10. Aufgabenblatt

Aufgabe 10.1. (5 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des Identitätssatzes, dass es keine holomorphe Funktion $f\colon B_1(0) \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{für alle ganzen Zahlen } n \geq 2\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie die obige Identität zunächst für alle geraden n.

Aufgabe 10.2. (5 Punkte) Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein zur reellen Achse $\mathbb{R}$ symmetrisches Gebiet. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und auf $\Omega \cap \mathbb{R}$ reellwertig.
Beweisen Sie mithilfe von Aufgabe 2.2c), dass $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in \Omega$ gilt.

Aufgabe 10.3. (5 Punkte) Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ convergent für $|z| < 1$. Zeigen Sie

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{(1-z)z^{n+1}}\, dz = 2\pi i(a_0 + \ldots + a_n)$$

für $0 < r < 1$ und jede ganze Zahl $n \geq 0$.

Aufgabe 10.4. (5 Punkte) Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ eine glatte geschlossene Kurve, die sich nicht überkreuzt. Sei Γ die Bildmenge dieser Kurve. Dann ist $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ die disjunkte Vereinigung von zwei offenen Mengen Ω_0 und Ω_1.

a) Beschreiben Sie Ω_0 und Ω_1 mithilfe der Windungszahl.

b) Begründen Sie warum Ω_0 und Ω_1 zusammenhängend sind.

c) Entscheiden Sie, ob Ω_0 und Ω_1 einfach zusammenhängend sind.