [7, Corollary 2.5], $(P_t)_{t\geq 0}$ is Markovian, i.e. positivity preserving and $P_t 1 = 1$ for all $t \geq 0$. Clearly, μ is invariant for $(P_t)_{t\geq 0}$, i.e. $\int P_t f \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$ for all $t \geq 0$, $f \in L^2(H,\mu)$.

For $f \in L^2(H,\mu)$ and $\alpha > 0$ we define $V_\alpha f := \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t f \,\mathrm{d}t$. Then $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ is a strongly continuous Markovian contraction resolvent as in Sections 1 and 2 above.

We need the following additional condition:

$(H3)$ (i) There exists an orthonormal basis $\{e_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ of H so that $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} E_N$ with $E_N := \mathrm{lin.span}\{e_j \mid 1 \leq j \leq N\}$ is dense in $D(A^*)$ with respect to $|\cdot|_{A^*}$ and such that for the orthogonal projection P_N onto E_N in H we have that the function $H \ni x \mapsto \langle P_N x, A^* P_N x\rangle$ converges in $L^1(H,\mu)$ to $H \ni x \mapsto \langle x, A^* x\rangle$ (defined to be $+\infty$ if $x \in H \setminus D(A^*)$).

(ii) There exist two increasing Borel functions $\varrho_1, \varrho_2 : [1,\infty) \to (0,\infty)$ such that $\big|F_0(x)\big|^2 \leq \varrho_1\big(|x|\big) + \varrho_2\big(|x|\big)\,\big|\langle x, A^* x\rangle\big|$ for all $x \in H$, and the function on the right hand side is in $L^1(H,\mu)$.

(3.3) Theorem. *Assume $(H1) - (H3)$, let $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ be as defined above and $\mathcal{T}$ be the weak topology on H. Then there exists a right process with state space H, associated with $(V_\alpha)_{\alpha>0}$, which is a martingale solution of* (3.1).

Sketch of the proof. By Corollary (1.2), a right process associated with $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ is a martingale solution of (3.1). So, it remains to prove that such a right process exists, i.e. we have to check that conditions (I) and (II) in Theorem (2.2) hold. Since $D(L)$ is separable with respect to the graph norm $\|\cdot\|_L := \big(\|L\cdot\|^2_{L^2(H,\mu)} + \|\cdot\|^2_{L^2(H,\mu)}\big)^{1/2}$ we can construct a countable $\mathbb{Q}$-algebra in $\mathcal{E}_A(H)$ dense with respect to $\|\cdot\|_L$ in $\mathcal{E}_A(H)$, hence dense with respect to $\|\cdot\|_L$ in $D(L)$. Consequently condition (II) holds by Remark (2.3) (b). Condition (I) may be verified using hypotheses $(H2)$ and $(H3)$, Theorem 2.3 in [7] and Remark (2.3) (a).

By Theorem (2.2) (b) we know that our process $(X_t)_{t\geq 0}$ is càdlàg in the weak topology P^μ-a.e. Since our Kolmogorov operator is differential, the paths are moreover weakly continuous P^μ-a.e.

References

[1] S. Albeverio, Z.M. Ma, A note on quasicontinuous kernels representing quasi-linear positive maps, Forum Math. 3 (1991), 389-400.

[2] S. Albeverio, Z.M. Ma, M. Röckner, 'Quasi-regular Dirichlet forms and Markov processes', J. Funct. Anal. 111 (1993), 118-154.

[3] L. Beznea, N. Boboc, Potential Theory and Right Processes, Kluwer Acad. Publish., 2004.

[4] L. Beznea, N. Boboc, M. Röckner, Quasi regular Dirichlet forms and L^p-resolvents on measurable spaces, Potential Analysis (to appear)

[5] L. Beznea, N. Boboc, M. Röckner, Markov processes associated with L^p-resolvents and applications to stochastic differential equations on Hilbert space, J. Evol. Eq. (to appear)

[6] S. Carillo-Menendez, Processus de Markov associé à une forme de Dirichlet non symétrique, Z. Wahrsch. verw. Geb. 33 (1975), 139-154.

[7] G. Da Prato, M. Röckner, Singular dissipative stochastic equations in Hilbert spaces, Prob. Th. Rel. Fields 124 (2002), 261-303.

[8] P.J. Fitzsimmons, On the quasi-regularity of semi-Dirichlet forms, Potential Analysis 15 (2001), 151-185.

[9] M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, Dirichlet forms and symmetric Markov processes, Walter de Gruyter, 1994.

[10] Z.M. Ma, L. Overbeck, M. Röckner, Markov processes associated with semi-Dirichlet forms, Osaka J. Math. 32 (1995), 97-119.

[11] Z.M. Ma, M. Röckner, Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.

[12] M. Röckner, B. Schmuland, Quasi-regular Dirichlet forms: examples and counterexamples, Canad. J. Math. 47 (1995), 165-200.

[13] W. Stannat, The theory of generalized Dirichlet forms and its applications in analysis and stochastics, Mem. Amer. Math. Soc. 142 (1999), no. 678.