

ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
12. PRÄSENZBLATT

DR. BAPTISTE ROGNERUD

Aufgabe 1. Die Zahlen 577 und 409 sind Primzahlen.

Berechnen Sie die Legendre-Symbole

$$\left(\frac{133}{577}\right) \text{ und } \left(\frac{209}{409}\right).$$

Aufgabe 2.

Berechnen Sie die Jacobi-Symbole

$$\left(\frac{92}{127}\right) \text{ und } \left(\frac{73}{415}\right).$$

Ist 73 ein quadratische Reste modulo 415?

Aufgabe 3.(a) Sei $p \geq 3$ prim und $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid a$. Zeigen Sie:Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0 \pmod{p}$ in \mathbb{F}_p ist (mit geeigneter Vielfachheit) gegeben durch $1 + \left(\frac{\Delta}{p}\right)$, wobei $\Delta = b^2 - 4ac$.

(b) Wie viele Lösungen hat die Gleichung

$$x^2 + 6x - 50 \equiv 0 \pmod{79}?$$

Aufgabe 4. Sei p eine Primzahl. Sei $\xi : (\mathbb{F}_p^\times, \times) \rightarrow (\{\pm 1\}, \times)$ definiert durch $\xi(\bar{a}) = \left(\frac{a}{p}\right)$.(a) Zeigen Sie, dass ξ ein Gruppenhomomorphism ist.(b) Was ist $\ker(\xi)$? Ist ξ surjektiv?(c) Sei ρ eine Primitivwurzel modulo p . Zeigen Sie, dass $\left(\frac{\rho}{p}\right) = 1$.