11. Aufgabenblatt

Aufgabe 11.1. (5 Punkte) Finden Sie ein Beispiel eines Zyklus, dessen Bildmenge nicht die Bildmenge einer stückweise glatten geschlossenen Kurve ist.

Aufgabe 11.2. (10 Punkte) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, deren Komplement $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ genau $n+1$ Zusammenhangskomponenten hat, das heißt,

$$\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n \,,$$

wobei jede Menge A_k abgeschlossen und zusammenhängend ist. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass $\infty \in A_0$. Sei $\gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)$ ein Zyklus.

a) Welche Eigenschaften hat die Funktion $a \mapsto w(\gamma, a)$ auf A_k? Können Sie eine genauere Aussage für $k = 0$ treffen?

b) Seien $a_k \in A_k$ für $1 \leq k \leq n$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathcal{H}(\Omega) \to \mathbb{Z}^n \,, \quad \gamma \mapsto (w(\gamma, a_1), \ldots, w(\gamma, a_n))$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

c) Zeigen Sie, dass es für jedes $1 \leq k \leq n$ einen Zyklus γ_k gibt, sodass

$$w(\gamma_k, a) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \in A_k \\ 0 & \text{für } a \in A_l, l \neq k \,. \end{cases}$$

d) Zeigen Sie, dass die Abbildung in b) ein Gruppenisomorphismus ist.

e) Machen Sie eine Zeichnung der Menge Ω mit $n = 3$, und zeichnen Sie einen Zyklus aus der Äquivalenzklasse, der $(0, -2, 1) \in \mathbb{Z}^3$ entspricht.

Hinweis zu c): Schauen Sie sich den Beweis des letzten Satzes in der Vorlesung vom 6.Januar bzw. Satz 4.11 (Salamon) an.

Aufgabe 11.3. (5 Punkte) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten (d.h. Punkte a, an denen die Funktion nicht definiert ist) und entscheiden Sie, ob es sich um eine hebbare Singularität, einen Pol oder eine wesentliche Singularität handelt.

a) $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$

b) $f(z) = \dfrac{z}{\exp(z) - 1}$

Die Definition für hebbare Singularität, Pol und wesentliche Singularität finden Sie im Buch von Salamon, Definition 3.76.