Un théorème de Bochner-Minlos avec une condition d'intégrabilité

Habib Ouerdiane et Anis Rezgui

Résumé- Soit $\mathcal{C}$ une fonction caractéristique définie sur un Fréchet nucléaire réel X. Si on suppose que $\mathcal{C}$ est prolongeable par analycité au complexifié N de l'espace X et vérifie une condition de croissance de type exponentielle : $|\mathcal{C}(u)| \leq K e^{\theta(m|u|_p)}$ où $K \geq 0$, $m > 0$, $|\,|_p$ étant une certaine norme de l'espace N et θ une fonction continue convexe satisfaisant certaines hyppothèses techniques.
Soit μ la mesure associée à $\mathcal{C}$ par le théorème de Bochner-Minlos, on montre qu'elle vérifie la condition d'intégrabilité suivante :

$$\int_{X'} e^{\theta^*(m'|x|_{-q})} d\mu(x) < +\infty$$

où θ^* est la fonction conjuguée de θ , $m' > 0$ et $|\,|_{-q}$ est une certaine norme de l'espace dual X' de X.

La réciproque de ce résultat est démontrée.

Bochner-Minlos theorem with integrability condition

Abstract- Let $\mathcal{C}$ be a caracteristic function defined on real nuclear Fréchet space X. We suppose that $\mathcal{C}$ have an extension to an entiere function on the complexified N of the space X and satisfies a growth condition of exponential type : $|\mathcal{C}(u)| \leq K e^{\theta(m|u|_p)}$ where $K \geq 0$, $m > 0$, $|\,|_p$ is one norme of the space N and θ is a continous, convex function satisfying some technicals conditions.
Let μ be the measure associated to the function $\mathcal{C}$ by the Bochner-Minlos theorem, we prove that the measure μ satisfies an integrability condition :

$$\int_{X'} e^{\theta^*(m'|x|_{-q})} d\mu(x) < +\infty$$

where θ^* is the conjugate function of θ, $m' > 0$ and $|\,|_{-q}$ is some norm on the dual space X'.

The converse of this result is proved.

1 Introduction et énoncé des résultats

Soit X un espace de Fréchet nucléaire complet réel, dont la topologie peut être définie par une famille croissante de normes Hilbertiennes, $\left\{|\,|_p \; ; \; p \in \mathbb{N}\right\}$. L'espace X s'écrit donc $X = \cap_{p\in \mathbb{N}} X_p$, où pour tout $p \in \mathbb{N}$, X_p est le complété de l'espace X lorsqu'il est muni de la norme $|\,|_p$. Le dual toplogique de l'espace X, X' s'écrit $X' = \cup_{p\in \mathbb{N}} X_{-p}$, où pour tout $p \in \mathbb{N}$, X_{-p} est le dual de l'espace X_p . On munit l'espace X' de la topologie limite inductive.
On rappelle la définition d'une fonction caractéristique.

Définition 1 *Soit $\mathcal{C}$ une fonction de $X \to \mathbf{C}$, elle est dite fonction caractéristique si :*
i) $\mathcal{C}$ est continue.
ii) $\mathcal{C}$ est définie positive.
iii) $\mathcal{C}(0) = 1$.

On rappelle aussi l'énoncé du théorème de Bochner-Minlos classique [2].

Théorème 0 *Pour toute fonction caractéristique $\mathcal{C}$, définie sur un Fréchet nucléaire complet réel X, il existe une unique mesure de probabilité sur X', $\mu_{\mathcal{C}}$, telle que sa transformée de Fourier, $\widehat{\mu}_{\mathcal{C}}$ vérifie :*

$$\widehat{\mu}_{\mathcal{C}}(\xi) := \int_{X'} e^{i\langle x,\xi\rangle} d\mu_{\mathcal{C}}\ (x) = \mathcal{C}\ (\xi)\ \ \forall \xi \in X.$$

Si on suppose de plus que la fonction $\mathcal{C}$ admet un prolongement analytique sur le complexifié de X et vérifie une certaine condition de croissance, on montre alors que la mesure $\mu_{\mathcal{C}}$ associée vérifie une certaine condition d'intégrabilité de type Fernique. Plus précisement, si $N = X + iX$ est le complexifié de X, N serait aussi un Fréchet nucléaire complet complexe et $N = \cap_{p=0}^{+\infty} N_p$.
Soit $\theta : I\!R_+ \to I\!R_+$ une fonction continue, convexe, croissante vérifiant $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\theta(x)}{x} = +\infty$ et $\theta\ (0) = 0$. Une telle fonction est dite N-fonction suivant [3].
Soit $\theta^*(x) = \sup\limits_{t\geq 0}(tx - \theta(t))$ pour $x \geq 0$, la fonction conjuguée de θ.
On définit l'espace de fonctions holomorphes sur N à croissance exponentielle d'ordre ″fonctionnel″ la fonction θ par :

$$\mathcal{G}_\theta(N) = \bigcup_{m>0, p\in I\!N} Exp\,(N_p, \theta, m)$$

où

$$Exp(N_p, \theta, m) := \{g\ : N_p \to \mathbf{C} \text{ entière : } \|g\|_{\theta,p,m} = \sup_{u\in N_p} |g(u)| e^{-\theta(m|u|_p)} < +\infty\}.$$

Ces espaces ont été introduits et étudiés dans [1].
On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit g un élément de l'espace $\mathcal{G}_\theta(N)$, tel que sa restriction à l'espace X, $g_{|X}$, soit une fonction caractéristique. Alors la mesure de probabilité qui lui est associée, μ_g, vérifie la condition d'intégrabilité suivante :*
Il existe $m > 0$ et $p \in I\!N^*$ tel que :

$$\int_{X_{-p}} e^{\theta^*\left(m|x|_{-p}\right)} d\mu_g(x) < +\infty \tag{1}$$

Exemples :

1) Soit $g(z) = e^{\frac{-z^2}{2}}$. g est évidement un élément de l'espace $\mathcal{G}_\theta(\mathbf{C})$, où $\theta(t) = \frac{t^2}{2}$. La mesure associée à g n'est autre que la mesure gaussienne $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Comme la fonction conjuguée de θ est $\theta^*(t) = \frac{t^2}{2}$, il est clair que la mesure γ vérifie la condition d'intégrabilité (1).

2) Soit $g(z) = e^{\lambda e^{iz} - \lambda}$; $\lambda > 0$. La fonction g est élément de l'espace $\mathcal{G}_\theta(\mathbf{C})$ où $\theta(t) = e^t - 1$. La mesure associée à la fonction g est la mesure de Poisson de parametre $\lambda > 0$, $\pi_\lambda = \displaystyle\sum_{n \in I\!N} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \delta_n$ où δ_n est la masse de Dirac au point n. La mesure π_λ vérifie la condition d'intégrabilité (1) avec $\theta^*(x) = x \log x - x$.

3) Soit μ la mesure gaussienne standard définie via le théorème de Bochner-Minlos sur l'espace X' par sa fonction caractéristique

$$C(\xi) = e^{-\frac{|\xi|_0^2}{2}} \text{ pour tout } \xi \in X_0.$$

Il est clair que la fonction C admet un prolongement analytique à l'espace N et est élément de l'espace $\mathcal{G}_\theta(N)$ pour $\theta(u) = \frac{u^2}{2}$. Donc d'aprés le théorème 1 la mesure μ vérifie la condition d'integrabilité (1). Nous retrouvons ainsi l'intégrabilité de la fonction $x \longmapsto e^{m|x|_{-p}^2}$ pour un certain $m > 0$, résultat qu'on obtient en appliquant le théorème de X. Fernique [5] à l'espace de Wiener abstrait $(X_0 \hookrightarrow X_p)$.

4) Un théorème analogue, de représentation intégrale de certaines distributions positives, a été démontré dans [4] dans le cas où $\theta(t) = t^k$, $k \geq 2$ et paire. Une amélioration de ce résultat pour le cas $k \geq 1$ est démontrée dans [7].

On démontre aussi la réciproque du théorème 1.

Théorème 2 *Soit μ une mesure de probabilité de support un certain $X_{-p} \subset X'$. S'il existe une N-fonction φ et $m > 0$ tels que :*

$$\int_{X_{-p}} e^{\varphi\left(m|x|_{-p}\right)} d\mu(x) < +\infty.$$

Alors sa transformée de Fourier :

$$\widehat{\mu}(\xi) := \int_{X'} e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu(x), \xi \in X$$

est prolongeable par analycité à un élément de l'espace $\mathcal{G}_{\varphi^*}(N)$.

2 Démonstrations des théorèmes

2.1 Démonstration du théorème 1

Soit $g \in \mathcal{G}_\theta(N)$, d'après la définition de cet espace il existe $m > 0$ et $p > 0$ telle que $\|g\|_{\theta,p,m} < +\infty$. Comme on suppose de plus que sa restriction à l'espace X, $g_{|X}$, est une

fonction caractéristique. le théorème de Bochner-Minlos (théorème 0) montre l'existence d'une mesure μ_g associée à $g_{|X}$ et d'un entier $q > p$ tel que l'injection $i_{q,p} : X_q \longrightarrow X_p$ est de type Hilbert-Schmidt et $\mu_g(X_{-q}) = 1$.
La démonstration du théorème 1, nécessite les deux lemmes techniques suivants :

Lemme 1 *Pour tout $\xi \in X_q$ et $n \in I\!N$ on a :*

$$\int_{X_{-q}} \langle x^{\otimes n}, \xi^{\otimes n}\rangle^2 d\mu_g\left(x\right) \leq \|g\|_{\theta,p,m} \left(2n\right)! m^{2n}\, \theta_{2n} \left|\xi\right|_p^{2n} \tag{2}$$

avec

$$\theta_k = \inf_{r>0} \frac{e^{\theta(r)}}{r^k};\ k \in I\!N.$$

Démonstration du lemme 1 :
On suppose d'abord que $|\xi|_p = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{X_{-q}} \langle x, \xi\rangle^{2n} d\mu_g\left(x\right) &= \left| \frac{d^{2n}}{\left(d\lambda\right)^{2n}} \left(\int_{X_{-q}} e^{i\lambda\langle x,\xi\rangle} d\mu_g \right)_{|\lambda=0} \right| \\
&= \left(2n\right)! \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r} \frac{g\left(\lambda\xi\right)}{\lambda^{2n+1}}\, d\lambda \right| \ ,\ \forall r > 0 \\
&\leq \|g\|_{\theta,p,m} \left(2n\right)! m^{2n} \theta_{2n}.
\end{aligned}$$

On obtient l'inégalité pour ξ quelconque, en utilisant le fait que la fonction
$\xi \mapsto \int_{X_{-q}} \langle x, \xi\rangle^{2n} d\mu_g\left(x\right)$ est homogène.

Lemme 2 *Pour tout $n \in I\!N$ on a :*

$$\int_{X_{-q}} |x|_{-q}^n\ d\mu_g\ \left(x\right) \leq \sqrt{\|g\|_{\theta,p,m}\, \theta_{2n}(2n)!}\, \left(\sqrt{e}m\, |i_{q,p}|_{HS}\right)^n \tag{3}$$

où $|i_{q,p}|_{HS}$ désigne la norme Hilbert-Schmidt de l'injection $i_{q,p}$.

Démonstration du lemme 2 :
Soit $\left(e_j\right)_{j\in I\!N}$ une base orthonormée de X$_{-q}$, éléments de l'espace X, on a alors pour $x \in X_{-q}$:

$$|x|_{-q}^{2n} = \left|x^{\otimes n}\right|_{-q,n}^2 = \sum_{i_1,\cdots,i_n} \left(x^{\otimes n}, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}\right)_{-q,n}^2$$

où $|\,|_{-q,n}$ et $(\ ,\ )_{-q,n}$ étant la norme et le produit scalaire dans le produit tensoriel hilbertien d'ordre n de X_{-q} : $X_{-q}^{\otimes n}$.
Soit la forme $2n$-linéaire sur X_q définie par :

$$F(\xi_1, \cdots, \xi_{2n}) = \int_{X_{-q}} (x^{\otimes 2n}, \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_{2n})_{-q,n} d\mu_g(x)$$

en lui appliquant l'identité de polarisation et en utilisant l'inégalité du lemme 1, on obtient :

$$|F(\xi_1, \cdots, \xi_{2n})| \leq \|g\|_{\theta,p,m}\, e^{2n}(2n)!m^{2n}\theta_{2n} \prod_{j=1}^{2n} |\xi_j|_p$$

et par suite :

$$\int_{X_{-q}} (x^{\otimes n}, e_{i_1} \otimes .... \otimes e_{i_n})^2_{-q,n}\, d\mu_g(x) \;\leq\; \|g\|_{\theta,p,m}\, e^{2n}(2n)!m^{2n}\theta_{2n} \prod_{j=1}^{n} |e_{i_j}|_p^2$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i_1,\cdots,i_n} \int_{X_{-q}} (x^{\otimes n}, e_{i_1} \otimes .... \otimes e_{i_n})^2_{-q,n}\, d\mu_g(x) &\leq \|g\|_{\theta,p,m}\, e^{2n}(2n)!m^{2n}\theta_{2n}\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_n} \prod_{j=1}^{n} |e_{i_j}|_p^2\Big) \\
&\leq \|g\|_{\theta,p,m}\, e^{2n}(2n)!m^{2n}\theta_{2n} |i_{q,p}|_{HS}^{2n} \\
\int_{X_{-q}} |x^{\otimes n}|^2_{-q,n} d\mu_g(x) &\leq \|g\|_{\theta,p,m}\, e^{2n}(2n)!m^{2n}\theta_{2n} |i_{q,p}|_{HS}^{2n}
\end{aligned}$$

L'inégalité de Schwartz permet d'obtenir (3). Pour finir la démonstration du théorème 1, il reste à montrer qu'il exsite $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\int_{X_{-q}} e^{\theta^*(\varepsilon|x|_{-q})} d\mu_g(x) < +\infty.$$

D'après la définition de la fonction θ^* il suffit de montrer que :

$$\int_{X_{-q}} \sup_{t\geq 0} \left\{ e^{t\varepsilon|x|_{-q} - \theta(t)} \right\} d\mu_g(x) < +\infty$$

or

$$e^{t\varepsilon|x|_{-q} - \theta(t)} = e^{-\theta(t)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\varepsilon t)^n}{n!} |x|_{-q}^n .$$

On a : $e^{-\theta(t)} t^n \leq \theta_n^{-1} \,\forall\, t \geq 0$, d'où

$$\sup_{t\geq 0} \left\{ e^{t\varepsilon|x|_{-q} - \theta(t)} \right\} \leq \sum_n \frac{(\varepsilon |x|_{-q})^n}{\theta_n n!}$$

en utilisant le lemme 2 et l'inégalité : $\sqrt{\theta_{2n}} \leq 2^n \theta_n$, on a :

$$\int_{X_{-q}} \sup_{t\geq 0} \left\{ e^{t\varepsilon|x|_{-q} - \theta(t)} d\mu_g(x) \right\} \leq \sqrt{\|g\|_{\theta,p,m}} \sum_n \left(\varepsilon 2\sqrt{e} m\, |i_{q,p}|_{HS}\right)^n \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \tag{4}$$

La formule de Stirling donne l'equivalence suivante :

$$\frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \simeq \frac{2^n 2^{1/4}}{(2\pi n)^{1/4}}$$

d'où pour que la série du membre de droite de l'inégalité (4) converge il faut choisir $\epsilon > 0$ tel que $4\varepsilon\sqrt{e}m|i_{q,p}|_{HS} < 1$ on obtient donc

$$\int_{X_{-q}} \sup_{t\geq 0}\left\{e^{t\varepsilon|x|_{-q}-\theta(t)}\right\} d\mu_g(x) \leq\ cte\sqrt{\|g\|_{\theta,p,m}}$$

2.2 démonstration du théorème 2

Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ et $\zeta = \xi + i\eta \in N$, on définit le prolongement de $\widehat{\mu}$ à l'espace N comme suit :

$$\widehat{\mu}(\zeta) = \int_{X_{-p}} e^{i\langle x,\zeta\rangle} d\mu(x) = \int_{X_{-p}} e^{i\langle x,\xi\rangle - \langle x,\eta\rangle} d\mu(x)$$

en effet la fonction $x \longmapsto e^{i\langle x,\zeta\rangle}$ est integrable par rapport à la mesure μ, puisque pour $x \in X_{-p}$

$$\begin{aligned} |e^{i\langle x,\zeta\rangle}| &= e^{-\langle x,\eta\rangle} \leq e^{|x|_{-p}|\eta|_p} \\ &\leq e^{m|x|_{-p}\frac{|\eta|_p}{m} - \varphi(m|x|_{-p}) + \varphi(m|x|_{-p})} \\ &\leq e^{\varphi^*(\frac{|\eta|_p}{m})} e^{\varphi(m|x|_{-p})} \end{aligned}$$

où $m > 0$ est tel que $\int_{X_{-p}} e^{\varphi(m|x|_{-p})} d\mu(x) < +\infty$. Il est facile de vérifier que $\hat{\mu}$ est Gâteaux holomorphe et pour finir la démonstration du théorème il reste à montrer qu'elle est localement bornée sur N et qu'elle vérifie une condition de croissance exponentielle. Soit $\zeta \in N$, en faisant le même calcul que celui déja fait au début de ce paragraphe, on obtient

$$|\hat{\mu}(\zeta)| \leq e^{\varphi^*(\frac{|\zeta|_p}{m})}\Big(\int_{X_{-p}} e^{\varphi(m|x|_{-p})} d\mu(x)\Big). \tag{5}$$

Soit $B \subset N$ un borné de N, il vérifie donc : pour tout $q \in I\!N$, $\sup_{\zeta\in B} |\zeta|_q < +\infty$. Comme φ^* est continue, en utilisant l'inégalité (5) on obtient

$$\sup_{\zeta\in B} |\hat{\mu}(\zeta)| < +\infty.$$

L'inégalité (5) montre aussi que $\hat{\mu}$ est un élément de l'espace $\mathcal{G}_{\varphi^*}(N)$.

References

[1] **Gannoun. R, Hachaichi. R, Ouerdiane. H et Rezgui. A :***Un théorème de dualité entre espaces de fonctions holomorphes à croissance exponentielle. BiBos N 829/11/98.*

[2] **Hida. T :***Brownian motion, Springer (1980).*

[3] **Krasnosel'skii. M. A and Rutickii. Ya. B :***Convex Functions and Orlicz Spaces. P. Noordhoff.ltd- Groningen - The Netherlands (1961)*

[4] **Krée. P et Ouerdiane. H :** *Holomorphy and Gaussian analysis. Prépublication de l'Institut de mathématique de Jussieu. C.N.R.S Univ Paris 6 (1995).*

[5] **Kuo. H-H :***Gaussian measures in Banach spaces, Lecture Notes in Mathematics 463, Springer (1975).*

[6] **Ouerdiane. H :** *Noyaux et symboles d'opérateurs sur des fonctionnelles analytiques gaussiennes. Japanese Journal of Math. Vol 21. N°1. pp 223-234 (1995).*

[7] **Rezgui. A :***Holomorphie en dimension infinie et application à l'analyse gaussienne, mémoire de D.E.A, publication interne de la faculté des sciences de Tunis(1996)*