13. Aufgabenblatt

Aufgabe 13.1. (5 Punkte) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $A \subseteq \Omega$. Zeigen Sie, dass A genau dann diskret ist, wenn $A \cap K$ für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ endlich ist.

Aufgabe 13.2. (8 Punkte) Das Ziel dieser Aufgabe ist es das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx$$

zu berechnen. Sei $f(z) := \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ und $\gamma_r = \gamma_{r,0} + \gamma_{r,1}$ ein Zyklus, bei dem $\gamma_{r,0}$ die Gerade von $-r$ nach r beschreibt und $\gamma_{r,1}$ den positiv orientierten Halbkreis von Radius r auf der Halbebene mit positiven Imaginärteil.

a) Geben Sie explizite Formeln für $\gamma_{r,0}$ und $\gamma_{r,1}$, und machen Sie eine Zeichnung.

b) Finden Sie alle isolierten Singularitäten von $f(z)$, und berechnen sie das Residuum an jeder isolierten Singularität.

c) Zeigen Sie, dass
$$\left| \int_{\gamma_{r,1}} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\, dz \right| \xrightarrow{r\to\infty} 0\,.$$

d) Verwenden Sie nun den Residuensatz um das obige Integral zu berechnen.

Hinweis zu b): Verwenden Sie Aufgabe 12.3.

Aufgabe 13.3. (7 Punkte) Das Ziel dieser Aufgabe ist es das Integral

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a+\cos(x)}\, dx$$

für $a > 1$ zu berechnen.

a) Warum genügt es $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos(x)}\, dx$ zu berechnen?

b) Beschreiben Sie $\cos(x)$ mithilfe von $z = e^{ix}$.

c) Benutzen Sie Substitution um das obige Integral als ein komplexes Integral entlang des Kreises $\partial B_1(0)$ zu beschreiben.

d) Berechnen Sie das Integral mithilfe des Residuensatzes.

Die Anmeldung zur 1. Klausur (mündliche Prüfung) ist noch bis Sonntag, 31. Januar, möglich.