

**ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
5. ÜBUNGSBLATT**

DR. BAPTISTE ROGNERUD

Aufgabe 1. [1+1+2 Punkte] Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

- (a) $13^{2018} \pmod{16}$
- (b) $1617^{381} \pmod{13}$
- (c) $97! = 97 \cdot 96 \cdot \dots \cdot 1 \pmod{101}$

Aufgabe 2. [3 Punkte] Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$7 \mid a^2 + b^2 \Rightarrow 7 \mid a \text{ und } 7 \mid b.$$

Aufgabe 3. [1+3 Punkte](a) Seien p eine Primzahl und $x \in \mathbb{N}$ so dass $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ gilt. Zeigen Sie:

$$x \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

(b) Lösen Sie die diophantische Gleichung

$$x^5 - y^2 = 4.$$

(Hinweis: Betrachten Sie modulo 11).

Aufgabe 4. [2+2+1 Punkte] Sei $n \in \mathbb{N}$.(a) Sei $n = 10q + r$ mit $0 \leq r < 10$. Zeigen Sie:

$$7 \mid n \Leftrightarrow 7 \mid q - 2r.$$

(b) Sei $n = \sum_{k \geq 0} a_k \times 10^k$. Sei $Q_3(n) = (a_2 a_1 a_0)_{10} - (a_5 a_4 a_3)_{10} + (a_8 a_7 a_6)_{10} - \dots$. Zeigen Sie:

$$7 \mid n \Leftrightarrow 7 \mid Q_3(n).$$

(c) Probieren Sie beide Kriterien für 22925.