

**ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
1. ÜBUNGSBLATT**

DR. BAPTISTE ROGNERUD

Aufgabe 1. [2+2 Punkte]

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler

$$g = \text{ggT}(1444764, 8766).$$

(b) Finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$, so dass $g = x \cdot 1444764 + y \cdot 8766$ gilt.**Aufgabe 2.** [4 Punkte]

Lösen Sie die diophantische Gleichung

$$12x + 15y + 20z = 7.$$

Aufgabe 3. [2+2 Punkte]Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: 2 und 5 teilen $n^5 - n$.**Aufgabe 4.** [2+2 Punkte] Die Fibonacci-Zahlen werden rekursiv definiert durch

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2.$$

(a) Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie die beiden Aussagen:

$$f_{2n} = f_n(f_{n+1} + f_{n-1}),$$

$$f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2.$$

mit *einer* Induktion.(b) Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Sei $a_n = 2f_n f_{n+1}$, $b_n = f_{n+1}^2 - f_n^2$ und $c_n = f_{2n+1}$. Zeigen Sie dass (a_n, b_n, c_n) ein Pythagoräisches Tripel ist.**Zusatzaufgabe** [2 Punkte]

mit der Notation von Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie: $a_n + b_n + c_n = a_{n+1}$ und $f_{2n+2} - b_n = b_{n+1}$.(b) Berechnen Sie (a_n, b_n, c_n) für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.