ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
2. ÜBUNGSBLATT

DR. BAPTISTE ROGNERUD

Aufgabe 1. [3+2 Punkte]

(a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Zeigen Sie:

Die Zahl $n!$ enthält den Primfaktor p genau $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ mal.

(b) Wie viele Nullen stehen am Ende der Dezimalentwicklung von $2018! = 1 \cdot 2 \cdots 2018$.

Aufgabe 2. [3+1 Punkte]

Sei $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

(a) Es gibt eine Primzahl p so dass $p \mid n!$ und $p^2 \nmid n!$ (Hinweis: Betrands Postulat).
(b) $n! \neq a^b$ für alle $a \in \mathbb{N}_{>0}$ und $b \in \mathbb{N}_{>1}$.

Aufgabe 3. [2+2 Punkte] Für $n \in \mathbb{N}$, sei $F_n = 2^{2^n} + 1$ die n-te Fermat'sche Zahl.

(a) Dann gilt $F_{n+1} - 2 = \prod_{i=0}^{n} F_i$.
(b) Seien $n < m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $\mathsf{ggT}(F_n, F_m) = 1$.

Aufgabe 4. [3 Punkte] Robert Recorde $(1510 - 1558)$ behauptet, dass 130816 vollkommen ist. Widerlegen Sie ihn.

Abgabe: Freitag, 27. April 2018, bis 10 Uhr in die Postfächer der Tutoren in V3-126.