



Thèse de Doctorat

Spécialité Mathématiques

Présentée à :

L'université de Picardie Jules Verne

par

Baptiste **ROGNERUD**

Pour obtenir le grade de Docteur de l'université de Picardie Jules Verne.

Equivalences de blocs d'algèbres de Mackey.

Soutenue le 3 décembre 2013, après avis des rapporteurs, devant le jury d'examen :

<i>Rapporteurs :</i>	Pr. Markus LINCKELMANN	-	City University (London).
	Pr. Peter SYMONDS	-	University of Manchester.
<i>Directeur :</i>	Pr. Serge BOUC	-	CNRS (Amiens).
<i>Examineurs :</i>	Pr. Michel BROUÉ	-	Paris Diderot.
	M.C.F. Radu STANCU	-	U.P.J.V. (Amiens).
	Pr. Jacques THÉVENAZ	-	EPFL (Lausanne).
	Pr. Alexander ZIMMERMANN	-	U.P.J.V. (Amiens).

Remerciements.

Cette Thèse est financée par le CNRS et la région Picardie sur fond FEDER. Je remercie ces deux organismes. Je remercie également ECOS pour le projet M10M01 qui m'a permis de me rendre au Mexique.

Je veux, dans un premier temps, remercier Serge Bouc qui a accepté d'encadrer mon stage de master ainsi que cette thèse. Je le remercie pour ses précieux conseils, sa rigueur mathématique et sa disponibilité. Au cours des trois années et epsilon de cette thèse, nous avons eu, approximativement, 106 rendez-vous et j'ai pu apprécier sa bonne humeur, ses connaissances et la qualité de sa vision mathématique. Sa philosophie sur les foncteurs de Mackey peut se paraphraser de la façon suivante : 'du bon usage du foncteur de Burnside'. J'espère que cette philosophie est visible dans cette thèse.

Je remercie chaleureusement Markus Linckelmann et Peter Symonds pour avoir accepté de rapporter cette thèse. Je les remercie pour la qualité de leur travail.

Je suis très honoré d'avoir dans mon jury de thèse des chercheurs aussi éminents et importants que Michel Broué, Radu Stacu, Jacques Thévenaz et Alexander Zimmermann.

Je souhaite également remercier Alexander Zimmermann pour sa disponibilité et son aide précieuse sur les algèbres d'arbre de Brauer et les ordres de Green. Je le remercie d'avoir accepté de répondre à mes nombreuses questions pendant les cours sur les catégories dérivées et finalement de m'avoir confié son livre en préparation qui m'a été d'une grande aide.

Plus généralement je remercie les membres du LAMFA, qui ont rendu possibles et agréables ces trois années de thèse. Les nombreux séminaires et groupes de travail auxquels j'ai assisté m'ont permis de garder la motivation et d'élargir ma vision des mathématiques au contact de chercheurs internationaux. Je remercie plus particulièrement l'équipe "groupes" du LAMFA. Etre doctorant c'est aussi affronter le froid et le café soluble dans la bonne humeur. Je ne vais pas faire de liste qui serait probablement lacunaire, simplement un grand merci à tous ceux qui ont fréquenté les salles BC011-BC013 entre 2010 et 2013 et plus particulièrement ceux dont j'ai partagé le bureau. Merci à Maxime Ducellier pour les discussions bi-ensemblistes et non mathématiques que nous avons eues cette année. Je remercie spécialement Thomas Gobet qui a importé de Suisse sa méthode de rangement et sa grande culture mathématique qu'il a accepté de partager lors des nombreuses séances du groupe de travail des doctorants. L'environnement scientifique dans lequel cette thèse a eu lieu a été excellent et la présence de Thomas dans les bureaux n'y est pas étrangère.

Au cours de cette thèse j'ai passé cinq mois à Morelia au Mexique. Ces

quelques mois ont été très instructifs et très intéressants autant d'un point de vue mathématiques que d'un point de vue humain.

A todos mis amigos de México, les agradezco infinitamente por el recibimiento que me dieron. Pasar cinco meses en Morelia fue muy bella experiencia. Lo disfruté, realmente.

Gracias a Gerardo y a Tanja por las veces que comimos juntos y las conversaciones que tuvimos, donde compartimos algunos gustos en común.

(With the very british pronunciation) I would like to thank Luis Valero for his good mood and for helping me to start with GAP4.

Mr. Tacho, gracias por las incontables pláticas, más o menos matemáticas, que tuvimos en Francia o en Morelia, con cerveza o sin cerveza.

Nadia R. gracias por haber invitado a Serge a Morelia y haber contribuido a la creación del proyecto biset. Gracias por haberme enseñado el kit de "sobrevive al español", antes de mi llegada a México. Y, por supuesto, gracias por algunas disputas, más o menos matemáticas.

Je remercie mes parents, mon frère et mes soeurs pour leur soutien de tous les jours. Je suis sûr que les discussions physico-mathématiques du samedi soir vont vous manquer.

Merci de tout mon coeur à Nadia B. qui sait pourquoi.

Table des matières

1	Introduction.	7
2	Conjecture du défaut abélien de Broué.	13
2.1	Introduction.	13
2.2	Equivalences entre blocs d’algèbres de groupes.	14
2.3	Conjecture du défaut abélien.	16
2.4	Notations et conventions.	17
3	Rappels sur les foncteurs de Mackey.	19
3.1	Introduction.	19
3.2	Foncteurs de Mackey, différentes définitions.	20
3.3	Quelques foncteurs entre catégories de Mackey.	27
3.3.1	Induction, restriction et isomorphismes.	28
3.3.2	Foncteur d’inflation.	31
3.3.3	Construction de Dress.	32
3.4	Décomposition de la catégorie $Mack_R(G)$ induite par l’anneau de Burnside.	33
3.4.1	Le centre d’une catégorie.	33
3.4.2	Morphisme de $B(G)$ vers le centre de $Mack_R(G)$	34
3.5	Foncteurs de Mackey simples.	36
3.6	Foncteurs de Mackey projectifs.	37
3.7	Blocs d’algèbres de Mackey p -locales.	39
3.7.1	Anneau de Burnside croisé.	39
3.7.2	Idempotents primitifs centraux de $\mu_R^1(G)$	41
3.8	Exemple d’équivalence entre blocs d’algèbres de Mackey p - locales.	44
4	Quelques cas particuliers.	47
4.1	Introduction.	47
4.2	Matrice de décomposition des algèbres de Mackey p -locales.	48

4.3	Foncteurs de Mackey projectifs dans le cas du p -sous-groupe de Sylow distingué.	52
4.4	Exemple du groupe S_3	55
4.5	Exemple de $SL(2, \mathbb{F}_3)$	58
4.6	Exemple de $X_{p^3} \rtimes C_4$	68
4.7	Exemple de $X_{p^3} \rtimes Q_8$	73
4.8	Conclusion.	78
5	Blocs d'algèbres de Mackey cohomologiques.	81
5.1	Introduction	81
5.2	Foncteurs de Mackey cohomologiques	82
5.3	Equivalence de Yoshida	84
5.4	Complétion idempotente	89
5.5	Version par blocs	91
5.6	Equivalences entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques.	98
5.6.1	Foncteurs entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques.	98
5.6.2	Remarques sur la condition \mathcal{P}	101
5.7	Equivalences dérivées entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques	106
5.8	Application aux blocs nilpotents.	112
6	Algèbres d'arbres de Brauer.	115
6.1	Introduction.	115
6.2	Algèbre d'arbre de Brauer.	115
6.2.1	Définitions.	115
6.2.2	Algèbre stablement équivalente à une algèbre unisérielle.	118
6.2.3	Equivalences entre algèbres d'arbre de Brauer.	123
6.2.4	Exemples d'algèbres d'arbre de Brauer.	125
6.2.5	Application aux algèbres de Mackey p -locales.	125
6.3	Ordre de Green	130
6.3.1	Application aux algèbres de Mackey	142
7	Equivalences entre blocs d'algèbres de Mackey p-locales.	145
7.1	Introduction.	145
7.2	Blocs principaux des groupes p -nilpotents.	146
7.3	Bloc de défaut d'ordre p	150

Table des matières

8 Annexe	155
8.1 Programmes GAP.	155
8.2 Un exemple.	176
Bibliographie	185

Table des matières

Chapitre 1

Introduction.

The notion of Mackey functor, introduced by Green in 1971 [14], is a generalization of linear representations of a finite group G . A Mackey functor, for Green, is the data of a representation of $N_G(H)$ for every subgroup H of G , together with relations between these representations. A couple of years later, Dress gave a completely different, but equivalent, definition using the formalism of categories. Twenty years later Thévenaz and Webb introduced the Mackey algebra and proved that a Mackey functor is nothing but a module over this algebra. Let R be a commutative ring. The Mackey algebras $\mu_R(G)$ share a lot of properties of group algebras, for example $\mu_R(G)$ is R -free of finite rank and this rank is independent of the ring R . Moreover if R is a field of characteristic which do not divide the order of G , then $\mu_R(G)$ is semi-simple. When (K, \mathcal{O}, k) is a p -modular system, it is possible to define a decomposition theory for $\mu_{\mathcal{O}}(G)$, in particular the Cartan matrix of the Mackey algebra is symmetric and non singular. However there are some differences with group algebras : in particular, most of the time the determinant of the Cartan Matrix of $\mu_k(G)$ is not a power of p , and the Mackey algebra over a field of characteristic p is almost never (as soon as $p^2 \mid |G|$) a symmetric algebra.

Let $R = \mathcal{O}$ or k . In their paper, Thévenaz and Webb proved that there is a bijection $b \mapsto b^\mu$ between the blocks of RG and the primitive central idempotents of $\mu_R^1(G)$, called the blocks of $\mu_R^1(G)$, where $\mu_R^1(G)$ is the so called p -local Mackey algebra.

The blocks of RG are in bijection with the blocks of $\mu_R^1(G)$, and this bijection preserves the defect groups. So using the Brauer correspondence, we have the following diagram, where b is a block of RG with defect group D and b' is

the Brauer correspondent of b in $RN_G(D)$:

$$\begin{array}{ccc} b \in Z(RG) & \longrightarrow & b^\mu \in Z(\mu_R^1(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ b' \in Z(RN_G(D)) & \longrightarrow & b'^\mu \in Z(\mu_R^1(N_G(D))). \end{array}$$

If D is abelian, it is conjectured by Broué that the block algebras RGb and $RN_G(D)b'$ are deeply connected. It is a very natural question to ask if the same can happen for the corresponding Mackey algebras. However, we should notice that, since the Mackey algebra is (most of the time) not symmetric it is not possible to look at stable equivalences between Mackey algebras. In Chapter 4 we use some examples to avoid naive ideas, and try to find the “good” type of equivalence for these blocks of Mackey algebras. In the present work we look at the following situation. Let G and H be two finite groups. Let b and c be two block idempotents such that RGb and RHc are Morita or derived equivalent.

Question A. *Let G be a finite group and b be a block of $\mathcal{O}G$ with abelian defect group D . Let b' be the Brauer correspondent of b in $\mathcal{O}N_G(D)$. Is there a derived equivalence $D^b(\mu_{\mathcal{O}}^1(G)b^\mu) \cong D^b(\mu_{\mathcal{O}}^1(N_G(D))b'^\mu)$?*

In Chapter 5 we consider the question for the cohomological Mackey algebra, which is a quotient of $\mu_R^1(G)$. Using a block version of a Yoshida’s Theorem for cohomological Mackey functors, we are able to prove the following theorem which settles the question for the cohomological Mackey algebra in the case of a splendid equivalence.

Theorem B. *Let G and H be two finite groups, let b be a block of RG and c be a block of RH . If RGb and RHc are splendidly derived equivalent, then*

$$D^b(\text{co}\mu_R(G)b^\mu) \cong D^b(\text{co}\mu_R(H)c^\mu).$$

In Chapter 7 we look at Question A. for principal blocks of p -nilpotent groups, and even if the situation is not as simple as in the case of blocks of groups algebra, we prove :

Theorem C. *Let $G = N \rtimes P$ be a p -nilpotent group, where P is a Sylow p -subgroup of G . Let b_0 be the principal block of RG . Then $\mu_R^1(b_0)\text{-Mod}$ is Morita equivalent to $\mu_R(P)\text{-Mod}$.*

Finally, we look at blocks with defect group of order p . In Chapter 6, after some reminders and well known results about Brauer tree algebras, using the

knowledge of projective Mackey functors, we give a slightly different proof of the fact that the p -local Mackey algebras are, in this situation, Brauer tree algebras. We recall some results about Green orders and prove that the p -local Mackey algebras over the p -adic ring are Green orders. Using these results, we prove in Chapter 7 the following Theorem :

Theorem D. *Let G and H be two finite groups with a common p -subgroup C of order p . Let b (resp. c) be a block of RG (resp. RH) with defect group C . Then,*

1. $D^b(\mu_R^1(b)) \cong D^b(\mu_R^1(c))$ if and only if $D^b(RGb) \cong D^b(RHc)$.
2. If $RGb\text{-Mod} \cong RHc\text{-Mod}$ by a splendid bimodule M , then

$$\mu_R^1(b)\text{-Mod} \cong \mu_R^1(c)\text{-Mod}.$$

Keywords : Mackey functors, finite groups, blocks, representation of algebras, Morita equivalence, derived equivalence, splendid equivalence.

La notion de foncteur de Mackey a été introduite par Green en 1971 dans [14]. C'est une généralisation des représentations linéaires d'un groupe fini G . Un foncteur de Mackey, pour Green, est la donnée d'une représentation de $N_G(H)$ pour tout sous-groupe H of G , avec des opérations d'induction restriction et conjugaison entre ces représentations. Quelques années plus tard, Dress a donné une définition complètement différente, mais équivalente, qui utilise le formalisme des catégories. Vingt ans plus tard, Thévenaz et Webb ont introduit l'algèbre de Mackey et ils ont démontré qu'un foncteur de Mackey est simplement un module à gauche sur cette algèbre. Soit R un anneau commutatif, l'algèbre de Mackey $\mu_R(G)$ partage de nombreuses propriétés avec l'algèbre de groupe RG , par exemple $\mu_R(G)$ est R -libre de rang fini et ce rang est indépendant de l'anneau R . De plus si R est un corps de caractéristique qui ne divise pas l'ordre du groupe G , alors $\mu_R(G)$ est semi-simple. Si (K, \mathcal{O}, k) est un système p -modulaire, il est possible de définir une théorie de décomposition pour $\mu_{\mathcal{O}}(G)$, en particulier, la matrice de Cartan de l'algèbre de Mackey est symétrique et non dégénérée. Cependant il y a des différences avec les algèbres de groupes : en particulier, l'algèbre de Mackey n'est, en général, pas symétrique (dès que $p^2 \mid |G|$) et le déterminant de la matrice de Cartan de $\mu_k(G)$ n'est en général pas une puissance de p . Soit $R = \mathcal{O}$ ou k . Dans leur papier, Thévenaz et Webb ont démontré qu'il y a une bijection $b \mapsto b^\mu$ entre les blocs de RG et des idempotents primitifs centraux de $\mu_R^1(G)$, appelés blocs de $\mu_R^1(G)$, où $\mu_R^1(G)$ est l'algèbre de Mackey p -locale.

Les blocs de RG sont en bijection avec les blocs avec $\mu_R^1(G)$, et cette bijection préserve les groupes de défaut. Donc en utilisant la correspondance de Brauer, on a le diagramme suivant, où b est un bloc de RG de groupe de défaut D et b' est le correspondant de Brauer de b dans $RN_G(D)$:

$$\begin{array}{ccc} b \in Z(RG) & \longrightarrow & b^\mu \in Z(\mu_R^1(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ b' \in Z(RN_G(D)) & \longrightarrow & b'^\mu \in Z(\mu_R^1(N_G(D))). \end{array}$$

Si D est abélien, il est conjecturé par Broué que les blocs RGb et $RN_G(D)b'$ sont profondément connectés. C'est une question très naturelle de se demander si la même chose peut être vraie pour les algèbres de Mackey correspondantes. Toutefois, comme les algèbres de Mackey ne sont pas symétriques, il n'est pas possible de considérer à des équivalences stables entre ces algèbres. Dans le chapitre 4 on utilise des exemples bien choisis pour éliminer les idées trop naïves que l'on pourrait avoir, et pour essayer de trouver le "bon" type d'équivalences à considérer pour ces blocs d'algèbres de Mackey.

Dans cette thèse, on considère la situation suivante : soient G et H deux groupes finis. Soient b et c deux idempotents blocs tels que RGb et RHc sont Morita ou dérivés équivalents.

Question A. *Soit G un groupe fini et b un bloc de $\mathcal{O}G$ de groupe de défaut abélien D . Soit b' le correspondant de Brauer de b dans $\mathcal{O}N_G(D)$. Y-a-t-il une équivalence dérivée $D^b(\mu_{\mathcal{O}}^1(G)b^\mu) \cong D^b(\mu_{\mathcal{O}}^1(N_G(D))b'^\mu)$?*

Dans le chapitre 5, on considère cette question dans le cadre de l'algèbre de Mackey cohomologique, qui est un quotient de $\mu_R^1(G)$. En utilisant une version par bloc de théorème de Yoshida sur les foncteurs de Mackey cohomologiques, on démontre le théorème suivant, qui répond à la question dans le cas des équivalences splendides.

Théorème B. *Soient G et H deux groupes finis, soient b un bloc de RG et c un bloc de RH . Si RGb et RHc sont splendidement dérivés équivalents, alors $D^b(\text{co}\mu_R(G)b^\mu) \cong D^b(\text{co}\mu_R(H)c^\mu)$.*

Dans le chapitre 7, on s'intéresse à la question A pour les blocs principaux des groupes p -nilpotent, et même si la situation n'est pas aussi simple que dans le cas des blocs d'algèbres de groupes, on démontre :

Théorème C. *Soit $G = N \rtimes P$ un groupe p -nilpotent, où P est un p -sous-groupe de Sylow de G . Soit b_0 le bloc principal de RG . Alors $\mu_R^1(b_0)\text{-Mod}$ est Morita équivalent à $\mu_R(P)\text{-Mod}$.*

Pour terminer, on regarde le cas des blocs de défaut d'ordre p . Dans le chapitre 6, après quelques rappels, et résultats moins connus, sur les algèbres d'arbre de Brauer, on donne une démonstration légèrement différente du fait que les algèbres de Mackey p -locales sont, dans cette situation, des algèbres d'arbres de Brauer. On rappelle ensuite des résultats sur les ordres de Green et on démontre que les algèbres de Mackey p -locales sur l'anneau de valuation sont des ordres de Green. On utilise ces résultats pour démontrer, dans le chapitre 7 le théorème suivant :

Théorème D. *Soient G et H deux groupes finis avec un p -sous-groupe C d'ordre p en commun. Soient b (resp. c) un bloc de RG (resp. RH) de groupe de défaut C , alors :*

1. $D^b(\mu_R^1(b)) \cong D^b(\mu_R^1(c))$ si et seulement si $D^b(RGb) \cong D^b(RHc)$.
2. Si $RGb\text{-Mod} \cong RHc\text{-Mod}$ par un bimodule splendide M , alors

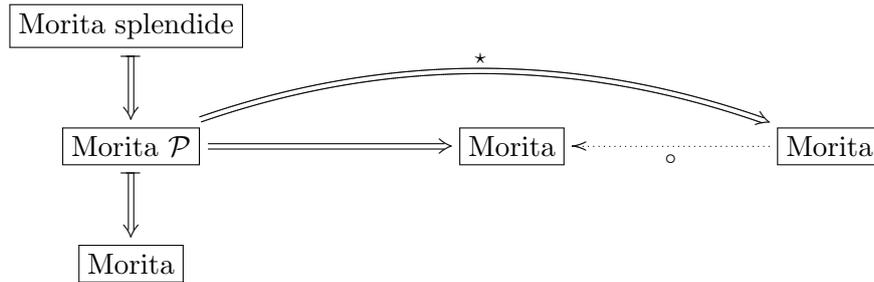
$$\mu_R^1(b)\text{-Mod} \cong \mu_R^1(c)\text{-Mod}.$$

Mots clefs : Foncteur de Mackey, groupe fini, bloc, représentation d'algèbres, équivalence de Morita, équivalence dérivée, équivalence splendide.

Chapitre 1. Introduction.

Dans cette thèse on introduit des équivalences entre blocs d'algèbres de Mackey cohomologiques ou p -locales. Suivant un excellent conseil de P. Symonds, voici un diagramme qui récapitule les différentes implications entre ces équivalences.

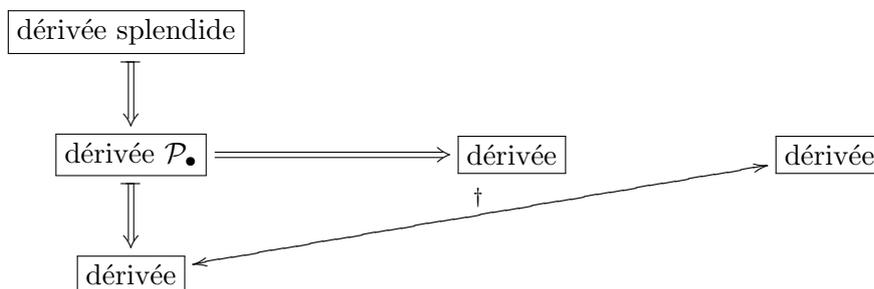
Blocs d'algèbres de groupes Mackey cohomologiques Mackey p -locales



où

- \Rightarrow est une implication dont on ne sait pas si l'implication dans l'autre sens est vraie.
- \Leftrightarrow est une implication stricte, c'est-à-dire dont on sait que l'implication dans l'autre sens est fautive.
- \star : dans le cas des blocs de défaut C_p .
- \circ : Il existe des équivalences de blocs d'algèbres de Mackey p -locales qui n'induisent pas d'équivalences entre les blocs d'algèbres de Mackey cohomologiques, mais étant donné deux blocs d'algèbres de Mackey p -locales Morita équivalents on ne sait pas s'il existe une classe d'isomorphisme d'équivalence de Morita qui se comporte bien avec la structure cohomologique.

Blocs d'algèbres de groupes Mackey cohomologiques Mackey p -locales



où

- \Leftrightarrow est une double implication.
- \dagger dans le cas des blocs de défaut C_p .

Chapitre 2

Conjecture du défaut abélien de Broué.

2.1 Introduction.

Soit G un groupe fini et p un nombre premier qui divise l'ordre de G . On note (K, \mathcal{O}, k) un système p -modulaire, i.e. \mathcal{O} est un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal $\mathfrak{p} = (\pi)$ dont le corps résiduel $k = \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ est de caractéristique p et le corps de fraction $K = \text{Frac}(\mathcal{O})$ de caractéristique 0. D'après le théorème 5 de [35], on peut supposer que le polynôme $X^{|G|} - 1$ a ses racines dans le corps k et le corps K . Dans ce cas on dit que le système p -modulaire est "assez gros" pour G . Dans le cas où les corps k et K contiennent toutes les racines des polynômes $X^{|N_G(Q)/Q|} - 1$ pour les p -sous-groupes Q de G , on dit alors que le système modulaire est "assez gros" pour les $N_G(Q)/Q$.

La décomposition de $1 \in \mathcal{O}G = b_1 + \cdots + b_s$ en somme orthogonale d'idempotents primitifs centraux b_i induit une décomposition

$$\mathcal{O}G = \mathcal{O}Gb_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}Gb_s.$$

De plus pour chaque idempotent $b_i \in Z(\mathcal{O}G)$, il existe un unique idempotent primitif $\bar{b}_i \in Z(kG)$ tel que $b_i = \bar{b}_i$ modulo \mathfrak{p} . On a ainsi une décomposition

$$kG = kG\bar{b}_1 \oplus \cdots \oplus kG\bar{b}_s.$$

S'il n'y a pas de confusion possible, on notera simplement b les idempotents après réduction. Ces idempotents sont appelés les idempotents blocs de $\mathcal{O}G$ (resp. kG).

De même on appelle $B_i := \mathcal{O}Gb_i$ l'algèbre du bloc b_i et $k \otimes_{\mathcal{O}} B \cong kG\bar{b}_i$ l'algèbre du bloc \bar{b}_i .

Soit M un $\mathcal{O}G$ -module indécomposable, il y a un unique idempotent bloc b tel que $bM \neq 0$. On dit alors que M appartient au bloc $\mathcal{O}Gb$. La même définition s'applique pour les kG -modules.

Soit $R = \mathcal{O}$ ou k . La décomposition en blocs de RG correspond à la décomposition en facteurs directs projectifs indécomposables de RG vu comme RG - RG -bimodule. Par la procédure habituelle, on peut voir les RG - RG -bimodules comme des $R[G \times G]$ -modules. De façon plus précise, si $\lambda \in RG$ et si g_1, g_2 sont des éléments de G , alors

$$(g_1, g_2) \cdot \lambda := g_1 \lambda g_2^{-1}.$$

Les vortex de $B = eRG$ sont conjugués à un groupe de la forme

$$\Delta(D) := \{(d, d) \in D \times D ; d \in D\},$$

pour un p -sous-groupe D de G , bien défini à conjugaison près.

Définition 2.1.1. Soit B un bloc de RG dont le vortex est conjugué à $\Delta(D)$. Le groupe D est un *groupe de défaut* de B . De plus si $|D| = p^\alpha$, alors α est le *défaut* de B .

Proposition 2.1.2. Soit B un bloc de kG et \hat{B} le bloc de $\mathcal{O}G$ correspondant, alors les blocs B et \hat{B} ont mêmes groupes de défaut.

L'une des grandes idées de la théorie des blocs est que l'on peut comparer et relier les blocs de RG avec les blocs de sous-groupes dit "*p*-locaux". Ceci ce fait à l'aide du morphisme de Brauer.

Définition 2.1.3. Soit D un p -sous-groupe de G . Le *morphisme de Brauer* $br_D : (kG)^D \rightarrow kC_G(D)$ est la projection canonique dont le noyau est égal à $\sum_{Q < D} Tr_Q^D(kG^Q)$, où Tr est le morphisme de trace relative.

Théorème 2.1.4 (Brauer's first main theorem.). *Le morphisme de Brauer induit une bijection appelée correspondance de Brauer entre les blocs de $Z(kG)$ de défaut D et les blocs de $Z(kN_G(D))$ de défaut D . Si b est un bloc de $kN_G(D)$ on note b^G le bloc de $Z(kG)$ qui lui correspond. Le bloc b^G est appelé correspondant de Brauer de b .*

2.2 Equivalences entre blocs d'algèbres de groupes.

Dans cette section, on rappelle les équivalences classiques entre algèbres de dimension finie. Soit R un anneau commutatif artinien et noetherien et A une R -algèbre de type finie.

2.2. Equivalences entre blocs d'algèbres de groupes.

Définition 2.2.1. Les algèbres A et B sont Morita équivalentes si les catégories de A -modules à gauche $A\text{-Mod}$ et de B -modules $B\text{-Mod}$ sont équivalentes.

Théorème 2.2.2. A et B sont Morita équivalentes si et seulement si les conditions équivalentes suivantes sont réalisées :

1. Il existe un A - B -bimodule projectif des deux côtés tel que $M \otimes_B \text{Hom}_A(M, A) \cong A$ dans la catégorie des A - A -bimodules et $\text{Hom}_B(M, B) \otimes_A M \cong B$ dans la catégorie des B - B bimodules.
2. $A \cong \text{End}_B(P)^{op}$ pour un pro-générateur P de $B\text{-Mod}$.

Définition 2.2.3. Les algèbres A et B sont *dérivées équivalentes* si les catégories dérivées bornées $D^b(A)$ et $D^b(B)$ sont équivalentes en tant que catégories triangulées.

Théorème 2.2.4 ([28]). A et B sont *dérivées équivalentes* si et seulement si il existe un complexe borné T de B -module projectifs tel que

1. Le complexe T n'a pas d'auto-extension non triviale.
2. $\text{add}(T) = D^b(B\text{-proj})$, où $D^b(B\text{-proj})$ est la sous catégorie de $D^b(B)$ formée des complexes dont les termes sont des B -modules projectifs et $\text{add}(T)$ est la sous-catégorie triangulée de $D^b(T)$ qui contient les facteurs directs de sommes directes de T .
3. $A \cong \text{End}_{D^b(B)}(T)^{op}$.

De même, il y a une version pour les équivalences de catégories homotopiques. Soit A une R -algèbre, on note $K^b(A)$ la catégorie homotopique bornée des A -modules, et si C est un complexe de chaînes, on note C^* le dual R -linéaire de C . Alors,

Théorème 2.2.5. A et B sont Rickard équivalentes si et seulement si les conditions équivalentes suivantes sont réalisées :

1. Il existe un complexe borné C de A - B -bimodules, dont les termes sont projectifs de chaque côté tel que

$$C \otimes_B C^* \cong A \text{ dans la catégorie } K^b(A \otimes A^{op}),$$

et

$$C^* \otimes_A C \cong B \text{ dans la catégorie } K^b(B \otimes B^{op}).$$

2. il existe un complexe borné T de B -modules projectifs tel que
 - Le complexe T n'a pas d'auto-extension non triviale.

- $\text{add}(T) = K^b(B\text{-proj})$, où $K^b(B\text{-proj})$ est la sous-catégorie de $K^b(B)$ formée des complexes dont les termes sont des B -modules projectifs et $\text{add}(T)$ est la sous-catégorie triangulée de $K^b(T)$ qui contient les facteurs directs de sommes directes de T .
- $A \cong \text{End}_{K^b(B)}(T)^{\text{op}}$.

Remarque 2.2.6. D’après le théorème 2.2.4, l’existence d’une équivalence de Rickard, implique l’existence d’une équivalence dérivée.

2.3 Conjecture du défaut abélien.

Soit G un groupe fini et $R = \mathcal{O}$ ou k . Le premier théorème de Brauer met en évidence un lien entre les blocs de RG de défaut D et les blocs de $N_G(D)$ de même défaut. Il a été conjecturé par Broué qu’il existe des liens beaucoup plus forts entre les représentations de RG et les représentations de sous-groupes “ p -locaux” :

Conjecture 2.3.1 (Broué). *Soit G un groupe fini et b un bloc de RG de défaut abélien D , soit b' le correspondant de Brauer de b dans $N_G(D)$, alors*

$$D^b(RGb) \cong D^b(RN_G(D)b'),$$

où $D^b(-)$ désigne la catégorie dérivée bornée.

La conjecture telle qu’énoncée ci-dessous n’est pas la version initiale de Broué. Dans un premier temps celle-ci concernait les caractères des blocs et Broué a conjecturé l’existence d’une “isométrie parfaite” entre ces blocs. Puis l’existence d’une isotypie, qui est en quelque sorte la donnée d’une famille d’isométries parfaites entre des blocs d’algèbres de groupes “ p -locaux” qui se comportent bien avec les morphismes de décomposition généralisés. Pour plus de détails sur ces notions, voir [11]. La notion “d’isométrie parfaite” semble être le fantôme au niveau des caractères de l’existence d’une équivalence dérivée entre les blocs. Cependant l’existence d’une équivalence dérivée entre deux blocs d’algèbres de groupes n’explique pas l’existence d’une isotypie. Pour cela, il faut un type d’équivalence plus forte :

Définition 2.3.2. Soient G et H des groupes finis, possédant un p -sous-groupe commun D . Soient A un bloc de RG et B un bloc de RH tous les deux de groupe de défaut D . Alors A et B sont *splendidement équivalents* s’il existe un complexe C de A - B -bimodules tel que :

1. Le complexe C induit une équivalence de Rickard entre A et B .

2.4. Notations et conventions.

2. Les termes du complexe C , vus comme $R[G \times H]$ -modules, sont des modules de p -permutation qui sont projectifs relativement à $\Delta(A)$.

Remarque 2.3.3. Dans le cas des blocs principaux, la donnée d'une équivalence splendide permet de construire une isotypie entre ces blocs (voir [30]). Dans le cas des blocs non principaux il faut modifier légèrement la définition pour pouvoir construire une isotypie (voir [16]).

Soient A et B deux blocs d'algèbres de groupes. L'existence d'une équivalence de Morita, ou dérivée, ou dérivée splendide entraîne :

1. Les centres des algèbres A et B sont isomorphes. Plus généralement les anneaux de cohomologie de Hochschild $HH^*(A)$ et $HH^*(B)$ sont isomorphes.
2. Les groupes de Grothendieck $K_0(A)$ et $K_0(B)$ sont isomorphes.
3. Les diviseurs élémentaires des matrices de Cartan de A et B sont identiques.
4. Le défaut du bloc A est égal au défaut de B .
5. Le type de représentation de A est le même que celui de B .
6. Si A et B sont splendidement dérivées équivalentes, le nombre de classes d'isomorphisme de modules de p -permutation indécomposables de A et B sont les mêmes.
7. Si A et B sont splendidement dérivées équivalentes, les systèmes de fusion de A et B sont équivalents.

Remarque 2.3.4. Les matrices de Cartan et de décomposition de A et B sont équivalentes si A et B sont Morita équivalentes, mais ce n'est plus vrai en général si A et B sont dérivées équivalentes.

Remarque 2.3.5. Les conséquences 1, 2, 3 et 5 ne dépendent pas du fait que les algèbres sont des blocs d'algèbres de groupes.

2.4 Notations et conventions.

Dans la suite du texte, tous les groupes que l'on rencontrera seront finis. Soit G un groupe fini, alors utilisera les notations suivantes :

Notations 2.4.1. • Soit p un nombre premier, alors $s_p(G)$ est l'ensemble des p -sous-groupes non triviaux de G , et $\underline{s}_p(G)$ est l'ensemble de tous les p -sous-groupes de G .

- On note $[s_p(G)]$ (resp. $[\underline{s}_p(G)]$) un système de représentants des classes de conjugaison de sous-groupes de $s_p(G)$ (resp. $\underline{s}_p(G)$).

- Soient H un groupe fini et X un G - H -bi-ensemble fini, on note $G \backslash X$ l'ensemble des orbites de X sous l'action de G et X/H l'ensemble des orbites de X sous l'action de H .
- Soient H et K deux sous-groupes de G . On note $H =_G K$ si H et K sont conjugués dans G .
- Soit H un sous-groupe de G . On note $N_G(H)$ le normalisateur de H dans G et on note $\overline{N}_G(H)$ le groupe quotient $N_G(H)/H$.
- Soient H et K des groupes finis. Considérons un G - H -bi-ensemble G et un H - K -bi-ensemble V . Alors $U \times_H V$ est le G - K -bi-ensemble

$$(U \times V)/H.$$

- Soit A un anneau et $a \in A$, on note (a) l'idéal de A engendré par l'élément a .
- Soit A un anneau commutatif. On note $A\text{-Mod}$ la catégorie des A -modules à gauche et on note $A\text{-mod}$ la catégorie des A -modules (à gauche) de type fini.
- On note $C^b(A)$ la catégorie des complexes de chaînes de A -modules. Les indices des termes des complexes sont décroissants.
- On note $K^b(A)$ la catégorie homotopique bornée de A et $D^b(A)$ la catégorie dérivée bornée de A .
- On note $A\text{-}\underline{\text{Mod}}$ la catégorie stable des A -modules et on note $A\text{-}\underline{\text{mod}}$ la catégorie stable des A -modules de type fini. Si on travaille sur l'anneau de valuation \mathcal{O} alors on identifie à zéro les modules relativement \mathcal{O} -projectifs.
- Soit $R = \mathcal{O}$ ou k . Soit V un RG -module et Q un p -sous-groupe de G , alors le foncteur de Brauer en Q (voir [10]) évalué en V est noté $V[Q]$.

On utilisera “facteur de permutation” pour l'anglais “permutation projective” :

Définition 2.4.2. Soit R un anneau commutatif unitaire et G un groupe fini. Un RG -module est un *facteur de permutation* s'il existe un G -ensemble fini X tel que V est un facteur direct de RX .

Chapitre 3

Rappels sur les foncteurs de Mackey.

3.1 Introduction.

Dans ce chapitre, on présente la problématique de la thèse. Pour cela on a besoin de quelques rappels sur la notion de foncteur de Mackey. C'est une notion qui a été inventée par Green en 1971, puis elle a été généralisée par Dress, Lindner et plus récemment par Thévenaz et Webb. Chacun de ces auteurs a apporté une "nouvelle définition" de cette notion. Par "définition" on entend une catégorie qui est équivalente à la catégorie de foncteurs de Mackey introduite par Green. La force des équivalences de catégories permet d'avoir quatre points de vue complètement différents sur la même notion.

On présente dans un premier temps les quatre catégories de foncteurs de Mackey ainsi que les équivalences entre ces catégories. Ceci est bien connu, mais d'une importance fondamentale pour la suite du document. Lorsque l'on cherche à démontrer un résultat avec la notion de foncteur de Mackey, il est commun de changer très souvent de définition pour choisir celle dans laquelle le résultat est le plus naturel.

Dans la suite de ce chapitre on rappelle les résultats de Thévenaz et Webb sur les foncteurs de Mackey simples et projectifs, ainsi que la notion de blocs de l'algèbre de Mackey. Pour cette dernière on présente le point de vue de Bouc, qui donne une formule explicite pour ces blocs.

3.2 Foncteurs de Mackey, différentes définitions.

La notion de foncteur de Mackey a été introduite par Green dans [14]. Cette définition est parfois appelée la définition naïve des foncteurs de Mackey. Le principe est d'axiomatiser le comportement des représentations des groupes finis. Cette définition permet d'avoir une bonne intuition sur les foncteurs de Mackey. Ces foncteurs ressemblent aux représentations des groupes avec les morphismes d'induction, restriction et conjugaison. Cependant, il convient de faire attention avec cette intuition, les foncteurs de Mackey ne possèdent pas toutes les propriétés de cet exemple particulier.

Soit R un anneau commutatif unitaire.

Définition 3.2.1. Un *foncteur de Mackey* M pour le groupe G sur l'anneau R consiste en la donnée de

- Pour chaque sous-groupe H de G , un R -module $M(H)$.
- Pour des sous-groupes $H \subseteq K$ de G , un morphisme de R -modules $t_H^K : M(H) \rightarrow M(K)$ appelé transfert, ou induction, et d'un morphisme de R -modules $r_H^K : M(K) \rightarrow M(H)$ appelé restriction.
- Pour chaque sous-groupe H de G , et chaque élément x de G , un morphisme de R -modules $c_{x,H} : M(H) \rightarrow M({}^xH)$ appelé conjugaison.

Ces applications vérifient les conditions suivantes

1. *Axiome de trivialité.* Pour chaque sous-groupe H de G , et chaque élément $h \in H$, les morphismes r_H^H , t_H^H et $c_{h,H}$ sont égaux au morphisme identité de $M(H)$.
2. *Axiome de transitivité.* Si $H \subseteq K \subseteq L$ sont des sous-groupes de G , alors $t_K^L \circ t_H^K = t_H^L$ et $r_H^K \circ r_K^L = r_H^L$. De plus si x et y sont des éléments de G , $c_{y,{}^xH} \circ c_{x,H} = c_{yx,H}$.
3. *Axiome de compatibilité.* Si $H \subseteq K$ sont des sous-groupes de G , et si x est un élément de G , alors $c_{x,K} \circ t_H^K = t_{H \cap {}^xK}^x \circ c_{x,H}$ et $c_{x,H} \circ r_H^K = r_{H \cap {}^xK}^x \circ c_{x,K}$.
4. *Axiome de Mackey.* Si $H \subseteq K \supseteq L$ sont des sous-groupes de G , alors

$$r_H^K \circ t_L^K = \sum_{x \in [H \backslash K / L]} t_{H \cap {}^xL}^H \circ c_{x, H \cap {}^xL} \circ r_{H \cap {}^xL}^L.$$

En particulier, pour chaque sous-groupe H de G , le R -module $M(H)$ est un $N_G(H)/H$ -module.

Un morphisme f entre foncteurs de Mackey M et N est la donnée d'un

3.2. Foncteurs de Mackey, différentes définitions.

morphisme R -linéaire $f(H) : M(H) \rightarrow N(H)$ pour tout H , tel que les diagrammes suivants soient commutatifs : soit $H \leq K$ et $g \in G$,

$$\begin{array}{ccc} M(H) & \xrightarrow{f(H)} & N(H) \\ \downarrow t_H^K & & \downarrow t_H^K \\ M(K) & \xrightarrow{f(K)} & N(K) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M(H) & \xrightarrow{f(H)} & N(H) \\ r_H^K \uparrow & & r_H^K \uparrow \\ M(K) & \xrightarrow{f(K)} & N(K) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M(H) & \xrightarrow{f(H)} & N(H) \\ \downarrow c_{g,H} & & \downarrow c_{g,H} \\ M({}^g H) & \xrightarrow{f({}^g H)} & N({}^g H) \end{array}$$

On peut composer les morphismes de manière évidente, et l'on note $Mack_R(G)$ la catégorie des foncteurs de Mackey ainsi obtenue.

Exemple 3.2.2. La correspondance qui à $H \leq G$ associe son *anneau de Burnside* $B(H)$ est naturellement munie d'une structure de foncteur de Mackey sur \mathbb{Z} , où le groupe de Burnside $B(H)$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie des H -ensembles finis. Le produit cartésien des H -ensembles induit une structure d'anneau sur $B(H)$.

L'exemple suivant est fondamental dans le chapitre sur les foncteurs de Mackey cohomologiques.

Exemple 3.2.3. Soit V un RG -module, le foncteur de points fixes FP_V est le foncteur de Mackey pour G défini par

$$FP_V(H) = V^H := \{ v \in V ; hv = v, \forall h \in H \} = H^0(H, V).$$

Soit $H \leq K \leq G$, alors $V^K \subset V^H$, et le morphisme de restriction r_H^K est l'inclusion. Le morphisme de transfert $t_H^K : V^H \rightarrow V^K$ est le morphisme de trace relative : si $v \in V$, alors $t_H^K(v) = \sum_{k \in [K/H]} k.v$ où $[K/H]$ est un système de représentants des classes à gauche. Les morphismes de conjugaison sont induits par l'action de G sur V . En utilisant un argument de décalage, on peut démontrer que les foncteurs dérivés droits i.e. les foncteurs de cohomologie $H^n(-, V)$, sont des foncteurs de Mackey.

Il y a une notion duale :

Exemple 3.2.4. Soit V un RG -module, le foncteur de quotients fixes FQ_V est défini comme suit : soit $H \leq G$, soit $I(H)$ le sous-module de V engendré par les $hv - h$, pour $h \in H$ et $v \in V$

$$FQ_V(H) = V_H := V/I(H) = H_0(H, V).$$

Soit $H \leq K \leq G$, alors $I(H) \subset I(K)$, donc il y a une projection canonique $V_H \rightarrow V_K$, que l'on appelle t_H^K . Le morphisme de restriction est induit par la multiplication par $\sum_{k \in [H \setminus K]} k$. Il est facile de vérifier que cette construction est un foncteur de Mackey. De même, par un argument de décalage, on peut montrer que les foncteurs dérivés gauches $H_n(-, V)$ sont des foncteurs de Mackey.

Proposition 3.2.5 ([38] ou [39]). • *La construction $FP_- : V \mapsto FP_V$ est un foncteur de $RG\text{-Mod}$ vers $Mack_R(G)$.*

- *La construction $ev_1 : M \mapsto M(1)$ est un foncteur de $Mack_R(G)$ vers $RG\text{-Mod}$.*
- *Le couple (ev_1, FP_-) est un couple de foncteurs adjoints.*

Démonstration. Soient V et W deux RG -modules et soit $f : V \rightarrow W$ un morphisme de RG -modules. Alors $FP_f(H) : V^H \rightarrow W^H$ est simplement la restriction de f à V^H . Il est facile de vérifier que $f(V^H) \subseteq W^H$. Il est alors clair que $V \mapsto FP_V$ est un foncteur de $RG\text{-Mod}$ vers $Mack_R(G)$. De même si M et N sont des foncteurs de Mackey et $f : M \rightarrow N$ est un morphisme de foncteurs de Mackey alors $ev_1(f) = f(1)$ est un morphisme de RG -modules de $M(1) \rightarrow N(1)$. La dernière partie se trouve détaillée dans [39]. \square

Une seconde définition des foncteurs de Mackey a été donnée par Dress dans [13]. Cette définition utilise le formalisme des catégories et des foncteurs bivariants. La définition de Green est assez technique et assez lourde à utiliser dans la pratique, en particulier à cause de l'utilisation de représentants de doubles classes. L'avantage de la définition de Dress est qu'elle est beaucoup plus canonique, en particulier elle encode toutes les informations de la première définition, y compris la formule de Mackey, en deux assertions. La plupart du temps on privilégiera cette définition.

Définition 3.2.6. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux catégories. Un *foncteur bivariant* M de \mathcal{A} vers \mathcal{B} est un couple de foncteurs (M^*, M_*) où M_* (resp. M^*) est un foncteur covariant (resp. contravariant) de \mathcal{A} vers \mathcal{B} tels que l'image des objets de \mathcal{A} par ces deux foncteurs coïncident. Pour un objet X de \mathcal{A} , on note $M(X) := M^*(X) = M_*(X)$.

3.2. Foncteurs de Mackey, différentes définitions.

Définition 3.2.7. Un *foncteur de Mackey* pour G sur R est un foncteur bivariant $M = (M^*, M_*)$ de la catégorie G -ens des G -ensembles finis vers la catégorie R -Mod des R -modules, tel que

- Soient X et Y deux G -ensembles, i_X et i_Y les injections canoniques de X (resp. Y) dans $X \sqcup Y$, alors $(M^*(i_X), M^*(i_Y))$ et $(M_*(i_X), M_*(i_Y))$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre entre $M(X) \oplus M(Y)$ et $M(X \sqcup Y)$.
- Si

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ \downarrow b & & \downarrow c \\ Z & \xrightarrow{d} & T \end{array}$$

est un carré cartésien de G -ensembles, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M(X) & \xleftarrow{M^*(a)} & M(Y) \\ M_*(b) \downarrow & & \downarrow M_*(c) \\ M(Z) & \xleftarrow{M^*(d)} & M(T) \end{array}$$

est commutatif.

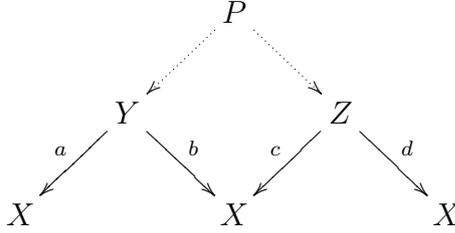
Un morphisme entre foncteurs de Mackey est une transformation naturelle de foncteurs bivariants. On a alors une catégorie de foncteurs de Mackey notée à nouveau $Mack_R(G)$.

Définition 3.2.8. Soit X un G -ensemble fini. La catégorie des *G -ensembles au dessus de X* est la catégorie dont les objets sont les couples (Y, ϕ) où Y est un G -ensemble fini et $\phi : Y \rightarrow X$ est un morphisme de G -ensembles. Un morphisme f de (Y, ϕ) vers (Z, ψ) est un morphisme de G -ensembles de Y vers Z tel que $\psi \circ f = \phi$.

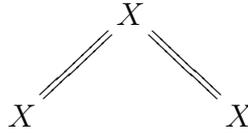
Exemple 3.2.9. Le foncteur de Burnside sur \mathbb{Z} évalué en X est le groupe de Grothendieck de la catégorie des G -ensembles au dessus de X pour les relations données par unions disjointes. Ceci donne un foncteur de Mackey sur R après avoir étendu les scalaires depuis \mathbb{Z} , que l'on note RB . S'il n'y a pas de confusion possible on le note simplement B .

Soit X un G -ensemble. L'évaluation du foncteur de Burnside en $X \times X$ est munie d'une structure d'anneau. En effet $B(X^2)$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie des G -ensembles au dessus de $X \times X$. Le produit des (classes d'isomorphisme des) éléments $(X \xleftarrow{a} Y \xrightarrow{b} X)$ et $(X \xleftarrow{c} Z \xrightarrow{d} X)$ est

le (la classe d'isomorphisme du) produit fibré le long de b et c :



L'identité de l'anneau est (la classe d'isomorphisme de) :



Exemple 3.2.10. Soit V un RG -module, le foncteur de point fixe FP_V est naturellement défini au sens de Green. Pour étendre la définition au sens de Dress, on remarque que pour $H \leq G$, on a :

$$FP_V(H) := V^H \cong \text{Hom}_{RG}(RG/H, V).$$

Pour un G -ensemble X , on définit donc $FP_V(X)$ par

$$FP_V(X) \cong \text{Hom}_{RG}(RX, V).$$

Une autre définition des foncteurs de Mackey a été donnée par Lindner dans [21]. Elle utilise une catégorie de “spans”, une notion qui a été introduite par Yoneda dans [42] et généralisée par Bénabou dans [2]. Cette définition est très similaire à celle de Dress, mais n'utilise pas de foncteurs bivariants.

Définition 3.2.11. Soit $S_{G,R}$ la catégorie dont les objets sont les G -ensembles finis et les morphismes sont donnés par : $\text{Hom}_{S_{G,R}}(X, Y) = RB(Y \times X)$. Le groupe de Burnside des G -ensembles au dessus de $Y \times X$.

Définition 3.2.12. Un *foncteur de Mackey* est un foncteur covariant R -linéaire de $S_{G,R}$ vers $R\text{-Mod}$.

Remarque 3.2.13. Avec cette définition, le foncteur de Burnside est le foncteur de Yoneda Y_\bullet pris sur le G -ensemble trivial \bullet : soit X un G -ensemble, alors $Y_\bullet(X) = \text{Hom}_{S_{G,R}}(X, \bullet) = RB(X \times \bullet) \cong RB(X)$. Les autres foncteurs de Yoneda de cette catégorie sont importants et seront exhibés dans la troisième section de ce chapitre à l'aide de la construction de Dress.

3.2. Foncteurs de Mackey, différentes définitions.

La dernière définition des foncteurs de Mackey utilisée dans ce document est due à Thévenaz et Webb dans [38] et elle utilise l'algèbre de Mackey de G . Elle permet de faire apparaître des liens très forts entre la théorie des foncteurs de Mackey et la théorie des représentations des groupes finis.

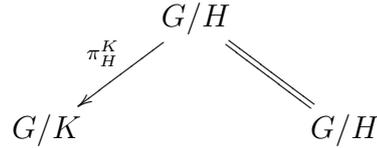
Définition 3.2.14. L'algèbre de Mackey pour G sur R est l'algèbre associative unitaire ayant pour générateurs t_H^K , r_H^K et $c_{g,H}$ pour $H \leq K \leq G$ et $g \in G$, avec les relations :

- $\sum_{H \leq G} t_H^H = 1_{\mu_R(G)}$.
- $t_H^H = r_H^H = c_{h,H}$ pour $H \leq G$ et $h \in H$.
- $t_K^L t_H^K = t_H^L$, $r_H^K r_K^L = r_H^L$ pour $H \subseteq K \subseteq L$.
- $c_{g',gH} c_{g,H} = c_{g',g,H}$, pour $H \leq G$ et $g, g' \in G$.
- $t_{gH}^g c_{g,H} = c_{g,K} t_H^K$ et $r_{gH}^g c_{g,K} = c_{g,H} r_H^K$, $H \leq K$, $g \in G$.
- $r_L^H t_K^H = \sum_{h \in [L \setminus H/K]} t_{L \cap^h K}^L c_{h, L^h \cap H} r_{L^h \cap H}^K$ pour $L \leq H \geq K$.
- Tous les autres produits de générateurs sont nuls.

Définition 3.2.15. La catégorie des *foncteurs de Mackey* est la catégorie des modules à gauche sur l'algèbre de Mackey $\mu_R(G)$.

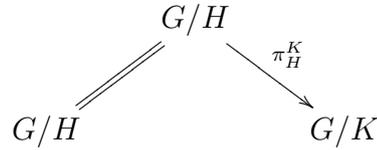
Lemme 3.2.16 ([6]). *L'algèbre de Mackey $\mu_R(G)$ est isomorphe à $RB(\Omega_G^2)$, l'anneau de Burnside des G -ensembles au dessus de Ω_G^2 , où $\Omega_G = \bigsqcup_{H \subseteq G} G/H$. Le produit dans cet anneau est le produit donné dans l'exemple 3.2.9.*

Démonstration. On définit de façon explicite un isomorphisme β sur les générateurs de $\mu_R(G)$: $\beta(t_H^K) :=$

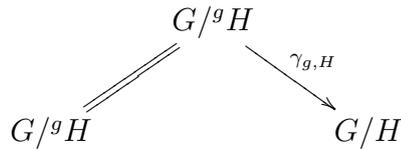


où $\pi_H^K : G/H \rightarrow G/K$ est la projection canonique.

De même $\beta(r_H^K) :=$



et $\beta(c_{g,H}) :=$



où $\gamma_{g,H}(x {}^gH) = xgH$. On peut facilement vérifier que ceci donne un isomorphisme d'algèbres. \square

Le résultat suivant est bien connu des spécialistes. Dans la suite de ce document, on va utiliser la démonstration de façon intensive.

Théorème 3.2.17. *Les quatre définitions 3.2.1, 3.2.7, 3.2.12 et 3.2.15 sont équivalentes.*

Démonstration. 1 \rightarrow 2 : Soit M_1 un foncteur de Mackey au sens de Green. On va construire un foncteur de Mackey M_2 au sens de Dress. Soit X un G -ensemble fini. Le groupe G agit sur $\bigoplus_{x \in X} M_1(G_x)$ (où G_x est le stabilisateur de x) par permutation des composantes. On pose alors $M_2(X) = \left(\bigoplus_{x \in X} M_1(G_x) \right)^G$. $M_2(X)$ est donc la donnée de $\forall x \in X, u_x \in M(G_x)$ tel que $\forall g \in G, g.u_x = u_{gx}$. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de G -ensembles. On va définir les morphismes $M_2(f)^*$ et $M_2(f)_*$. Soit $u \in \left(\bigoplus_{x \in X} M_1(G_x) \right)^G$,

$$(M_2(f)_*(u))_{y \in Y} := \sum_{x \in [G_y \setminus f^{-1}(y)]} t_{G_x}^{G_y} u_x. \quad (3.1)$$

Soit $v \in \left(\bigoplus_{y \in Y} M_1(G_y) \right)$,

$$(M_2(f)^*(v))_{x \in X} := r_{G_x}^{G_{f(x)}} v_{f(x)}. \quad (3.2)$$

On peut vérifier que ces constructions sont bien définies et que M_2 est un foncteur de Mackey au sens de Dress.

2 \rightarrow 3 : Ce passage est nettement plus facile. On définit M_3 au sens de Lindner de la façon suivante : pour un G -ensemble X , on pose $M_3(X) := M_2(X)$.

Soit $\phi := (Y \xleftarrow{b} X \xrightarrow{a} X)$ un G -ensemble au dessus de $Y \times X$, alors $M_3(\phi) = M_2(b)_* \circ M_2(a)^*$. On peut vérifier que cette construction s'étend par linéarité au groupe de Grothendieck $RB(Y \times X)$ et que M_3 est un foncteur. Pour cela on utilise l'axiome du diagramme cartésien.

3 \rightarrow 4 : On va construire un module M_4 sur l'algèbre de Mackey $\mu_R(G)$. Pour cela on évalue en Ω_G : on pose $M_4 := M_3(\Omega_G)$. Ceci donne un module pour $End_{S_{G,R}}(\Omega_G) = RB(\Omega_G \times \Omega_G) = RB(\Omega_G^2) \cong \mu_R(G)$.

4 \rightarrow 1 : On définit $M_1(H) := t_H^H M_4$. Les morphismes d'induction, restriction et conjugaison sont obtenus en multipliant par les générateurs de l'algèbre de Mackey correspondants. \square

3.3. Quelques foncteurs entre catégories de Mackey.

Dans la suite, on note abusivement $Mack_R(G)$ les différentes catégories des foncteurs de Mackey. On précisera la catégorie choisie si une confusion est possible.

3.3 Quelques foncteurs entre catégories de Mackey.

Pour construire des foncteurs entre catégories de foncteurs de Mackey, la définition la plus naturelle est, souvent, celle de Dress. En effet, pour Dress un foncteur de Mackey pour le groupe fini G sur l'anneau R est un foncteur bivariant de G -ens vers R -Mod avec des propriétés additionnelles. Soit H un groupe fini et F un foncteur de H -ens vers G -ens. Soit M un foncteur de Mackey pour G . La pré-composition de M par F produit un foncteur bivariant de H -ens vers R -Mod.

$$H\text{-ens} \xrightarrow{F} G\text{-ens} \xrightarrow{M} R\text{-Mod}.$$

Bien sûr, en général cette construction ne donne pas un foncteur de Mackey. Pour que cette composée soit un foncteur de Mackey, une condition suffisante sur le foncteur F est que F ait les deux propriétés suivantes :

1. Le foncteur F est un foncteur additif dans le sens suivant : soient X et Y deux H -ensembles finis. Soient i_X (resp. i_Y) le morphisme canonique de X (resp. Y) vers $X \sqcup Y$. Alors $F(i_X) \sqcup F(i_Y) : F(X) \sqcup F(Y) \rightarrow F(X \sqcup Y)$ est un isomorphisme de G -ensembles.
2. Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ \downarrow b & & \downarrow c \\ Z & \xrightarrow{d} & T \end{array}$$

un diagramme cartésien de H -ensembles. Alors

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(a)} & F(Y) \\ \downarrow F(b) & & \downarrow F(c) \\ F(Z) & \xrightarrow{F(d)} & F(T) \end{array}$$

est un diagramme cartésien de G -ensembles.

Il est évident que si M est un foncteur de Mackey pour G et F est un foncteur de H -ens vers G -ens qui possède ces deux propriétés, alors $M \circ F$

est un foncteur de Mackey pour H . Serge Bouc a caractérisé les foncteurs entre catégories d'ensembles munis d'une action de groupe qui possèdent ces deux propriétés ([4]). Ils sont caractérisés par les G - H bi-ensembles :

Théorème 3.3.1 (Bouc). *Soient G et H deux groupes finis. Soit F un foncteur entre les catégories H -ens et G -ens qui possède les propriétés 1 et 2. Alors il existe un G - H -bi-ensemble fini U unique à isomorphisme près, tel que F est isomorphe au foncteur $X \mapsto U \circ_H X$, où $U \circ_H X := H \setminus \{(u, x) \in U \times X \mid \forall h \in H, uh = u \Rightarrow hx = x\}$. Inversement, si U est un (G, H) -bi-ensemble fini, alors le foncteur $X \mapsto U \circ_H X$ possède les propriétés 1 et 2.*

3.3.1 Induction, restriction et isomorphismes.

Soit $H \leq G$ et soit $U = {}_H G_G$ le H - G -bi-ensemble G avec action

$$h.x.g = hxg \text{ pour } h \in H \text{ et } (x, g) \in G \times G.$$

On a alors un foncteur G -ens vers H -ens, qui envoie le G -ensemble X sur $G \circ_G X$. Or

$$\begin{aligned} G \circ_G X &:= G \setminus \{(g, x) \in G \times X \mid \forall g' \in G, g.g' = g \Rightarrow g'x = x\} \\ &= G \setminus \{(g, x) \in G \times X\} \\ &= G \times_G X \\ &\cong \text{Res}_H^G(X). \end{aligned}$$

Donc le foncteur $X \mapsto G \circ_G X$ est le foncteur $\text{Res}_H^G : G\text{-ens} \rightarrow H\text{-ens}$. La pré-composition par U induit un foncteur que l'on appelle induction : $\text{Ind}_H^G : \text{Mack}_R(H) \rightarrow \text{Mack}_R(G)$. Autrement dit, si M est un foncteur de Mackey pour H sur G et si Y est un G -ensemble, alors

$$\text{Ind}_H^G(M)(Y) = M(\text{Res}_H^G(Y)).$$

De même, considérons le G - H -bi-ensemble ${}_G G_H$ avec action $g.x.h = gxh$ pour $(g, x) \in G \times G$ et $h \in H$. Le foncteur $U \circ_H - : H\text{-ens} \rightarrow G\text{-ens}$ est isomorphe au foncteur Ind_H^G . La pré-composition par ce bi-ensemble induit un foncteur de $\text{Mack}_R(G)$ vers $\text{Mack}_R(H)$, ce foncteur est appelé foncteur de restriction et noté Res_H^G .

Remarque 3.3.2. Ces deux constructions sont naturelles lorsque l'on travaille avec la définition de Dress des foncteurs de Mackey. Si l'on utilise la notion

3.3. Quelques foncteurs entre catégories de Mackey.

de Green, en utilisant l'équivalence de catégories du théorème 3.2.17, on obtient les constructions de Sasaki ([34]) : soit M un foncteur de Mackey pour le groupe G sur l'anneau R au sens de Green. Soit $K \leq H$, alors $(Res_H^G M)(K) = M(K)$. En effet :

$$\begin{aligned} (Res_H^G M)(K) &= (Res_H^G M)(H/K) \\ &= M(Ind_H^G(H/K)) \\ &= M(G/K) \\ &= M(K), \end{aligned}$$

en notant abusivement “ M ” pour le foncteur de Mackey M au sens de Green *et* au sens de Dress. Pour le foncteur d'induction le résultat est beaucoup moins canonique. Soit N un foncteur de Mackey pour le groupe H et $K \leq G$. Alors

$$(Ind_H^G N)(K) = \bigoplus_{g \in [K \backslash G/H]} N(H \cap K^g).$$

En effet,

$$\begin{aligned} (Ind_H^G N)(K) &= N(Res_H^G(G/K)) \\ &\cong N\left(\bigsqcup_{g \in [K \backslash G/H]} H/H \cap K^g\right) \\ &\cong \bigoplus_{g \in [K \backslash G/H]} N(H/H \cap K^g) \\ &\cong \bigoplus_{g \in [K \backslash G/H]} N(H \cap K^g) \end{aligned}$$

Il reste alors à définir ce que sont les morphismes de transfert, de restriction et de conjugaison, ce que nous ne ferons pas ici puisqu'on ne va jamais utiliser l'induction des foncteurs de Mackey au sens de Green. Pour définir proprement ces applications il faut faire attention au choix des systèmes de représentants. On peut trouver ceci dans le chapitre de rappels de ([23]).

Le résultat suivant, bien qu'élémentaire, est très utile :

Lemme 3.3.3. *Soit V un RG -module et H un sous-groupe de G . Soit W un RH -module. Alors $Res_H^G FP_V \cong FP_{Res_H^G(V)}$ et $Ind_H^G FP_W \cong FP_{Ind_H^G(W)}$.*

Démonstration. Soit X un H -ensemble, alors

$$\begin{aligned}
 \text{Res}_H^G(FP_W)(X) &= FP_W(\text{Ind}_H^G(X)) \\
 &= \text{Hom}_{RG}(R\text{Ind}_H^G X, W) \\
 &\cong \text{Hom}_{RG}(\text{Ind}_H^G(RX), W) \\
 &\cong \text{Hom}_{RH}(RX, \text{Res}_H^G(W)) \\
 &= FP_{\text{Res}_H^G(W)}(X).
 \end{aligned}$$

Cet isomorphisme est fonctoriel. De même on démontre que $\text{Ind}_H^G FP_V \cong FP_{\text{Ind}_H^G(V)}$. \square

Proposition 3.3.4 ([40]). *Le foncteur $\text{Res}_H^G : \text{Mack}_R(G) \rightarrow \text{Mack}_R(H)$ est adjoint à droite et à gauche du foncteur $\text{Ind}_H^G : \text{Mack}_R(H) \rightarrow \text{Mack}_R(G)$.*

Démonstration. La démonstration se trouve dans [40]. L'idée de la démonstration est la suivante, les foncteurs d'induction et de restriction pour les catégories de foncteurs de Mackey sont induits par les foncteurs d'induction et de restriction pour les catégories de G -ensembles. L'induction est alors adjointe à gauche de la restriction. On utilise le fait que les foncteurs de Mackey, au sens de Dress, sont des foncteurs bivariants pour construire une adjonction à gauche et à droite. \square

Remarque 3.3.5. Les foncteurs d'induction et de restriction étant exacts, ils envoient les foncteurs de Mackey projectifs sur des foncteurs de Mackey projectifs.

En corollaire, on a le lemme suivant.

Lemme 3.3.6. *Soient $H \leq G$ et M un foncteur de Mackey au sens de Green pour G sur l'anneau R . Alors $(\text{Res}_H^G M)(1) \cong \text{Res}_H^G(M(1))$ en tant que RH -modules. Soit N un foncteur de Mackey pour H sur R , alors*

$$(\text{Ind}_H^G N)(1) \cong \text{Ind}_H^G(N(1)) \text{ comme } RG\text{-modules.}$$

Démonstration. Soit M un foncteur de Mackey pour le groupe H et V un RG -module, alors on a des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{RG}((\text{Ind}_H^G(M))(1), V) &\cong \text{Hom}_{\text{Mack}_R(G)}(FP_{(\text{Ind}_H^G M(1))}, FP_V) \\
 &\cong \text{Hom}_{\text{Mack}_R(G)}(\text{Ind}_H^G FP_{M(1)}, FP_V) \\
 &\cong \text{Hom}_{\text{Mack}_R(H)}(FP_{M(1)}, \text{Res}_H^G FP_V) \\
 &\cong \text{Hom}_{\text{Mack}_R(H)}(FP_{M(1)}, FP_{\text{Res}_H^G(V)}) \\
 &\cong \text{Hom}_{RH}(M(1), \text{Res}_H^G(V)) \\
 &\cong \text{Hom}_{RG}(\text{Ind}_H^G(M(1)), V).
 \end{aligned}$$

Donc $\text{Ind}_H^G(M)(1) \cong \text{Ind}_H^G(M(1))$. De même pour la restriction. \square

3.3. Quelques foncteurs entre catégories de Mackey.

Soient G et G' deux groupes finis et $\phi : G' \rightarrow G$ un isomorphisme de groupes. Considérons le G - G' -bi-ensemble ${}_G G_{G'}$ avec l'action $g.x.g' = gx\phi(g')$ pour $(g, x) \in G \times G$ et $g' \in G'$. Ce bi-ensemble induit un foncteur $Mack_R(G) \rightarrow Mack_R(G')$ noté $Iso(\phi)$. Dans le cas particulier où H et K sont des sous-groupes de G et où l'isomorphisme $\phi : H \rightarrow K$ est induit par la conjugaison par un élément $g \in G$, c'est-à-dire $\phi(h) = ghg^{-1}$ pour $h \in H$. Soit $M \in Mack_R(K)$, on note $Iso(\phi)(M) = Iso(g)(M) := {}^g M \in Mack_R(H)$.

Remarque 3.3.7. Il y a donc une formule de Mackey pour les foncteurs de Mackey. Plus précisément, soit G un groupe fini et soient H, K des sous-groupes de G . Soit $M \in Mack_R(K)$, alors

$$Res_H^G Ind_K^G M \cong \bigoplus_{g \in [H \backslash G / K]} Ind_{H \cap {}^g K}^H Iso(g^{-1}) Res_{H \cap {}^g K}^K M.$$

3.3.2 Foncteur d'inflation.

Soit $N \leq G$ un sous-groupe normal. Soit $\pi_N : G \rightarrow G/N$ la projection canonique. On considère le G/N - G -ensemble G/N avec action $gN.x.g' = gNx\pi_N(g')$ pour $(g, g') \in G \times G$ et $x \in G/N$. Ce bi-ensemble induit un foncteur $Inf_{G/N}^G : Mack_R(G/N) \rightarrow Mack_R(G)$ appelé inflation. Soit X un G -ensemble, alors

$$G/N \circ_G X := G \backslash \{ (gN, x) \in G/N \times X ; \forall g' \in G, xNg'N = xN \Rightarrow g'.x = x \} \\ \cong X^N.$$

Autrement dit, si M est un foncteur de Mackey pour G/N sur R , alors $(Inf_{G/N}^G M)(X) = M(X^N)$.

Remarque 3.3.8. Soient M un foncteur de Mackey au sens de Green pour G/N et H un sous-groupe de G . Alors

$$\begin{aligned} (Inf_{G/N}^G M)(H) &= Inf_{G/N}^G(M)(G/H) \\ &= M((G/H)^N) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } N \not\leq H \\ M(G/N/H/N) & \text{si } N \leq H \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } N \not\leq H \\ M(H/N) & \text{si } N \leq H \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a une formule générale pour exprimer les adjoints à gauche et à droite de la pré-composition par un bi-ensemble. Cependant la formule est

légèrement technique (voir [6]), et dans ce cas précis il est assez facile d'exprimer les adjoints. Pour l'adjoint à droite voir [40].

Soit $M \in \text{Mack}_R(G/N)$ au sens de Dress. On va construire un foncteur noté $M \rightarrow M^N$ qui est adjoint à gauche du foncteur $\text{Inf}_{G/N}^G$. Ce foncteur est appelé *N-construction*, où foncteur de points fixes par N , où encore le foncteur $+$ dans [39].

Soit X un G/N -ensemble, alors

$$M^H(X) := M(\text{Inf}_{G/N}^G X) / \sum M_*(f)(M(Y)),$$

où la somme est sur les couples (Y, f) où Y est un G -ensemble fini tel que $Y^N = \emptyset$ et f est un morphisme de Y vers $\text{Inf}_{G/N}^G(X)$.

Proposition 3.3.9 ([40] au sens de Green.). *Le foncteur $M \rightarrow M^N$ est adjoint à gauche du foncteur $\text{Inf}_{G/N}^G$.*

La N -construction est plus naturelle lorsqu'on l'exprime dans le sens de Green. Soit M un foncteur de Mackey au sens de Green pour G et K/N un sous-groupe de G/N .

$$M^N(K/N) = M(K) / \sum_{N \not\leq J \leq K} t_J^K(M(J)).$$

Le foncteur $M \mapsto M^N$ peut-être généralisé au cas où N n'est pas normal dans G . Soit $Q \leq G$, alors le foncteur

$$M \rightarrow (\text{Res}_{N_G(Q)}^G M)^Q : \text{Mack}_R(G) \rightarrow \text{Mack}_R(N_G(Q)/Q)$$

est adjoint à gauche du foncteur $\text{Ind}_{N_G(Q)}^G \text{Ind}_{N_G(Q)}^{N_G(Q)}$. Si aucune confusion n'est possible, on note simplement par $M \rightarrow M^Q$ ce foncteur.

3.3.3 Construction de Dress.

Soit Z un G -ensemble fini. Considérons le G - G -bi-ensemble $\tilde{Z} := \text{Ind}_{\Delta(G)}^{G \times G} Z = (G \times G) \times_{\Delta(G)} Z$ où $\Delta(G) := \{(g, g) \in G \times G ; g \in G\}$ est le sous-groupe diagonal. Soit X un G -ensemble fini, alors

$$\begin{aligned} \tilde{Z} \circ_G X &:= ((G \times G) \times_{\Delta(G)} Z) \circ_G X \\ &\cong (\text{Ind}_{\Delta(G)}^{G \times G} Z) \times_G X \\ &\cong Z \times X, \end{aligned}$$

3.4. Décomposition de la catégorie $Mack_R(G)$ induite par l'anneau de Burnside.

avec action diagonale. Le foncteur induit par ce bi-ensemble est en endofoncteur de la catégorie $Mack_R(G)$ appelé *construction de Dress*. Il est noté $M \mapsto M_Z$. Soit $M \in Mack_R(G)$ et X un G -ensemble fini, alors

$$M_Z(X) = M(Z \times X).$$

Lemme 3.3.10. *La construction de Dress est un foncteur auto-adjoint.*

Démonstration. [6] page 65. □

3.4 Décomposition de la catégorie $Mack_R(G)$ induite par l'anneau de Burnside.

Il y a un morphisme d'anneaux unitaires de l'anneau de Burnside vers le centre de l'algèbre de Mackey, qui induit une décomposition de la catégorie $Mack_R(G)$. Il a été exhibé par Thévenaz et Webb dans les sections 8 et 9 de [38]. Pour un point de vue plus fonctoriel, on utilise la notion de centre d'une catégorie.

3.4.1 Le centre d'une catégorie.

Théorème 3.4.1 (Lemme de Yoneda). *Soit \mathcal{C} une catégorie pré-additive. Soit $P \in Ob(\mathcal{C})$ et Y_P le foncteur de Yoneda. C'est-à-dire $Y_P(X) = Hom_{\mathcal{C}}(P, X)$ pour $X \in Ob(\mathcal{C})$. C'est un foncteur additif de \mathcal{C} vers $\mathbb{Z}\text{-Mod}$. Soit F un foncteur additif de \mathcal{C} vers $\mathbb{Z}\text{-Mod}$. Alors, on a un isomorphisme de groupes abéliens*

$$Nat(Y_P, F) \cong F(P),$$

Où $Nat(Y_P, F)$ est constitué des transformations naturelles de Y_P vers F .

Démonstration. Si $T \in Nat(Y_P, F)$, alors $T_P(Id_P) \in F(P)$. Inversement si $x \in F(P)$, on construit une transformation naturelle S comme suit : soit $B \in Ob(\mathcal{C})$ et $f \in Hom_{\mathcal{C}}(P, B)$ alors $T_B(f) = F(f)(x)$. □

Définition 3.4.2. Soit \mathcal{C} une catégorie additive 'petite'. Le *centre* de la catégorie \mathcal{C} est $End(Id_{\mathcal{C}})$: les endomorphismes du foncteur identité de la catégorie \mathcal{C} .

Cette notion généralise bien celle du centre d'un anneau car :

Proposition 3.4.3. *Soit R un anneau, alors le centre de la catégorie $R\text{-Mod}$ est isomorphe au centre de R .*

Démonstration. Si α est un endomorphisme du foncteur identité de la catégorie $R\text{-Mod}$, alors α_R est un endomorphisme de R . Mais comme α est une transformation naturelle, si f est un morphisme de R dans R , alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\alpha_R} & R \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ R & \xrightarrow{\alpha_R} & R. \end{array}$$

Avec ces diagrammes, on démontre que $\alpha_R(1) \in Z(R)$.

Inversement si $z \in Z(R)$, on peut construire un endomorphisme m_z du foncteur identité de la catégorie des R -modules de la façon suivante : soit V un R -module, alors $m_z(V)$ est la multiplication par z : soit $v \in V$, alors $m_z(V)(v) = zv$. Les constructions $\alpha \rightarrow \alpha_R(1) \in Z(R)$ et $z \in Z(R) \rightarrow m_z$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. \square

3.4.2 Morphisme de $B(G)$ vers le centre de $\text{Mack}_R(G)$.

Dans la suite de cette section, on se place dans le point de vue de Dress. Soit $M \in \text{Mack}_R(G)$ et soient X et D deux G -ensembles. On note $\begin{pmatrix} x, d \\ x \end{pmatrix}$ le morphisme de $X \times D \rightarrow X$ qui envoie (x, d) sur x . On pose

$$\Phi_{D,M,X} := M_* \begin{pmatrix} x, d \\ x \end{pmatrix} \circ M^* \begin{pmatrix} x, d \\ x \end{pmatrix} : M(X) \rightarrow M(X).$$

On peut alors démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.4.4. 1. $X \rightarrow \Phi_{D,M,X}$ est un endomorphisme $\Phi_{D,M}$ du foncteur de Mackey M .

2. $\Phi_D : M \rightarrow \Phi_{D,M}$ est un endomorphisme du foncteur identité de $\text{Mack}_R(G)$.

Donc $\Phi_D \in Z(\text{Mack}_R(G))$, et cet élément possède les propriétés suivantes : soient D_1 et D_2 deux G -ensembles.

- $\Phi_{D_1 \sqcup D_2} = \Phi_{D_1} + \Phi_{D_2}$.
- $\Phi_{D_1} \circ \Phi_{D_2} = \Phi_{D_1 \times D_2}$.
- Si $D_1 \cong D_2$, alors $\Phi_{D_1} = \Phi_{D_2}$.

Théorème 3.4.5. Le morphisme $D \mapsto \Phi_D$ s'étend en un morphisme unitaire d'algèbres

$$\zeta : R \otimes_{\mathbb{Z}} B(G) \rightarrow Z(\text{Mack}_R(G)).$$

3.4. Décomposition de la catégorie $Mack_R(G)$ induite par l'anneau de Burnside.

Donc une décomposition de $1 \in B(G)$ en somme d'idempotents centraux orthogonaux e et f induit une décomposition

$$Mack_R(G) \cong \zeta(e)(Mack_R(G)) \oplus \zeta(f)(Mack_R(G)).$$

Les idempotents de l'anneau de Burnside sont bien connus : soit π un ensemble de nombre premiers et $\mathbb{Z}_{(\pi)} := \{\frac{a}{b}; p \in \pi \Rightarrow p \nmid b\}$.

Définition 3.4.6. Soit $H \leq G$. Le sous-groupe $O^{\pi,r}(H)$ est le plus petit sous-groupe de H tel que $H/O^{\pi,r}(H)$ soit un π -groupe résoluble. Le sous-groupe H est π -parfait si $H = O^{\pi,r}(H)$.

Théorème 3.4.7. 1. Les idempotents primitifs de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ sont les e_H^G pour $H \leq G$, à conjugaison près. Ils sont définis par

$$e_H^G := \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{K \leq H} |K| \mu(K, H) G/K.$$

2. Les idempotents primitifs de $\mathbb{Z}_{(\pi)} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ sont les f_H^G où H est un sous-groupe π -parfait de G , à conjugaison près. Ils sont définis par :

$$f_H^G = \sum_{K \in [s(G)]; O^{\pi,r}(K) =_G H} e_K^G.$$

où $[s(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de sous-groupes de G .

On a alors le théorème suivant, qui est une version généralisée du théorème 10.1 de [38] :

Théorème 3.4.8. Soient G un groupe fini et R un anneau commutatif. Soit π un ensemble de nombres premiers tel que,

$$\pi := \{p ; p \mid |G| \text{ et } p \notin R^\times\} \sqcup \{\text{des } p \text{ tq } p \nmid |G|\},$$

Alors,

$$Mack_R(G) \cong \bigoplus_{H \in [s(G)] ; H \text{ } \pi\text{-parfait}} \zeta(f_H^G) Mack_R(G).$$

1. Soit H un sous-groupe π -parfait de G . Les foncteurs

$$L \mapsto z(f_H^{N_G(H)}) Res_{N_G(H)}^G L : \zeta(f_H^G) Mack_R(G) \rightarrow \zeta(f_H^{N_G(H)}) Mack_R(N_G(H)),$$

et

$$M \mapsto Ind_{N_G(H)}^G M : \zeta(f_H^{N_G(H)}) Mack_R(N_G(H)) \rightarrow \zeta(f_H^G) Mack_R(G)$$

sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre.

2. Soit $H \leq G$ un sous-groupe normal. Les foncteurs

$$L \mapsto \zeta(f_1^{\overline{N}_G(H)})L^H : \zeta(f_H^G)Mack_R(G) \rightarrow \zeta(f_1^{\overline{N}_G(H)})Mack_R(\overline{N}_G(H))$$

et

$$Inf_{G/H}^G : \zeta(f_1^{\overline{N}_G(H)})Mack_R(\overline{N}_G(H)) \rightarrow \zeta(f_H^G)Mack_R(G)$$

sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre.

3.

$$Mack_R(G) \cong \bigoplus_{H \in [s(G)] ; H \text{ est } \pi\text{-parfait}} \zeta(f_1^{\overline{N}_G(H)})Mack_R(\overline{N}_G(H)).$$

Définition 3.4.9. On note $Mack_R(G, 1)$ la catégorie $\zeta(f_1^G)Mack_R(G)$. C'est la catégorie des foncteurs de Mackey π -locaux, ou des foncteurs de Mackey projectifs par rapport aux π -sous-groupes résolubles de G .

On utilisera principalement le cas $\pi = \{p\}$, dans ce cas on a :

Proposition 3.4.10. Soit G un groupe fini et R un anneau commutatif tel que : si $q \mid |G|$ est un nombre premier différent de p , alors q est inversible dans R . Dans ce cas, $Mack_R(G, 1) \cong \mu_R^1(G)\text{-Mod}$. Où $\mu_R^1(G)$ est la sous-algèbre de $\mu_R(G)$ engendrée par les r_Q^K, t_Q^K et $c_{g,Q}$ où $Q \leq K \leq G, g \in G$ et Q est un p -groupe.

Définition 3.4.11. L'algèbre $\mu_R^1(G)$ est l'algèbre de Mackey p -locale.

Remarque 3.4.12. Le théorème 3.4.8 permet de réduire l'étude de la catégorie $Mack_R(G)$ à l'étude des catégories $Mack_R(\overline{N}_G(H), 1)$ pour $H \leq G$. L'un des avantages de cette réduction est que cette catégorie possède de nombreuses propriétés intéressantes comme on va le voir dans la section suivante.

3.5 Foncteurs de Mackey simples.

Dans cette section, on suppose que $R = k$ est un corps de caractéristique p (pouvant être zéro). Les foncteurs de Mackey simples pour G sur k ont été décrits par Thévenaz et Webb dans [40]. Ils sont en bijection avec les couples (H, V) où H parcourt les sous-groupes de G à conjugaison près et V parcourt les classes d'isomorphisme de $kN_G(H)/H$ -modules simples. Le foncteur simple associé au couple (H, V) est noté $S_{H,V}$.

Théorème 3.5.1 ([40]). • Si k est un corps, alors

$$S_{H,V} = Ind_{N_G(H)}^G Inf_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} S_{1,V}^{\overline{N}_G(H)},$$

3.6. Foncteurs de Mackey projectifs.

où $S_{1,V}^{\overline{N}_G(H)}$ est le sous-foncteur de FP_V défini par

$$S_{1,V}^{\overline{N}_G(H)}(K) = \text{Im}(tr_1^K : V \rightarrow V^K),$$

pour tout sous-groupe K de $\overline{N}_G(H)$.

- Si k est un corps de caractéristique zéro ou ne divisant pas l'ordre du groupe G , alors

$$S_{H,V} = \text{Ind}_{N_G(H)}^G \text{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FP_V.$$

Remarque 3.5.2. On peut définir les foncteurs de Mackey simples au sens de Dress de la façon suivante : soit H un sous-groupe de G et V un $kN_G(H)/H$ -module simple. Soit X un G -ensemble fini. Alors

$$S_{H,V}(X) \cong \text{Tr}_1^{\overline{N}_G(H)}(\text{Hom}_k(k[X^H], V)).$$

Pour une démonstration, voir chapitre 11. de [6].

Remarque 3.5.3. Ce théorème peut se démontrer de façon très générale en étudiant les représentations des catégories R -linéaires. L'avantage de cette approche est que la démonstration est sensiblement la même pour caractériser les foncteurs de Mackey simples, les modules simples dans les catégories de A -modules où A est un foncteur de Green, ainsi que les foncteurs à bi-ensembles simples. Ceci permet de construire un "paramétrage" des foncteurs simples, cependant la construction d'un "paramétrage" bijectif, qui repose sur un type d'unicité de groupes minimaux, ne semble pas s'appliquer au cas des A -modules où A est un foncteur de Green à bi-ensembles ([32] et [33]).

3.6 Foncteurs de Mackey projectifs.

On propose dans cette section une liste de résultats indispensables sur les foncteurs de Mackey projectifs. Suivant le cours donné par Serge Bouc à l'université de Picardie Jules Verne en 2013, on énonce les résultats d'une façon la plus générale possible. Les résultats les plus forts nécessitant par la même occasion des hypothèses fortes sur l'anneau R .

Soit G un groupe fini et R un anneau commutatif.

Proposition 3.6.1. *Soit D un G -ensemble fini. La construction de Dress RB_D du foncteur de Burnside en D est un foncteur de Mackey projectif.*

Démonstration. Avec la définition de Lindner des foncteurs de Mackey le foncteur RB_D est un foncteur de Yoneda $\text{Hom}_{\mathcal{S}_{G,R}}(-, D)$. Donc c'est un foncteur projectif. \square

Proposition 3.6.2. *Soit L un foncteur de Mackey pour G , alors il existe un ensemble I et pour $i \in I$, un G -ensemble fini X_i tel que L soit un quotient de $\bigoplus_{i \in I} RB_{X_i}$.*

Démonstration. C'est une conséquence de l'équivalence de catégories $Mack_R(G) \cong RB(\Omega_G^2)\text{-Mod}$. □

Corollaire 3.6.3. *Soit L un foncteur de Mackey de type fini, alors :*

- *il existe un G -ensemble fini X tel que L soit un quotient de RB_X .*
- *Si L est projectif, alors $L(1)$ est un RG -facteur de permutation.*

Démonstration. Si L est projectif, alors L est facteur direct de RB_X , donc $L(1)$ est facteur direct de $RB_X(1) = RX$. □

On va voir que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que chaque module de p -permutation est l'évaluation en 1 d'un foncteur de Mackey projectif, à condition de mettre de bonnes propriétés sur l'anneau R .

Soit $\pi := \{p ; p \mid |G| \text{ et } p \notin R^\times\} \sqcup \{\text{des } p \text{ tq } p \nmid |G|\}$.

Proposition 3.6.4. *Soit $L \in Mack_R(G, 1)$ un foncteur de Mackey projectif de type fini. Si $L(1) = 0$, alors $L = 0$.*

Question 3.6.5. *Soit $M \in Mack_R(G, 1)$. Le foncteur M est-il caractérisé par sa valeur en 1 ?*

La réponse à cette question est non en général, cependant, on va voir que si l'anneau R possède de bonnes propriétés, alors la réponse est positive.

Exemple 3.6.6. Soient $R = \mathbb{Z}$ et $\pi = \{p\}$, où p est un nombre premier. Soit $G = C_p$ le groupe cyclique d'ordre p . Dans ce cas, $f_1^G = 1 \in B(G)$. Soit $d \in \mathbb{Z}$ premier avec p . On note $A[d]$ le foncteur de Mackey défini par

- $A[d](1) = \mathbb{Z}$.
- $A[d](C_p) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- $t_1^{C_p}(1) = (0, 1)$.
- $r_1^{C_p}(a, b) = da + pb$.
- Les conjugaisons sont triviales.

Théorème 3.6.7 ([19]). *Les foncteurs $A[d]$ sont des foncteurs de Mackey projectifs et $A[d] \cong A[e]$ si et seulement si $d = \pm e(p)$.*

Démonstration. L'équivalence de la seconde assertion est facile à établir. Soient d et e des entiers premiers à p , alors on montre :

$$A[d] \oplus A[e] \cong A[1] \oplus A[de].$$

3.7. Blocs d'algèbres de Mackey p -locales.

Et finalement, $A[1] \cong B$, où B est le foncteur de Burnside. Comme d est premier à p , il existe un entier e tel que $e \times d = 1 \pmod{p}$. On a alors,

$$A[d] \oplus A[e] \cong A[1] \oplus A[1],$$

qui est un foncteur de Mackey projectif. \square

Donc si $p \geq 5$, il existe d et e premiers à p tel que $A[d]$ n'est pas isomorphe à $A[e]$, mais pourtant les valeurs en 1 de ces deux foncteurs sont des $\mathbb{Z}C_p$ -modules isomorphes au module trivial \mathbb{Z} .

Théorème 3.6.8. *[[38] théorème 12.7.] Soit $R = \mathcal{O}$ ou k . Alors l'application $M \mapsto M(1)$ induit une bijection entre les classes d'isomorphisme de foncteurs de Mackey projectifs indécomposables de $Mack_R(G, 1)$ et les classes d'isomorphisme de RG -modules de p -permutation indécomposables.*

Si $S_{H,V}$ est un foncteur de Mackey simple, alors on note $P_{H,V}$ la *couverture projective* de $S_{H,V}$. Il y a une notion de vortex pour les foncteurs de Mackey (voir [38] section 11). Le vortex d'un foncteur de Mackey projectif M de $Mack_R(G, 1)$ correspond au vortex du RG -module $M(1)$. Le groupe H est un vortex de $P_{H,V}$.

3.7 Blocs d'algèbres de Mackey p -locales.

Soient $R = \mathcal{O}$ ou k et G un groupe fini. On a vu dans le théorème 3.4.5 qu'il y a un morphisme d'anneaux unitaires ζ de $B(G)$ vers $Z(\mu_R(G))$. Ce morphisme étant unitaire, il envoie un idempotent de $B(G)$ vers un idempotent de $Z(\mu_R(G))$. C'est de cette façon que l'on peut décomposer la catégorie $Mack_R(G)$ en un produit de sous-catégories. Cependant les idempotents primitifs de $B(G)$ ne le restent pas dans $Z(\mu_R(G))$. Dans cette section, on donne une formule explicite pour les idempotents primitifs de $Z(\mu_R(G))$ en fonction des idempotents primitifs de $Z(RG)$. Les deux sections suivantes suivent [8].

3.7.1 Anneau de Burnside croisé.

Soit R un anneau commutatif et G un groupe fini.

Définition 3.7.1. La catégorie des G -ensembles croisés est la catégorie des G -ensembles au dessus de G^c , où G^c est le G -ensemble G avec action de G par conjugaison.

Définition 3.7.2. *L'anneau de Burnside croisé de G , noté $B(G)^c$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie des G -ensembles croisés pour les relations données les décompositions en union disjointe. Il est muni d'une structure d'anneau : soient (X, α) et (Y, β) des classes d'isomorphisme de G -ensembles croisés, alors $(X, \alpha) \times (Y, \beta) = (X \times Y, \alpha.\beta)$ où*

$$\alpha.\beta(x, y) = \alpha(x)\beta(y).$$

On montre que c'est un anneau commutatif.

Remarques. 1. L'anneau de Burnside croisé est donc l'évaluation du foncteur de Burnside sur le G -ensemble G^c .

2. On définit l'anneau de Burnside croisé sur R comme étant $RB(G)^c := R \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)^c$.

Lemme 3.7.3. *L'application β de $B(G)$ vers $B(G)^c$ définie par $X \mapsto (X, u_X)$, où u_X est le morphisme de G -ensembles de X vers G^c défini par $u_X(x) = 1$, pour tout $x \in X$, est un morphisme d'anneaux unitaires.*

Donc une décomposition de 1 en somme d'idempotents orthogonaux primitifs dans $B(G)$ induit une décomposition de 1 en somme d'idempotents deux à deux orthogonaux de $B(G)^c$. Soit $R = \mathcal{O}$ où k , alors :

Définition 3.7.4. *L'anneau de Burnside p -local est :*

$$\mathcal{A}(G) := \beta(f_1^G)(RB(G)^c).$$

Les idempotents de cet anneau ont été déterminés par Serge Bouc. Pour cela, on a besoin de quelques notations :

- Soient b un idempotent bloc de $Z(kG)$ et P un p -sous-groupe de G , alors $br_P^{\mathcal{O}}(b)$ est l'unique idempotent bloc de $Z(\mathcal{O}C_G(P))$ qui relève $br_P(b) \in kC_G(P)$. Les $br_P^{\mathcal{O}}(b)(g)$ sont les coefficients définis par :

$$br_P^{\mathcal{O}}(b) = \sum_{g \in G} br_P^{\mathcal{O}}(b)(g)g.$$

- Soit Q un sous-groupe de G et $g \in C_G(Q)$, alors $[Q, g]_G$ est la classe d'isomorphisme du G -ensemble croisé $(G/Q, m_g)$ où $m_g : G/Q \rightarrow G^c$ est le morphisme de G -ensembles défini par $m_g(xQ) := xgx^{-1}$.

Théorème 3.7.5 (Bouc). *Soit b un idempotent bloc de $Z(kG)$, alors*

$$b^{\mathcal{A}} := \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in G \\ Q \subseteq P \in \mathfrak{S}_p(C_G(g))}} |Q| \mu(Q, P) br_P^{\mathcal{O}}(b)(g) [Q, g]_G.$$

Les $b^{\mathcal{A}}$ sont des idempotents (centraux) primitifs de \mathcal{A} , et si b parcourt les blocs de kG , alors $b^{\mathcal{A}}$ parcourt un ensemble complet d'idempotents primitifs de \mathcal{A} .

3.7.2 Idempotents primitifs centraux de $\mu_R^1(G)$.

Pour déterminer les idempotents primitifs de $\mu_R^1(G)$, on utilise les idempotents primitifs de $\mathcal{A}(G)$ et le théorème suivant :

Théorème 3.7.6. *Soit (X, α) un G -ensemble croisé. Soient M un foncteur de Mackey pour G sur R et Y un G -ensemble fini. On pose*

$$\xi(X, \alpha)_{M,Y} = M_* \begin{pmatrix} x, y \\ \alpha(x)y \end{pmatrix} M^* \begin{pmatrix} x, y \\ y \end{pmatrix}.$$

Les $\xi(X, \alpha)_{M,Y}$ définissent une transformation naturelle du foncteur identité de $\text{Mack}_R(G)$, de plus : soient (X, α) et (Y, β) deux G -ensembles croisés, alors

1. $\xi(X \sqcup Y, \alpha \sqcup \beta) = \xi(X, \alpha) + \xi(Y, \beta)$.
2. $\xi(X, \alpha) \circ \xi(Y, \beta) = \xi(X \times Y, \alpha.\beta)$.
3. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} RB(G) & \xrightarrow{\phi} & Z(\mu_R(G)) \\ & \searrow \beta & \nearrow \xi \\ & RB^c(G) & \end{array} \quad (3.3)$$

On pose alors $b^\mu := \xi(b^A)$ et comme le diagramme 3.3 commute et $\mu_R^1(G) = \xi \circ \beta(f_1^G)\mu_R(G)$. Les idempotents de $RB(G)$ ne restent pas primitifs lorsqu'ils sont plongés dans $Z(\mu_R^1(G))$, mais l'anneau de Burnside croisé est légèrement plus gros que l'anneau de Burnside. Le petit miracle est que les idempotents primitifs de $RB(G)^c$ restent primitifs dans $Z(\mu_R^1(G))$.

Théorème 3.7.7. *Soit b un bloc idempotent de kG , alors*

$$b^\mu = \sum_{H \subseteq G} \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{Q \subset P \in \mathcal{S}_p(H) \\ x \in C_G(P)}} |Q| \mu(Q, P) br_P^Q(b)(x) t_{Q^x}^H c_{x, Q} r_Q^H.$$

Si b parcourt les blocs de kG , alors b^μ parcourt les idempotents primitifs centraux de $\mu_{\mathcal{O}}^1(G)$.

Définition 3.7.8. L'idempotent b^μ est appelé *idempotent bloc* de l'algèbre de Mackey p -locale. S'il n'y a pas de confusion possible, on note $\mu_{\mathcal{O}}^1(b)$ l'algèbre $\mu_{\mathcal{O}}^1(G)b^\mu$.

Remarque 3.7.9. Si b est un bloc de kG , on obtient un bloc b^μ de $\mu_{\mathcal{O}}^1(G)$. En appliquant le morphisme de réduction modulo \mathfrak{p} , on obtient un idempotent primitif central \overline{b}^μ de $\mu_k^1(G)$. Dans la suite, s'il n'y a pas de confusion possible, on note simplement b^μ cet idempotent après réduction modulo \mathfrak{p} et $\mu_k^1(b) := \mu_k^1(G)b^\mu$.

De même on note $Mack_R(b)$ la sous-catégorie de $Mack_R(G, 1)$ qui correspond à $\mu_R^1(b)\text{-Mod}$, pour $R = \mathcal{O}$ ou k .

Définition 3.7.10. Soit b un bloc de kG et D un groupe de défaut de b . Alors D est appelé groupe de défaut de b^μ .

Remarque 3.7.11. Cette définition peut-être justifiée de façon très précise en utilisant les foncteurs de Green. Voir la section 5.3 de [8].

Les blocs de la catégorie $Mack_R(G)$ ont été étudiés par J. Thévenaz et P. Webb dans [38]. Ils ont défini les blocs de la catégorie $Mack_R(G, 1)$ en utilisant le “linkage principle”. C’est-à-dire deux foncteurs de Mackey indécomposables sont dans le même bloc si et seulement si leurs facteurs de composition sont tous dans le même bloc. Ils ont ensuite caractérisé les foncteurs de Mackey simples qui appartiennent à un bloc donné :

Théorème 3.7.12 ([38]). *Soit G un groupe fini et $R = \mathcal{O}$ ou k . Soient $S_{H,V}$ et $S_{K,W}$ deux foncteurs de Mackey simples de $Mack_R(G, 1)$. Alors $S_{H,V}$ et $S_{K,W}$ sont dans le même bloc si et seulement si V est dans un bloc $RN_G(H)b_1$ et W est dans un bloc $RN_G(K)b_2$ tels que $b_1^G = b_2^G$.*

Remarques. • Les deux points de vue des théorèmes 3.7.12 et 3.7.7 sont bien sûr équivalents (Théorème 56.12 de [25]).

- Les deux points de vue sont intéressants et complémentaires. Le point de vue de Thévenaz et Webb est très utile pour avoir des renseignements généraux sur les blocs. Par exemple le nombre de foncteurs simples ou le vortex des projectifs indécomposables. Par contre il n’est pas raisonnable de l’utiliser pour savoir si un foncteur de Mackey est dans un bloc donné, puisque les facteurs de composition des foncteurs de Mackey projectifs sont très difficiles à calculer (voir [23] et [41]).
- Le point de vue de Bouc est très utile pour savoir si un foncteur de Mackey projectif est dans un bloc donné (voir ci-dessous), par contre il n’est pas très raisonnable d’espérer calculer explicitement l’action d’un bloc b^μ sur un $\mu_R^1(G)$ -module (voir chapitre suivant pour des exemples).
- La combinaison des deux points de vue fournit une machinerie très efficace pour étudier les modules de p -permutation indécomposables d’un bloc d’algèbre de groupe. (voir corollaire 3.7.14).

3.7. Blocs d'algèbres de Mackey p -locales.

La formule des blocs de $\mu_{\mathcal{O}}^1(G)$ est explicite, mais l'utilisation de cette formule est difficile : les algèbres de Mackey sont de dimension finie, mais cette dimension, qui dépend du nombre d'éléments du groupe, mais aussi du treillis des sous-groupes, est rapidement très grande (par exemple $\dim_k \mu_k(S_3) = 87$, et $\dim_k(\mu_k(S_4)) = 4252$) et rend les calculs inatteignables en temps raisonnable, que ce soit pour l'humain, mais aussi pour des machines. Cependant l'action d'un bloc b^μ sur l'évaluation en 1 d'un foncteur de Mackey M est donnée comme suit : soit $m \in M(1)$, alors

$$b^\mu.m = \sum_{H \subseteq G} \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{Q \subset P \in \mathcal{S}_p(H) \\ x \in C_G(P)}} |Q| \mu(Q, P) br_P^{\mathcal{O}}(b)(x) t_{Q^x}^H c_{x, Q} r_Q^H m \quad (3.4)$$

$$= \sum_{x \in G} br_1^R(b) c_{x, 1}(m). \quad (3.5)$$

C'est-à-dire l'action de l'idempotent bloc b sur le RG -module $M(1)$.

Comme les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables sont caractérisés par leur évaluation en 1, on a le résultat suivant :

Proposition 3.7.13. *1. Soit P un foncteur de Mackey projectif indécomposable de $Mack_R(G, 1)$ et b un bloc de RG . Alors P est dans le bloc b^μ si et seulement si le RG -module de p -permutation indécomposable $P(1)$ est dans le bloc b .*

2. Les classes d'isomorphisme de foncteurs de Mackey projectifs indécomposables d'un bloc b^μ sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de RG -modules de p -permutation indécomposables dans le bloc b .

Démonstration. D'après le théorème 3.6.8, les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables de $Mack_R(G, 1)$ sont en bijection avec les RG -modules de p -permutation indécomposables. Si Q est un autre foncteur de Mackey projectif indécomposable, alors $P \cong Q$ si et seulement si $P(1) \cong Q(1)$.

Un foncteur de Mackey projectif indécomposable P est dans un bloc b^μ si et seulement si $b^\mu P \neq 0$, mais $b^\mu P$ est projectif, donc :

$$\begin{aligned} b^\mu.P \neq 0 &\Leftrightarrow (b^\mu.P)(1) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow b.(P(1)) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow P(1) \text{ est dans le bloc } b \text{ de } RG \text{ par (3.5)}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.7.14. *Soit G un groupe fini et b un bloc de kG de défaut cyclique $D = C_{p^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a $(n + 1)e$ classes d'isomorphisme de*

modules de p -permutation indécomposables dans le bloc kGb , où e est l'indice d'inertie du bloc b . De façon plus précise, il y a e classes d'isomorphisme de modules de p -permutation indécomposables de vortex X pour $1 \leq X \leq D$.

Démonstration. D'après la proposition 3.7.13 les RG -modules de p -permutation indécomposables de $RGb\text{-Mod}$ sont en bijection avec les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables qui sont dans le bloc b^μ . Les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables dans le bloc b^μ sont en bijection avec les foncteurs de Mackey simples du bloc b^μ . D'après le théorème 3.7.12, un foncteur de Mackey simple $S_{H,V}$ est dans le bloc b^μ si le $RN_G(H)$ -module simple V est dans un bloc b' qui est le correspondant de Brauer de b dans $RN_G(H)$.

D'après le théorème de Dade (6.2.26) sur les blocs à défaut cyclique, il y a donc e classes d'isomorphisme de $S_{H,V}$ foncteurs simples dans le bloc b^μ , pour tout $H \leq D$. Le RG -module de p -permutation correspondant à un $S_{H,V}$ est $P_{H,V}(1)$, il est donc de vortex H . \square

3.8 Exemple d'équivalence entre blocs d'algèbres de Mackey p -locales.

On peut maintenant énoncer la problématique de la thèse. Soit G un groupe fini, p un nombre premier qui divise l'ordre de G . Soit (K, \mathcal{O}, k) un triplet p -modulaire, assez-gros pour G et $\overline{N}_G(P)$, pour P qui parcourt les p -sous-groupes de G . Soit $R = \mathcal{O}$ ou k et soit b un bloc de RG de défaut D . D'après le théorème 3.7.7 il existe un bloc b^μ de $\mu_R^1(G)$, de défaut D . D'après le premier "main theorem" de Brauer, il y a un unique bloc b' de $RN_G(D)$ de défaut D tel que $b'^G = b$. En utilisant à nouveau le théorème 3.7.7, on obtient un bloc b'^μ de $\mu_R^1(N_G(D))$ de défaut D . On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} b \in Z(RG) & \longrightarrow & b^\mu \in Z(\mu_R^1(G)) \\ \downarrow & & \\ b' \in Z(RN_G(D)) & \longrightarrow & b'^\mu \in Z(\mu_R^1(N_G(D))) \end{array}$$

Si le groupe de défaut D est abélien, il a été conjecturé par Broué qu'il existe un lien très profond entre RGb et $RN_G(D)b'$. Ce lien profond pouvant être une isométrie parfaite, une isotypie, ou encore une équivalence de Morita, ou une équivalence dérivée. Comme les notions d'isométrie parfaite et d'isotypie n'ont pas vraiment d'équivalent pour les foncteurs de Mackey, on se pose la question suivante :

3.8. Exemple d'équivalence entre blocs d'algèbres de Mackey p -locales.

Question 3.8.1. *Soient G un groupe fini et b un bloc de $\mathcal{O}G$ de groupe de défaut abélien D . Soit b' le correspondant de Brauer de b dans $N_G(D)$. Y a-t-il un lien entre $\mu_{\mathcal{O}}^1(b)\text{-Mod}$ et $\mu_{\mathcal{O}}^1(b')\text{-Mod}$?*

La question initialement posée par Serge Bouc portait sur l'existence, ou non, d'une équivalence dérivée entre $\mu_{\mathcal{O}}^1(b)$ et $\mu_{\mathcal{O}}^1(b')$. La question est, ici, volontairement énoncée de façon peu précise, puisque l'on sait que dans le cadre de la conjecture de Broué, il y a différents types d'équivalences qui entrent en jeu. Dans le prochain chapitre, nous allons voir quelques exemples bien choisis, qui permettent d'énoncer une question plus précise.

Chapitre 4

Quelques cas particuliers.

4.1 Introduction.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des équivalences entre blocs d'algèbres de Mackey p -locales. Les équivalences pouvant être des isomorphismes d'algèbres, ou des équivalences de Morita ou des équivalences dérivées. La première des remarques concernant les blocs d'algèbres de Mackey p -locales est qu'ils ne sont en général (dès que p^2 divise l'ordre du groupe de défaut du bloc) pas symétriques¹. Donc il est inutile de chercher des équivalences stables entre ces blocs. Le chapitre est organisé de la façon suivante : on va voir différents exemples d'équivalences et de non équivalences entre des blocs d'algèbres de Mackey p -locales. Ces exemples sont classés par ordre de difficulté et ils vont permettre d'éliminer les intuitions naïves que l'on pourrait avoir concernant la question (3.8.1).

Le chapitre commence par un peu de théorie sur les foncteurs de Mackey p -locaux. L'un des outils les plus utiles pour mesurer la force d'une équivalence est la connaissance des matrices de Cartan de ces algèbres. Dans une première partie, on donne une formule pour la matrice de décomposition des algèbres de Mackey p -locales. La construction d'équivalences de Morita, ou dérivées, nécessite la connaissance des foncteurs de Mackey projectifs. Dans la seconde section de ce chapitre on exhibe les foncteurs de Mackey projectifs pour les groupes ayant un p -sous-groupe de Sylow normal. Ces deux sections seront très utilisées dans la suite du chapitre, ainsi que dans la suite de la thèse.

1. Ce résultat est démontré pour les algèbres de Mackey p -locales dans [38]. La démonstration est aussi valable pour les blocs.

4.2 Matrice de décomposition des algèbres de Mackey p -locales.

Soit R un anneau commutatif unitaire. Soit Q un p -sous-groupe de G . La Q -construction (vue dans le chapitre 3) est appelée construction de Brauer pour les foncteurs de Mackey.

C'est un foncteur de $Mack_R(G)$ vers $Mack_R(\overline{N}_G(Q))$, que l'on note $M \mapsto M^Q$. Si $M \in Mack_R(G)$, alors pour un sous-groupe N/Q de $\overline{N}_G(Q)$, on a :

$$M^Q(N/Q) = M(N) / \sum_{Q \not\leq R \leq N} t_R^N(M(R)).$$

Cette construction généralise la construction de Brauer pour les modules puisque l'évaluation en $1 = Q/Q$ de ce foncteur est un foncteur de $Mack_R(G)$ vers $RN_G(Q)/Q\text{-Mod}$, noté $M \mapsto \overline{M}$.

$$\overline{M}(Q) := M^N(Q/Q) = M(Q) / \sum_{J < Q} t_J^Q(M(J)).$$

donc si R est un corps de caractéristique p et V est un kG -module, et si Q est un p -sous-groupe de G , alors

$$\overline{FP_V}(Q) = FP_V^Q(Q/Q) \cong V[Q].$$

Les propriétés principales de cette construction sont rappelées dans le lemme suivant :

Lemme 4.2.1. 1. Le foncteur $M \mapsto M^Q$ est adjoint à gauche du foncteur

$$Ind_{N_G(Q)}^G Inf_{\overline{N}_G(Q)}^{N_G(Q)} : Mack_R(\overline{N}_G(Q)) \rightarrow Mack_R(G).$$

2. Le foncteur $M \mapsto M^Q$ envoie un foncteur de Mackey projectif sur un foncteur de Mackey projectif.

3. Soit H un sous-groupe de G , alors $(Ind_H^G(M))^Q = 0$ si Q n'est pas conjugué à un sous-groupe de H .

Soit (K, \mathcal{O}, k) un système p -modulaire et $R = \mathcal{O}$ où k ,

4. Soit $M \in Mack_R(G, 1)$, alors $M^Q \in Mack_R(\overline{N}_G(Q), 1)$.

5. Soit P un foncteur de Mackey projectif de $Mack_k(G, 1)$ et L un foncteur de Mackey projectif de $Mack_{\mathcal{O}}(G, 1)$ qui relève P . Alors L^Q est un foncteur de Mackey projectif de $Mack_{\mathcal{O}}(G, 1)$ qui relève le foncteur P^Q .

6. Soit P un foncteur de Mackey projectif indécomposable de $Mack_k(G, 1)$, alors $P^Q(Q/Q) \cong P(1)[Q]$.

4.2. Matrice de décomposition des algèbres de Mackey p -locales.

7. Soit P un foncteur de Mackey projectif indécomposable de $Mack_R(G, 1)$, alors les vortex de P sont les p -sous-groupes maximaux Q de G tels que $P^Q \neq 0$.

Démonstration. 1. C'est le théorème 5.1 de [40] avec des notations différentes.

2. Comme le foncteur $M \mapsto M^Q$ est adjoint à gauche d'un foncteur exact, il envoie les objets projectifs sur des objets projectifs.
3. Pour $L \in Mack_R(\overline{N}_G(Q))$ and $M \in Mack_R(H)$, en utilisant des adjonctions successives, on a :

$$Hom((Ind_H^G M)^Q, L) \cong Hom(M, Res_H^G Ind_{N_G(Q)}^G Inf_{\overline{N}_G(Q)}^{N_G(Q)} L),$$

où les Hom sont relatifs aux catégories de Mackey respectives. La formule de Mackey entraîne alors le résultat.

4. Soit M un foncteur de Mackey de $Mack_R(G)$, alors $M \in Mack_R(G, 1)$ si et seulement si il existe un p -sous-groupe P de G et un foncteur de Mackey N de $Mack_R(P)$ tel que

$$M \mid Ind_P^G N.$$

Alors, en appliquant la construction de Brauer, on a :

$$M^Q \mid (Ind_P^G N)^Q,$$

or, en continuant le raisonnement de la démonstration de la troisième affirmation de 4.2.1, il est facile de voir que $(Ind_P^G N)^Q$ est isomorphe à une somme directe de foncteurs de Mackey induits depuis des sous-groupes de conjugués de P , donc M^Q est dans $Mack_R(\overline{N}_G(Q), 1)$.

Sinon, la démonstration peut-être déduite des chapitres 8 et 9 de [38] : de façon plus précise, avec les notations de [38]. Soit f_1^G l'idempotent primitif de l'anneau de Burnside indexé par le sous-groupe trivial, alors $(f_1^G)^Q = f_1^{N_G(Q)}$. On peut le voir en regardant f_1^G comme une combinaison linéaire d'idempotents primitifs de $\mathbb{Q}B(G)$ notés e_P^G pour un p -sous-groupe P de G . Alors,

$$(f_1^G)^Q = (Res_{N_G(Q)}^G f_1^G)^Q = \sum_{P \in [s_p(G)]} (Res_{N_G(Q)}^G e_P^G)^Q,$$

où $[s_p(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison des p -sous-groupes de G .

Alors $Res_{N_G(Q)}^G e_P^G = \sum_{P_i} e_{P_i}^{N_G(Q)}$, où P_i parcourt l'ensemble des sous-groupes P' de $N_G(Q)$ à conjugaison (dans $N_G(Q)$) près, tels que P' est G -conjugué à P . De plus, si P' est un sous-groupe de $N_G(Q)$, alors

$$(e_{P'}^{N_G(Q)})^Q = \begin{cases} 0 & \text{si } Q \not\leq P' \\ e_{P'/Q}^{\overline{N}_G(Q)} & \text{si } Q \leq P'. \end{cases}$$

Donc $(f_1^G)^Q = f_1^{\overline{N}_G(Q)}$. Maintenant, si M est un foncteur de Mackey pour G et $z \in B(G)$, alors

$$(z.M)^Q = z^Q.M^Q.$$

Soit M un foncteur de Mackey indécomposable de $Mack_R(G, 1)$, on a :

$$M^Q = (f_1^G.M)^Q = (f_1^G)^Q.M^Q = f_1^{\overline{N}_G(Q)}.M^Q.$$

5. On pose

$$H_Q := Hom_{Mack_k(\overline{N}_G(Q))}(L^Q/\mathfrak{p}(L^Q), M),$$

Alors par adjonctions successives, on a :

$$\begin{aligned} H_Q &\cong Hom_{Mack_k(\overline{N}_G(Q))}(k \otimes_{\mathcal{O}} L^Q, M) \\ &\cong Hom_{Mack_{\mathcal{O}}(\overline{N}_G(Q))}(L^Q, Hom_k(k, M)) \\ &\cong Hom_{Mack_{\mathcal{O}}(G)}(L, Ind_{N_G(Q)}^G Inf_{\overline{N}_G(Q)}^{N_G(Q)} Hom_k(k, M)). \end{aligned}$$

De plus,

$$Ind_{N_G(Q)}^G Inf_{\overline{N}_G(Q)}^{N_G(Q)} Hom_k(k, M) \cong Hom_k(k, Ind_{N_G(Q)}^G Inf_{\overline{N}_G(Q)}^{N_G(Q)}(M)),$$

donc

$$\begin{aligned} H_Q &\cong Hom_{Mack_{\mathcal{O}}(G)}(L, Hom_k(k, Ind_{N_G(Q)}^G Inf_{\overline{N}_G(Q)}^{N_G(Q)}(M))) \\ &\cong Hom_{Mack_k(G)}(L/\mathfrak{p}L, Ind_{N_G(Q)}^G Inf_{\overline{N}_G(Q)}^{N_G(Q)}(M)) \\ &\cong Hom_{Mack_k(\overline{N}_G(Q))}((L/\mathfrak{p}L)^Q, M). \end{aligned}$$

6. C'est le lemme 5.10 de [7].

7. Le vortex d'un foncteur de Mackey projectif étant le vortex de l'évaluation en 1 de ce foncteur. L'affirmation est la première assertion de théorème 3.2 de [10]. □

4.2. Matrice de décomposition des algèbres de Mackey p -locales.

Proposition 4.2.2 (Matrice de décomposition de $\mu_{\mathcal{O}}^1(G)$). *Soit G un groupe fini, et (K, \mathcal{O}, k) un système p -modulaire qui est assez-gros pour les groupes $\overline{N}_G(Q)$ où Q parcourt les p -sous-groupes de G .*

La matrice de décomposition de $\mu_{\mathcal{O}}^1(G)$ a ses lignes indexées par les classes d'isomorphisme de modules de p -permutation indécomposables de kG , et les colonnes sont indexées par les caractères irréductibles de $\overline{N}_G(Q)$ où Q parcourt les p -sous-groupes de G à conjugaison près.

Soit χ un caractère irréductible du groupe $\overline{N}_G(Q)$ et W un module de p -permutation indécomposable de $\mathcal{O}G$, alors le nombre de décomposition $d_{\chi, W}$ est égal à

$$d_{\chi, W} = \dim_K \text{Hom}_{KG}(K \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{W[Q]}, \chi). \quad (4.1)$$

où $\widehat{W[Q]}$ est l'unique $\mathcal{O}G$ -module de p -permutation qui relève $W[Q]$

Démonstration. Comme (K, \mathcal{O}, k) est un système assez gros pour $\mu_{\mathcal{O}}^1(G)$, et puisque $\mu_K^1(G)$ est une algèbre semi-simple, la matrice de Cartan de $\mu_K^1(G)$ est symétrique ([3] proposition 1.9.6). Soit S_{L, χ_i} un $\mu_K^1(G)$ -module simple et P_{H, V_j} un $\mu_K^1(G)$ -module projectif où L et H sont des p -sous-groupes de G . Alors V_j est un $k\overline{N}_G(H)$ -module simple et χ_i est un $K\overline{N}_G(L)$ -module simple. De plus, comme K est un corps de caractéristique zéro, on a : $S_{L, \chi_i} = \text{Ind}_{N_G(L)}^G \text{Inf}_{\overline{N}_G(L)}^{N_G(L)} FP_{\chi_i}$.

On note Q_{H, V_j} le $\mu_{\mathcal{O}}^1(G)$ -réseau projectif indécomposable qui relève P_{H, V_j} , et M un $\mu_{\mathcal{O}}^1(G)$ -réseau tel que $K \otimes_{\mathcal{O}} M = S_{L, \chi_i}$. Alors

$$\begin{aligned} d_{S_{L, \chi_i}, P_{H, V_j}} &= \dim_k \text{Hom}_{\mu_K^1(G)}(P_{H, V_j}, k \otimes_{\mathcal{O}} M) \\ &= \text{rang}_{\mathcal{O}} \text{Hom}_{\mu_{\mathcal{O}}^1(G)}(Q_{H, V_j}, M) \\ &= \dim_K \text{Hom}_{\mu_K^1(G)}(K \otimes_{\mathcal{O}} Q_{H, V_j}, S_{L, \chi_i}) \\ &= \dim_K \text{Hom}_{\mu_K^1(G)}(K \otimes_{\mathcal{O}} Q_{H, V_j}, \text{Ind}_{N_G(L)}^G \text{Inf}_{\overline{N}_G(L)}^{N_G(L)} FP_{\chi_i}) \\ &= \dim_K \text{Hom}_{\mu_K^1(G)}(K \otimes_{\mathcal{O}} (Q_{H, V_j})^L(L/L), \chi_i). \end{aligned}$$

La dernière égalité vient de deux adjonctions successives : (ev_1, FP_-) et $(-^L, \text{Ind}_{N_G(L)}^G \text{Inf}_{\overline{N}_G(L)}^{N_G(L)})$.

De plus, $(K \otimes_{\mathcal{O}} Q_{H, V_j})^L(L/L) \cong K \otimes_{\mathcal{O}} ((Q_{H, V_j})^L(L/L))$. D'après le lemme 4.2.1, le $\mathcal{O}\overline{N}_G(L)$ -module $(Q_{H, V_j})^L(L/L)$ est l'unique module de p -permutation, à isomorphisme près, qui relève $(P_{H, V_j})^L(L/L) \cong P_{H, V_j}(1)[L]$. \square

Remarque 4.2.3. D'après la section [9], la sous-matrice indexée par les caractères ordinaires de G , et les classes d'isomorphisme de modules de p -permutation indécomposables de kG est la matrice de décomposition de l'algèbre de Mackey cohomologique (voir section 5.2).

La formule (4.1) est très pratique pour calculer rapidement les matrices de Cartan dans de nombreux exemples. Il y a une autre formule possible pour calculer les matrices de Cartan des algèbres de Mackey p -locales à l'aide des modules de p -permutations indécomposables.

Proposition 4.2.4 (Bouc.). *Soit G un groupe fini et k un corps de caractéristique $p > 0$ "assez gros" pour $\mu_k^1(G)$. Soient M et N des foncteurs de Mackey projectifs de $\text{Mack}_k(G, 1)$, alors*

$$\dim_k \text{Hom}(M, N) = \sum_{S \in \mathcal{S}_p(G)/G} \dim_k \text{Hom}_{kN_G(S)/S}(M(1)[S], N(1)[S]).$$

Démonstration. Proposition 5.11 de [7]. □

De plus, les évaluations des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables ne dépendent que de l'évaluation en 1. De façon plus précise :

Proposition 4.2.5 (Bouc.). *Soient M un foncteur de Mackey projectif de $\text{Mack}_k(G, 1)$, et H un sous-groupe de G . Alors on a*

$$M(H) = \left(\bigoplus_{P \in \mathcal{S}_p(H)} M(1)[P] \right)_H.$$

Démonstration. Proposition 5.3 de [7]. □

4.3 Foncteurs de Mackey projectifs dans le cas du p -sous-groupe de Sylow distingué.

La connaissance des modules projectifs indécomposables est, la plupart du temps nécessaire, lorsque l'on s'intéresse à la question de l'existence ou non d'équivalences de Morita entre des algèbres. Dans le cas des foncteurs de Mackey, cette question est généralement très difficile, cependant on a quelques informations utiles. Les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables de $\text{Mack}_R(G, 1)$ sont caractérisés par leur évaluation en 1, et leur évaluation en 1 est un module de p -permutation indécomposable. La seconde information est que les facteurs de composition des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables peuvent se calculer en termes de données de l'algèbre de groupe. Cependant la structure de Loewy semble difficile à comprendre en dehors du cas des groupes ayant un p -Sylow d'ordre p .

La structure des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables est inconnue dans le cas général (voir [7], et [23] pour plus de détails), cependant dans

4.3. Foncteurs de Mackey projectifs dans le cas du p -sous-groupe de Sylow distingué.

le cas des groupes ayant un p -sous-groupe de Sylow normal, on peut exhiber ces projectifs indécomposables.

Soient G un groupe fini et k un corps de caractéristique p “assez gros” pour $\mu_k^1(G)$. Soit Q un p -sous-groupe de G . On considère alors la construction de Dress du foncteur de Burnside B en le G -ensemble G/Q . Soit Y un G -ensemble fini, alors

$$B_{G/Q}(Y) = B(Y \times G/Q).$$

Ceci est un $kN_G(Q)/Q$ -module à droite, en effet :

$$N_G(Q)/Q \cong \text{End}_{G\text{-ens}}(G/Q) \rightarrow \text{End}(B(Y \times G/Q)).$$

Soit E un $k\overline{N}_G(Q)$ -module projectif. On peut donc construire le produit tensoriel $B(Y \times G/Q) \otimes_{k\overline{N}_G(Q)} E$.

Proposition 4.3.1. 1. $Y \mapsto B(Y \times G/Q) \otimes_{k\overline{N}_G(Q)} E$ est un foncteur de Mackey projectif, que l'on note $B_{G/Q} \otimes_{k\overline{N}_G(Q)} E$.

2. Soit E un $k\overline{N}_G(Q)$ -module projectif indécomposable.

Si $\text{Ind}_{N_G(Q)}^G \text{Inf}_{\overline{N}_G(Q)}^{N_G(Q)} E$ est indécomposable, alors $B_{G/Q} \otimes_{k\overline{N}_G(Q)} E$ est un foncteur de Mackey projectif indécomposable.

Remarque 4.3.2. Soit Q un p -sous-groupe de G , et Y un G -ensemble fini, alors $B(Y \times G/Q) = B_p(Y \times G/Q)$, où B_p est la partie p -locale du foncteur de Burnside (c'est-à-dire $f_1^G B$).

Démonstration. 1. Il est élémentaire de vérifier que $B_{G/Q} \otimes_{k\overline{N}_G(Q)} E$ est un foncteur de Mackey au sens de Dress. Soit M un foncteur de Mackey pour G sur k . On a une succession d'isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} \text{Hom}(B_{G/Q} \otimes_{k\overline{N}_G(Q)} E, M) &\cong \text{Hom}_{k\overline{N}_G(Q)}(E, \text{Hom}_{\text{Mack}_k(G)}(B_{G/Q}, M)) \\ &\cong \text{Hom}_{k\overline{N}_G(Q)}(E, M(Q)), \end{aligned}$$

où le premier Hom est relatif à la catégorie $\text{Mack}_k(G)$. Donc le foncteur $\text{Hom}_{\text{Mack}_k(G)}(B_{G/Q} \otimes_{k\overline{N}_G(Q)} E, -)$ est exact puisque le module E est projectif.

2. L'évaluation en 1 de $B_{G/Q} \otimes_{k\overline{N}_G(Q)} E$ est

$$kG/Q \otimes_{k\overline{N}_G(Q)} E \cong \text{Ind}_{N_G(Q)}^G \text{Inf}_{\overline{N}_G(Q)}^{N_G(Q)} E$$

qui est un module de p -permutation indécomposable. □

Proposition 4.3.3 ([7]). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *Le groupe G a un p -sous-groupe de Sylow normal.*
- *Pour tout p -sous-groupe Q de G et tout $k\overline{N}_G(Q)$ -module projectif indécomposable E , le module $\text{Ind}_{N_G(Q)}^G \text{Inf}_{\overline{N}_G(Q)}^{N_G(Q)} E$ est un module indécomposable.*
- *Les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables de $\text{Mack}_R(G, 1)$ sont les $B_{G/Q} \otimes_{k\overline{N}_G(Q)} E$*

Lemme 4.3.4. 1. *Soit G un groupe fini et N un sous-groupe normal de G , alors $RB(G/N \times G/N) \cong B(N) \otimes_R RG/N$ en tant que G/N - G/N -bimodule, où l'action de G/N - G/N sur $B(N) \otimes_R RG/N$ est définie comme suit : soient $x \in B(N)$ et $y \in RG/N$, soient $a, b \in G/N$, alors*

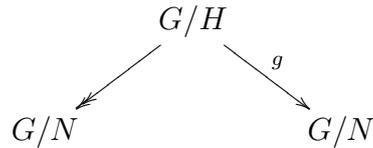
$$a.x \otimes y.b = a(x) \otimes ayb,$$

où $a(x)$ est l'action par conjugaison de a sur x et ayb est l'action de (a, b) sur l'élément y du G/N - G/N -bi-ensemble RG/N .

2. *En particulier, soit D un p -sous-groupe cyclique, d'ordre p^n , normal dans G . Soit B un bloc de kG de défaut D et soit S un kG -module simple. Alors on a un isomorphisme de kG -modules :*

$$B(G/D \times G/D) \otimes_{kG/D} S \cong S^{n+1}.$$

Démonstration. 1. Les éléments de $B(G/N \times G/N)$ sont des classes d'isomorphismes de G -ensembles au dessus de $G/N \times G/N$. Il est facile de vérifier que tout G -ensemble transitif au dessus de $G/N \times G/N$ est isomorphe à :



pour H un sous-groupe de N , pris à N -conjugaison près et $g \in G/N$, et où l'application g est la composée de $c_{g,N}$ et $\pi_{G/N}^{G/H}$.

L'action de $G/N \times G/N$ sur un élément de la base est définie comme suit : soit $(n_1, n_2) \in G/N \times G/N$, soit $H \leq N$, et $g \in G/N$. Alors

$$(n_1, n_2).(G/N \leftarrow G/H \rightarrow G/N) = \begin{array}{ccc} & G/{}^{n_1}H & \\ & \swarrow & \searrow \\ G/N & & G/N \end{array}$$

$n_1gn_2^{-1}$

4.4. Exemple du groupe S_3 .

Donc $B(G/N \times G/N) \cong B(N) \otimes_R RG/N$, en tant que kG/N - kG/N -module, avec l'action annoncée dans le lemme.

Soit M un RG/N -module, alors

$$B(G/N \times G/N) \otimes_{RG/N} M \cong B(N) \otimes_R M,$$

où $B(N) \otimes_R M$ est le RG/N -module à gauche dont l'action est définie comme suit : soit $x \otimes m \in B(N) \otimes_R M$ et $a \in G/N$, alors

$$a.x \otimes m = a(x) \otimes am.$$

2. Le groupe D étant normal, l'action de G/N sur $B(N)$ est triviale. De plus le groupe D étant normal dans G , le groupe D agit trivialement sur les kG -modules simples, qui peuvent donc être vus comme kG/D -modules simples, d'où si S est un kG -module simple du bloc B , on a :

$$B(G/D \times G/D) \otimes_{kG/D} S \cong S^{n+1}.$$

□

4.4 Exemple du groupe S_3 .

Soit $G = S_3$ le groupe symétrique d'indice 3. Il y a deux nombres premiers intéressants pour S_3 : $p = 2$ et $p = 3$. Comme le 3-sous-groupe de Sylow de S_3 est normal, dans le cadre de la conjecture de Broué, il n'y a rien à vérifier. On s'intéresse donc à $p = 2$. La table de caractères ordinaires de S_3 est :

	(Id)	(12)	(123)
1	1	1	1
ϵ	1	-1	1
2	2	0	-1

Il y a un caractère de degré 2, donc un bloc de défaut zéro. On en déduit que $1 - e_2$ est un idempotent de \mathcal{OS}_3 , où e_2 est l'idempotent qui correspond au caractère de degré 2 de S_3 . Un calcul élémentaire donne

$$b := 1 - e_2 = \frac{1}{3}(Id + (123) + (132)).$$

Il est alors facile de vérifier que ceci est un bloc. La table de caractères modulaires est la suivante :

	(Id)	(123)
1	1	1
2	1	-1

La matrice de décomposition de $\mathcal{O}S_3$ en caractéristique 2 est donc

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en ayant pris comme base les caractères $(1, \epsilon, 2)$ et $(1, 2)$. On obtient la matrice de Cartan :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La conjecture de Broué est très facile à vérifier, dans ce cas, puisque

Lemme 4.4.1. *Il y a un isomorphisme d'algèbres :*

$$\mathcal{O}S_3 b \cong \mathcal{O}C_2.$$

La première question, naïve, qui se pose est : l'algèbre $\mu_{\mathcal{O}}^1(S_3)b^\mu$ est-elle isomorphe à $\mu_{\mathcal{O}}(C_2)$?

Lemme 4.4.2. 1. $\dim_k \mu_k(C_2) = 6$.

2. $\dim_k \mu_k(S_3)b^\mu = 56$.

Démonstration. Pour la dimension de $\mu_k(C_2)$ c'est un calcul élémentaire. Pour la dimension de $\mu_k(S_3)b^\mu$, on peut utiliser la base donnée dans la section 3 de [38] et la formule du théorème 3.7.7 pour démontrer le lemme, cependant c'est un calcul pénible. Une alternative est d'utiliser les foncteurs de Mackey projectifs. On a :

$$\mu_k(S_3) \cong \bigoplus_{H \leq G} B_{G/H}(\Omega_G),$$

où, puisque l'on travaille au sens de Green, $\Omega_G = \bigsqcup_{K \leq G} G/K$. De plus,

$$B_{G/H} \cong \bigoplus_{(K,V)} \dim_k S_{K,V}(H) P_{K,V},$$

où (V, K) est un ensemble qui paramètre les foncteurs de Mackey simples. Donc, en prenant les foncteurs de Mackey simples qui sont dans le bloc b^μ , c'est-à-dire les $S_{H,k}$ où H est un 2-sous-groupe de G , on a

$$\mu_k^1(b) \cong \bigoplus_{H \leq G} \bigoplus_{Q \in \mathfrak{s}_2(G)} \dim_k S_{Q,k}(H) P_{Q,k}(\Omega_G).$$

Or il est facile de vérifier que $S_{1,k}(H) = k$ si H est un 2'-groupe et $S_{1,k}(H) = 0$ sinon. De même, $S_{C_2,k}(H) = 0$ si $H = 1$ ou $H = C_3$ et $S_{C_2,k}(H) = k$ sinon. Donc on a

$$\mu_k^1(b) \cong P_{1,k}^2(\Omega_G) \oplus P_{C_2,k}^4(\Omega_G).$$

4.4. Exemple du groupe S_3 .

En utilisant la proposition 5.3 de [7], on montre que $\dim_k P_{1,k}(\Omega_G) = 8$ et $\dim_k(P_{C_2,k}(\Omega_G)) = 10$. \square

On a donc démontré le lemme suivant :

Lemme 4.4.3. *Soit $R = \mathcal{O}$ ou k . Il n'y a pas d'isomorphisme entre les algèbres $\mu_R^1(S_3)b^\mu$ et $\text{Mat}(m, \mu_R(C_2))$ pour $m \in \mathbb{N}$.*

Cependant, les matrices de Cartan de ces deux algèbres sont les mêmes, en effet :

Lemme 4.4.4. *Les matrices de Cartan de $\mu_k^1(b)$ et $\mu_k(C_2)$ sont identiques et égales à*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Pour la matrice de Cartan de $\mu_k(C_2)$, on peut utiliser le fait que les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables sont $B_{C_2/1}$ et B_{C_2/C_2} , ou utiliser l'annexe de [38].

On calcule la matrice de décomposition de $\mu_{\mathcal{O}}^1(b)$ à l'aide de la proposition 4.2.2. Il y a deux modules de 2-permutation indécomposables dans le bloc kS_3b ainsi que 2 caractères irréductibles dans le 2-bloc. En utilisant la formule de 4.2.2, la matrice de décomposition est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\square

Proposition 4.4.5. *Il y a une équivalence de catégories :*

$$\mu_{\mathcal{O}}^1(S_3)b^\mu\text{-Mod} \cong \mu_{\mathcal{O}}(C_2)\text{-Mod}.$$

Démonstration. L'algèbre $\mu_k(C_2)$ étant une algèbre basique, d'après le théorème de Morita, il y a un isomorphisme d'algèbres

$$\mu_k(C_2) \cong \text{End}_{\text{Mack}_k(C_2)}(B_{C_2/1} \oplus B_{C_2/C_2}).$$

De plus $P_{1,k} \oplus P_{C_2,k}$ est un pro-générateur de $\text{Mack}_k(S_3, 1)b^\mu$, donc d'après le théorème de Morita, les catégories $\mu_k^1(b)\text{-Mod}$ et $\text{End}_{\text{Mack}_k(S_3, 1)}(P_{1,k} \oplus P_{C_2,k})\text{-Mod}$ sont équivalentes. Il suffit donc de démontrer que

$$\text{End}_{\text{Mack}_k(C_2)}(B_{C_2/1} \oplus B_{C_2/C_2}) \cong \text{End}_{\text{Mack}_k(S_3, 1)}(P_{1,k} \oplus P_{C_2,k}).$$

Ceci résulte de la connaissance des structures de Loewy des projectifs : les algèbres considérées dans ce cas sont des algèbres symétriques et étant donnée

leur matrice de Cartan, les foncteurs de Mackey projectifs de $Mack_k(S_3, 1)$ ont la structure suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 & S_{1,k} & S_{C_2,k} \\
 P_{1,k} : & S_{C_2,k} & P_{C_2,k} : S_{1,k} \\
 & S_{1,k} & S_{C_2,k}.
 \end{array}$$

De même, les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables de $\mu_k(C_2)$ ont la structure suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 & S_{1,k} & S_{C_2,k} \\
 B_{C_2/1} : & S_{C_2,k} & B_{C_2/C_2} : S_{1,k} \\
 & S_{1,k} & S_{C_2,k}
 \end{array}$$

□

Remarque 4.4.6. Le résultat de cette section s'étend de façon élémentaire au cas des groupes diédraux D_{2p} avec p un nombre premier impair, et au cas des groupes diédraux généralisés $A \rtimes C_2$, où A est un groupe abélien d'ordre impair. Il suffit de remarquer que, dans ce cas, il y a un bloc b de défaut C_2 et des blocs de défaut zéro. L'algèbre de Mackey p -locale du bloc b est Morita équivalente à l'algèbre de Mackey p -locale du bloc principal de kS_3 .

4.5 Exemple de $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

Considérons le groupe $G = SL(2, \mathbb{F}_3)$ et $k = \overline{\mathbb{F}_3}$. Ce groupe est isomorphe au produit semi-direct $Q_8 \rtimes C_3$ où C_3 agit par l'automorphisme ϕ de Q_8 défini par permutation (i, j, k) , où i, j et k sont des éléments d'ordre 4 qui engendrent Q_8 , et $k = ij$. Le groupe G est donc 3-nilpotent. La table de

4.5. Exemple de $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

caractères ordinaires de ce groupe est

χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	A	\overline{A}	1	\overline{A}	A	1
χ_3	1	\overline{A}	A	A	A	\overline{A}	1
χ_4	2	1	1	-2	-1	-1	0
χ_5	2	\overline{A}	A	-2	$-A$	$-A$	0
χ_6	2	A	\overline{A}	-2	$-\overline{A}$	$-A$	0
χ_7	3	0	0	3	0	0	-1

où $A = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$. La table des caractères modulaire est la suivante :

ϕ_1	1	1	1
ϕ_2	2	-2	0
ϕ_3	3	3	-1

On en déduit la matrice de décomposition de $\mathcal{O}G$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut lire dans cette matrice, et dans la table des caractères ordinaires, qu'il y a trois blocs en caractéristique 3. Il y a un bloc de défaut zéro qui contient un module simple projectif de dimension 3 et il y a deux blocs de défaut 1. Il y a le bloc principal et un bloc qui contient un module simple de dimension 2. Pour le bloc principal, comme dans l'exemple de S_3 , on peut démontrer que l'algèbre de Mackey du bloc principal est Morita équivalente à l'algèbre de Mackey de C_3 (voir section 7.2). Intéressons nous au bloc non principal de défaut 1 :

Soit W le Q_8 -module simple de dimension 2. Il est clair que le stabilisateur de W dans C_3 est C_3 car W est le seul Q_8 -module simple de dimension 2, donc on peut prolonger W en un kG -module simple de dimension 2. Soit b un idempotent bloc de kG tel que $b.W = W$. Puisque le bloc est nilpotent, on a $kGb \cong \text{Mat}(m, kC_3)$ pour un $m \in \mathbb{N}$. On a vu dans l'exemple de S_3 qu'il est illusoire de chercher à montrer que le résultat analogue est vrai pour les algèbres de Mackey p -locales. On se propose d'étudier le lien entre $\mu_k^1(b)$ et $\mu_k(C_3)$. Pour cela, on a besoin des foncteurs de Mackey projectifs de $\mu_k^1(b)$.

Lemme 4.5.1. *Il y a deux classes d'isomorphisme de modules de p -permutation indécomposables dans $kGb\text{-Mod}$.*

- $\text{Ind}_{Q_8}^G W$ qui est un module projectif.

- $Ind_{Z(Q_8) \times C_3}^G k_\epsilon$, où k_ϵ est l'inflation de $Z(Q_8)$ à $Z(Q_8) \times C_3$ du $kZ(Q_8)$ -module (= kC_2 -module) simple non trivial.

Démonstration. On utilise les notations de Broué ([10]) pour les modules de p -permutation indécomposables.

Le nombre de classes d'isomorphisme de modules de p -permutation indécomposables dans le bloc b est égal au nombre de foncteurs de Mackey simples dans le bloc b^μ . D'après le théorème 3.7.12 ce nombre vaut 2. En effet il y a un $S_{1,V}$ dans le bloc b^μ , puisqu'il n'y a qu'un seul module simple dans le bloc b et il y a un $S_{C_3,W}$ puisque W doit appartenir à un bloc de $kN_G(C_3)$ qui est le correspondant de Brauer de b . Mais $N_G(C_3)$ est aussi un groupe p -nilpotent, donc il n'y a qu'un seul module simple dans le correspondant de Brauer de b . Les deux modules du lemme étant des induits de modules de p -permutation, ce sont des modules de p -permutation. Il est donc suffisant de démontrer qu'ils sont indécomposables.

- Le module $Ind_{Q_8}^G W$ est indécomposable d'après le théorème d'indécomposabilité de Green. Il est projectif puisque W est un Q_8 -module projectif, et le foncteur d'induction envoie les modules projectifs sur les modules projectifs.
- Les modules de p -permutation indécomposables de vortex C_3 de G sont en bijection avec les modules projectifs indécomposables de $kN_G(C_3)/C_3 \cong kC_2$. Il y a deux projectifs indécomposables : le module trivial et le module k_ϵ , qui correspond au caractère non trivial ϵ . Le module de p -permutation qui correspond au module trivial est $M(C_3, 1)$ et c'est le module trivial de kG .

Le module $M := Ind_{Z(Q_8) \times C_3}^G k_\epsilon$ est un module de p -permutation de vortex C_3 . Supposons que le module M soit décomposable, alors on a $M = M(C_3, k_\epsilon) \oplus P$ où $M(C_3, k_\epsilon)$ est le module de p -permutation indécomposable de vortex C_3 correspondant à k_ϵ . et P est un module projectif non nul. Le module M est de dimension 4. Le seul facteur projectif qui peut convenir doit donc être de dimension 3 et alors $M(C_3, k_\epsilon)$ est de dimension 1. Mais le seul kG -module de dimension 1 est le module trivial. Donc M est indécomposable. □

Lemme 4.5.2. *Les foncteurs de Mackey projectifs du bloc b^μ sont :*

- $FP_{Ind_{Q_8}^G(W)}$ qui est de vortex 1.
- $Ind_{Z(Q_8) \times C_3}^G B_\epsilon$ de vortex C_3 , où B_ϵ est le foncteur de Mackey pour le groupe $N_G(C_3)$ défini ainsi : soit Y un $N_G(C_3)$ -ensemble, alors $B_\epsilon = B_{N_G(C_3)/C_3} \otimes k_\epsilon$ (proposition 4.3.1).

4.5. Exemple de $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

Démonstration. Le foncteur d'induction entre catégories de foncteurs de Mackey, envoie les foncteurs de Mackey projectifs sur des foncteurs de Mackey projectifs (remarque 3.3.5), donc les deux foncteurs présentés dans le lemme sont projectifs. Il faut tout de même vérifier que $Ind_{Z(Q_8) \times C_3}^G B_\epsilon$ est dans $Mack_k(G, 1)$. Le foncteur B_ϵ est dans $Mack_R(Z(Q_8) \times C_3, 1)$, donc il existe un p -sous-groupe P de $Z(Q_8) \times C_3$ et un foncteur de Mackey N pour P tel que

$$B_\epsilon \mid Ind_P^{Z(Q_8) \times C_3} N.$$

Donc

$$Ind_{Z(Q_8) \times C_3}^G B_\epsilon \mid Ind_P^G N,$$

donc le foncteur de Mackey $Ind_{Z(Q_8) \times C_3}^G B_\epsilon$ est dans $Mack_k(G, 1)$.

Ces deux foncteurs projectifs sont indécomposables si et seulement si leur évaluation en 1 est un RG -module indécomposable.

Or $FP_{Ind_{Q_8}^G(W)}(1) = Ind_{Q_8}^G(W)$ et $(Ind_{Z(Q_8) \times C_3}^G B_\epsilon)(1) = Ind_{Z(Q_8) \times C_3}^G k_\epsilon$. Donc le résultat est une conséquence du lemme précédent. \square

Lemme 4.5.3. *La matrice de Cartan de l'algèbre $\mu_k^1(b)$ est :*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Démonstration. On peut utiliser la formule du théorème 4.2.2 pour calculer la matrice de décomposition, ou utiliser la formule de la proposition 4.2.4 pour calculer la matrice de Cartan. Cependant, comme on connaît les foncteurs projectifs, on peut simplement calculer la dimension des espaces d'homomorphismes entre ces projectifs indécomposables.

$$Hom_{Mack_k(G)}(FP_{Ind_{Q_8}^G(W)}, FP_{Ind_{Q_8}^G(W)}) = Hom_{kG}(Ind_{Q_8}^G W, Ind_{Q_8}^G W).$$

La connaissance de la matrice de Cartan du bloc de l'algèbre de groupe nous donne :

$$dim_k Hom_{Mack_k(G)}(FP_{Ind_{Q_8}^G(W)}, FP_{Ind_{Q_8}^G(W)}) = 3.$$

$$Hom_{Mack_k(G)}(FP_{Ind_{Q_8}^G(W)}, Ind_{Z(Q_8) \times C_3}^G B_\epsilon) = Hom_{kG}(Ind_{Q_8}^G(W), Ind_{Z(Q_8) \times C_3}^G k_\epsilon).$$

On est à nouveau ramené au niveau de l'algèbre de groupe. Le module $M = Ind_{Z(Q_8) \times C_3}^G k_\epsilon$ est dimension 4, donc le module simple de dimension 2 apparaît deux fois dans M . D'où

$$dim_k Hom_{Mack_k(G)}(FP_{Ind_{Q_8}^G(W)}, Ind_{Z(Q_8) \times C_3}^G B_\epsilon) = 2.$$

Le dernier calcul est légèrement plus technique :

$$\begin{aligned}
 & \text{End}_{\text{Mack}_k(G)}(\text{Ind}_{Z(Q_8) \times C_3}^G B_\epsilon) \\
 & \cong \bigoplus_{g \in [N_G(C_3) \backslash G / N_G(C_3)]} \text{Hom}(B_\epsilon, \text{Ind}_{N_G(C_3) \cap {}^g N_G(C_3)}^{N_G(C_3)} g \text{Res}_{N_G(C_3) \cap N_G(C_3)}^{N_G(C_3)} B_\epsilon) \\
 & \cong \text{Hom}_{\text{Mack}_R(C_6)}(B_\epsilon, B_\epsilon) \oplus \text{Hom}_{\text{Mack}_R(C_6)}(B_\epsilon, \text{Ind}_{C_2}^{C_6} g \text{Res}_{C_2}^{C_6} B_\epsilon) \\
 & \cong \text{Hom}_{\text{Mack}_R(C_6)}(B_\epsilon, B_\epsilon) \oplus \text{Hom}_{\text{Mack}_R(C_2)}(\text{Res}_{C_2}^{C_6} B_\epsilon, {}^g \text{Res}_{C_2}^{C_6} B_\epsilon),
 \end{aligned}$$

où g est un représentant de la double classe non triviale de $N_G(C_3) \backslash G / N_G(C_3)$. Le foncteur $\text{Res}_{C_2}^{C_6} B_\epsilon$ est un foncteur de Mackey projectif pour C_2 et son évaluation en 1 est k_ϵ . Donc $\text{Res}_{C_2}^{C_6} B_\epsilon = FP_{k_\epsilon}$. Et on a

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{\text{Mack}_R(C_2)}(\text{Res}_{C_2}^{C_6} B_\epsilon, g \text{Res}_{C_2}^{C_6} B_\epsilon) & \cong \text{Hom}_{\text{Mack}_R(C_2)}(FP_{k_\epsilon}, {}^g FP_{k_\epsilon}) \\
 & \cong \text{Hom}_{kC_2}(k_\epsilon, {}^g k_\epsilon) \\
 & \cong k.
 \end{aligned}$$

Par utilisation successive d'adjonctions, on a :

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{\text{Mack}_R(C_6)}(B_\epsilon, B_\epsilon) & \cong \text{Hom}_{kC_6}(k_\epsilon, \text{Hom}(B_{C_6/C_2}, B_{C_6/C_3} \otimes_{kC_{-6/C_3}} k_\epsilon)) \\
 & \cong \text{Hom}_{kC_6}(k_\epsilon, B(C_6/C_3 \times C_6/C_3) \otimes_{kC_6/C_3} k_\epsilon).
 \end{aligned}$$

Par le lemme 4.3.4, on a : $B(C_6/C_3 \times C_6/C_3) \otimes_{kC_6/C_3} k_\epsilon \cong k_\epsilon \oplus k_\epsilon$. Finalement on a

$$\dim_k \text{End}_{\text{Mack}_k(G)}(\text{Ind}_{Z(Q_8) \times C_3}^G B_\epsilon) = 3.$$

□

Lemme 4.5.4. *La matrice de Cartan de $\mu_k(C_3)$ est :*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démonstration. On peut trouver ce résultat dans les annexes de [38]. Le calcul est élémentaire, puisque les projectifs indécomposables sont B_{C_3/C_3} et $B_{C_3/1}$. □

On a donc la proposition suivante :

Proposition 4.5.5. *Soit $G = SL(2, \mathbb{F}_3)$ et b un bloc non principal de défaut C_3 . Alors la catégorie $\mu_k^1(b)\text{-Mod}$ n'est pas équivalente à la catégorie $\mu_k(C_3)\text{-Mod}$.*

4.5. Exemple de $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

Démonstration. Les matrices de Cartan de $\mu_k^1(b)$ et $\mu_k(C_3)$ ne sont pas équivalentes. \square

Remarque 4.5.6. On vient de voir que dans le cadre de la conjecture de défaut abélien de Broué, une équivalence de Morita entre blocs d'algèbres de groupes n'induit *pas* une équivalence de Morita entre les blocs d'algèbres de Mackey correspondants. Cependant si on regarde plus en détail les matrices de Cartan, on voit que leurs diviseurs élémentaires sont les mêmes ([1, 2]). Ce qui laisse suggérer l'existence d'une équivalence plus faible entre les blocs d'algèbres de Mackey.

Dans la suite on se propose de vérifier que $D^b(\mu_k^1(b)) \cong D^b(\mu_k(C_3))$. Pour cela, il est utile de connaître la structure de Loewy des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables.

Lemme 4.5.7. Soient $S_{1,W}$ et S_{C_3, k_ϵ} les foncteurs simples de $\mu_k^1(b)$. Alors

1. $\dim_k \text{Ext}^1(S_{1,W}, S_{1,W}) = \dim_k \text{Ext}^1(S_{C_3, V}, S_{C_3, V}) = 0$.
2. $\dim_k \text{Ext}^1(S_{1,W}, S_{C_3, V}) = \dim_k \text{Ext}^1(S_{C_3, W}, S_{1,W}) = 1$.

Démonstration. 1. Soit M une extension de $S_{1,W}$ et $S_{1,W}$, alors $M(1)$ est une auto-extension de W . Or il existe à isomorphisme près deux auto-extensions de W , l'une scindée et l'autre non scindée. Supposons que $M(1)$ est une auto-extension non scindée de W .

Comme $S_{1,W}(C_3) = 0$, on doit avoir $M(C_3) = 0$ et donc

$$r_1^{C_3} = t_1^{C_3} = 0.$$

La formule de Mackey entraîne $\sum_{g \in C_3} c_{1,g} = 0$. Cependant l'auto-extension non scindée de W (le module $\text{Ind}_{\mathbb{Z}(Q_8) \times C_3}^G k_\epsilon$) ne possède pas cette propriété, ce qui est une contradiction.

Soit M une auto-extension de S_{C_3, k_ϵ} .

On a $M(1) = 0$ puisque $S_{C_3, k_\epsilon}(1) = 0$ et on a $M(C_3)$ doit être une auto-extension de k_ϵ en tant que $kN_G(C_3)/C_3$ -module. Or toutes les auto-extensions de k_ϵ , en tant que kC_2 modules sont scindées (car la caractéristique du corps est 3). De plus toutes les autres valeurs de S_{C_3, k_ϵ} sont nulles. Donc M est une extension scindée.

2. La démonstration de la deuxième affirmation, bien qu'élémentaire est plus technique. On ne donne que les idées de la démonstration. Soit M une extension de $S_{1,W}$ par $S_{C_3, V}$. On a
 - $S_{1,W}(1) = W$.
 - $S_{C_3, k_\epsilon}(C_3) = k_\epsilon$.
 - Toutes les autres valeurs de $S_{1,W}$ et S_{C_3, k_ϵ} sont nulles.

Donc il suffit de regarder ce qu'il se passe pour M aux valeurs 1 et C_3 . La valeur en 1 doit être isomorphe à W et la valeur en C_3 doit être isomorphe à k_ϵ . Comme on regarde les extensions à isomorphisme près, on peut supposer :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & k_\epsilon & \xlongequal{\quad} & M(C_3) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \updownarrow & & \begin{array}{c} t_{C_3}^1 \updownarrow \\ r_1^{C_3} \end{array} & & \updownarrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M(1) & \xlongequal{\quad} & W \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Par commutativité des carrés, on a $r_1^{C_3} = 0$ et on a de la liberté pour $t_1^{C_3}$. Les axiomes des foncteurs de Mackey impliquent que $t_1^{C_3}$ doit être un morphisme de kC_6 -modules de $\text{Res}_{C_6}^G(W) \rightarrow k_\epsilon$. Or il y a, à multiplication scalaire près deux tels morphismes. L'un nul, et l'autre non. Si $t_1^{C_3}$ est nul alors l'extension est scindée. Si $t_1^{C_3}$ n'est pas un morphisme nul, il n'est pas possible de scinder cette extension. La dernière affirmation se déduit par dualité.

Pour simplifier les notations, on note $P_1 := FP_{\text{Ind}_{Q_8}^G(W)}$ et on note $P_2 := \text{Ind}_{Z(Q_8) \times C_3}^G B_\epsilon$ ainsi que S_1 le simple qui est à la tête de P_1 et S_2 celui qui est à la tête de P_2 . \square

Proposition 4.5.8. *Les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables de $\mu_k^1(b)$ ont la structure suivante :*

$$\begin{array}{cc}
 S_1 & S_2 \\
 \\
 S_2 & S_1 \\
 \\
 P_1 = & S_1 \quad P_2 = \quad S_2 \\
 \\
 S_2 & S_1 \\
 \\
 S_1 & S_2
 \end{array}$$

Démonstration. L'algèbre $\mu_k^1(b)$ est symétrique puisque b est de défaut C_3 , donc les simples qui apparaissent à la tête des projectifs apparaissent aussi dans le socle. La connaissance des groupes d'extensions du lemme précédent donne la deuxième couche de Loewy. En regardant les matrices de Cartan, on déduit que le résultat du lemme est la seule possibilité. \square

4.5. Exemple de $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

On peut lire les morphismes entre les projectifs à l'aide des structures de Loewy. On va utiliser les notations suivantes :

Notations 4.5.9. 1. Les homomorphismes de P_1 vers P_2 :

- $\pi_{P_1, P_2} : P_1 \rightarrow P_1/Soc(P_1) \hookrightarrow Rad(P_2) \hookrightarrow P_2$
- $\sigma_{P_1, P_2} : P_1 \rightarrow P_1/Soc^3(P_1) \hookrightarrow Rad^3(P_2) \hookrightarrow P_2$

2. Les homomorphismes de P_2 vers P_1 :

- $\pi_{P_2, P_1} : P_2 \rightarrow P_2/Soc(P_2) \hookrightarrow Rad(P_1) \hookrightarrow P_1$
- $\sigma_{P_2, P_1} : P_2 \rightarrow P_2/Soc^3(P_2) \hookrightarrow Rad^3(P_1) \hookrightarrow P_1$

3. Les endomorphismes de P_1 :

- Id_{P_1} le morphisme identité de P_1 dans lui même.
- $\eta_{P_1} : P_1 \rightarrow P/Soc^2(P_1) \hookrightarrow Rad^2(P_1) \hookrightarrow P_1$
- $\eta_{P_1}^2 : P_1 \rightarrow P/Soc^4(P_1) \hookrightarrow Rad^4(P_1) \hookrightarrow P_1$

4. Les endomorphismes de P_2 :

- Id_{P_2} le morphisme identité de P_2 dans lui même.
- $\eta_{P_2} : P_2 \rightarrow P/Soc^2(P_2) \hookrightarrow Rad^2(P_2) \hookrightarrow P_2$
- $\eta_{P_2}^2 : P_2 \rightarrow P/Soc^4(P_2) \hookrightarrow Rad^4(P_2) \hookrightarrow P_2$

On note Q_1 et Q_2 les projectifs de $\mu_k(C_3)$, ainsi que R_1 et R_2 leur tête respectives.

Lemme 4.5.10. *Les structures de Loewy des projectifs indécomposables sont :*

$$\begin{array}{ccc}
 & R_1 & R_2 \\
 \\
 Q_2 = & R_2 & Q_1 = R_1 \oplus R_2 \\
 \\
 & R_1 & R_2
 \end{array}$$

Notations 4.5.11. 1. $\pi_{Q_2, Q_1} : Q_1 \rightarrow Q_2/Soc^1(Q_2) \hookrightarrow Rad(Q_1) \hookrightarrow Q_1$.

2. $\pi_{Q_1, Q_2} : Q_1 \rightarrow Q_1/L \hookrightarrow Rad(Q_2) \hookrightarrow Q_2$, où L est le sous-module de Q_1 qui est une extension non scindée de R_2 par R_2 .

3. Les endomorphismes de Q_2 sont :

- Id_{Q_2} le morphisme identité de Q_2 dans lui même.
- $\eta_{Q_2} : Q_2 \rightarrow P_1/Soc^2(Q_2) \hookrightarrow Rad(Q_2) \hookrightarrow Q_2$.

4. Les endomorphismes de Q_1 sont :

- Id_{Q_1} le morphisme identité de Q_1 dans lui même.
- $\eta_{Q_1} : Q_1 \rightarrow Q_1/M \hookrightarrow Rad(Q_1) \hookrightarrow Q_1$ où M le sous-module de Q_1 qui est une extension non scindée de R_1 par R_2 .

- $\eta_{Q_1}^2 : Q_1 \rightarrow Q_1/Soc(Q_1)^2 \hookrightarrow Rad^2(Q_1) \hookrightarrow Q_2$.

On considère le complexe :

$$T := \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_1^2 \xrightarrow{\phi} P_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

où $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi_{P_1, P_2} \end{pmatrix}$. On va montrer que ce complexe est un complexe basculant et calculer son algèbre d'endomorphismes. C'est un résultat classique, attribué à Jeremy Rickard, cependant il semble difficile d'en trouver une référence précise. La démonstration qui suit est très formelle et ne s'appuie pas sur le fait que l'on travaille avec des algèbres de Mackey. En réalité, comme on le verra dans le chapitre 6, dans ce cas précis, les algèbres de Mackey sont des algèbres d'arbre de Brauer et ce type de complexe à deux termes permet de déformer, via équivalence dérivée, l'arbre de Brauer de l'algèbre.

Lemme 4.5.12. *Le complexe T est un complexe basculant de $\mu_k^1(b)$ -modules.*

Démonstration. On doit montrer que T n'a pas d'auto-extensions non triviales. Soit f un morphisme de T vers $T[-1]$, alors

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_1^2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow f & & \downarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1^2 & \longrightarrow & P_2 \end{array}$$

il existe des scalaires λ et β tels que $f = \lambda\pi_{P_2, P_1} + \beta\sigma_{P_2, P_1}$. Pour que f soit un morphisme de complexes, il faut que $\phi \circ f = 0$. Or $\phi \circ f = \lambda\eta_{P_2} + \beta\eta_{P_2}^2$ donc f est le morphisme nul.

Soit f un morphisme de T vers $T[1]$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_1^2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\ P_1^2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Alors il existe des scalaires λ et β tels que $f = \lambda\pi_{P_1, P_2} + \beta\sigma_{P_1, P_2}$. Le morphisme f est automatiquement un morphisme de complexes. Soient $a_1, a_2, b_1, b_2 \in k$. On pose $s_1 = a_1Id_{P_1} + b_1n_{P_1}$ et $s_2 = a_2Id_{P_2} + b_2n_{P_2}$, alors

$$s_2 \circ \phi + \phi \circ s_1 = (a_1 + a_2)\pi_{P_1, P_2} + (b_1 + b_2)\sigma_{P_1, P_2}.$$

Donc le morphisme f est homotope au morphisme nul.

Les autres auto-extensions de T sont trivialement nulles.

On doit montrer que $Add(T) = K^b(\mu_k^1(b)\text{-proj})$:

4.5. Exemple de $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

1. Le projectif P_1 est facteur direct de T , donc est dans $Add(T)$. Il suffit de montrer que P_2 est dans $Add(T)$.
2. Considérons le morphisme f :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{\pi_{P_1, P_2}} & P_2 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Le cône de ce morphisme est :

$$P_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -Id_{P_1} \\ \pi_{P_1, P_2} \end{pmatrix}} P_1 \oplus P_2 \longrightarrow 0$$

Ce complexe est isomorphe à homotopie près au complexe

$$C := 0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow 0$$

où P_2 est en degré 1. L'équivalence d'homotopie peut être donnée par : $\psi C \rightarrow Cone(f)$ défini par $\psi(x) = (0, x)$ pour $x \in P_2$. L'équivalence inverse étant $\Phi : Cone(f) \rightarrow C$ défini par $\Phi(x, y) = y - \pi_{P_1, P_2}(x)$.

□

Théorème 4.5.13. Soient $G = SL(2, \mathbb{F}_3)$ et $k = \overline{\mathbb{F}_3}$. Soit b le bloc non principal de kG de défaut C_3 , alors

$$D^b(\mu_k^1(b)) \cong D^b(\mu_k(C_3)).$$

Démonstration. D'après le lemme précédent, on a

$$D^b(\mu_k^1(b)) \cong D^b(End_{D^b(\mu_k^1(b))}(T)).$$

Donc il suffit de démontrer que $\mu_k(C_3) \cong End_{D^b(\mu_k^1(b))}(T)$.

On a $\mu_k(C_3) \cong Hom_{\mu_k(C_3)}(\mu_k(C_3), \mu_k(C_3))$. Or $\mu_k(C_3) = B_{C_3/1} \oplus B_{C_3/C_3}$, donc

$$\mu_k(C_3) \cong \begin{pmatrix} (B_{C_3/1}, B_{C_3/1}) & (B_{C_3/1}, B_{C_3/C_3}) \\ (B_{C_3/C_3}, B_{C_3/1}) & (B_{C_3/C_3}, B_{C_3/C_3}) \end{pmatrix}$$

où les $(-, -)$ désignent $Hom_{\mu_k(C_3)}(-, -)$.

Le complexe $T = P_1 \oplus T_1$, où P_1 est le complexe contenant le module P_1 en degré -1 et T_1 est le complexe

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\pi_{P_1, P_2}} P_2 \longrightarrow 0$$

$$End_{K^b \mu_k^1(b)}(T) = \begin{pmatrix} (P_1, P_1) & (P, T_1) \\ (T_1, P) & (T_1, T_1) \end{pmatrix}$$

où $(-, -)$ désignent $End_{K^b(\mu_k^1(b))}(-, -)$.

1. $End_{K^b(\mu_k^1(b))}(P_1) = End_{\mu_k^1(b)}(P_1)$ puisque le complexe n'a qu'un seul terme.
2. Soit $f \in Hom_{K^b(\mu_k^1(b))}(P_1, T_1)$. C'est-à-dire que f est un endomorphisme f de P_1 dont l'image est dans le noyau de π_{P_1, P_2} . Il est facile de vérifier que $f = c\eta_{P_1}^2$ pour $c \in k$. Donc $(P, T_1) = k\eta_{P_1}^2$.
3. Soit $f \in Hom_{K^b(\mu_k^1(b))}(T_1, P_1)$, c'est-à-dire que f est un endomorphisme de P_1 . En utilisant les homotopies, on voit que qu'il n'y a qu'une seule classe d'homotopie de morphisme de T_1 vers P_1 : $f \sim aId_{P_1}$ pour $a \in k$.
4. Soit $(f_1, f_2) \in Hom_{K^b(\mu_k^1(b))}(T_1, T_1)$, c'est-à-dire f_1 est un endomorphisme de P_1 et f_2 est un endomorphisme de P_2 , et on a les relations de commutation $f_2 \circ \pi_{P_1, P_2} = \pi_{P_1, P_2} \circ f_1$. Un calcul montre qu'il n'y a que deux classes d'homotopie : (Id_{P_1}, Id_{P_2}) et $(0, \eta_{P_2}^2)$.

On considère le morphisme ψ défini par :

- $\psi(Id_{P_1}) = Id_{Q_1}$, $\psi(\eta_{P_1}) = \eta_{Q_1}$ et $\psi(\eta_{P_1}^2) = \eta_{Q_1}^2$.
- $\psi([\eta_{P_1}^2]) = \pi_{Q_2, Q_1}$.
- $\psi([Id_{P_1}]) = \pi_{Q_1, Q_2}$.
- $\psi([1, 1]) = Id_{Q_2}$ et $\psi([0, \eta_{P_2}]) = \eta_{Q_2}$.

Il est alors élémentaire, mais peu plaisant, de vérifier que ψ est un isomorphisme d'algèbres. \square

Remarque 4.5.14. On a vu que le complexe T est un complexe basculant de $\mu_k^1(b)$ vers $\mu_k(C_3)$. Si on calcule l'évaluation en 1 de ce complexe, on a

$$0 \longrightarrow Ind_{Q_8}^G(W)^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}} Ind_{Z(Q_8) \times C_3}^G k_\epsilon \longrightarrow 0$$

où π est le morphisme de plus haut rang de $Ind_{Q_8}^G(W)^2$ vers $Ind_{Z(Q_8) \times C_3}^G k_\epsilon$. Ce complexe, qui est quasi-isomorphe à $Ind_{Q_8}^G(W) \oplus W$, n'est *pas* un complexe basculant de kGb vers kC_3 .

4.6 Exemple de $X_{p^3} \rtimes C_4$.

Soit p un nombre premier impair. On considère le groupe extra-spécial X_{p^3} défini par générateurs et relations :

$$X_{p^3} = \{a, b, z ; a^p = b^p = z^p = 1, [a, b] = z, [a, z] = [b, z] = 1\}.$$

Le groupe C_4 agit sur X_{p^3} de la façon suivante : soit $C_4 = \langle x \rangle$. Alors $x \mapsto \phi$, où ϕ est l'automorphisme de X_{p^3} défini par $\phi(a) = b$, $\phi(b) = a^{-1}$ et $\phi(z) = z$. On considère $G = X_{p^3} \rtimes C_4$ et $k = \overline{\mathbb{F}_2}$.

4.6. Exemple de $X_{p^3} \rtimes C_4$.

Proposition 4.6.1. *Soit $G = X_{p^3} \rtimes C_4$. Alors*

1. *Il y a $\frac{p^2-1}{4}$ blocs de défaut nul.*
2. *Il y a p -blocs de défaut C_4 .*

Démonstration. 1. Le centre de G est $\langle z \rangle$ et $G/Z(G) \cong (C_p \times C_p) \rtimes C_4$.

En particulier, $X_{p^3}/Z(X_{p^3}) \cong C_p \times C_p$. On a ainsi p^2 le kX_{p^3} -modules simples et donc $p^2 - 1$ modules simples non triviaux. Le stabilisateur dans C_4 de ces modules simples est trivial par construction du groupe. Il y a donc $\frac{p^2-1}{4}$ orbites de tels modules simples. Chacun de ces modules nous donne un bloc de défaut zéro.

2. Soit ζ une racine p -ième primitive de l'unité. On note k_ζ le $k\langle z \rangle$ -module simple non trivial correspondant. On pose

$$V_\zeta = \text{Ind}_{\langle a, z \rangle}^{X_{p^3}} \text{Inf}_{\langle z \rangle}^{\langle a, z \rangle} k_\zeta.$$

On pose $M := \text{Inf}_{\langle z \rangle}^{\langle a, z \rangle} k_\zeta$, il est clair que M est un $k\langle a, z \rangle$ -module simple et son stabilisateur dans X_{p^3} est $\langle a, z \rangle$, donc d'après la théorie de Clifford, le module V_ζ est indécomposable. L'algèbre kX_{p^3} étant semi-simple, le module V_ζ est simple. On peut maintenant vérifier que le stabilisateur dans G de V_ζ est G , donc V_ζ s'étend en un kG -module simple.

On obtient ainsi $p - 1$ modules simples non isomorphes, auxquels on ajoute le module trivial de G . Le calcul de leur stabilisateur permet d'affirmer que le défaut des ces p -blocs est C_4 . On a donc $\frac{p^2-1}{4} + p$ classes d'isomorphisme de modules simples. Ce nombre est aussi le nombre de classes de conjugaison de p' -éléments de G .

□

On va s'intéresser aux algèbres de Mackey p -locales des blocs de défaut C_4 . Comme dans la section précédente, on ne s'intéresse qu'au cas des blocs non principaux. On va démontrer la proposition suivante :

Proposition 4.6.2. *Soient $G = X_{p^3} \rtimes C_4$ et $k = \overline{\mathbb{F}_2}$.*

Soient $V_\zeta = \text{Ind}_{\langle a, z \rangle}^{X_{p^3}} \text{Inf}_{\langle z \rangle}^{\langle a, z \rangle} k_\zeta$ un module simple de dimension p et b le bloc de kG tel que $bV_\zeta = V_\zeta$. Alors la matrice de Cartan de $\mu_k^1(b)$ est :

- *Si $p \equiv 1 \pmod{4}$:*

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Si $p = -1 \pmod{4}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Corollaire 4.6.3. *Si $p = -1 \pmod{4}$, alors l'algèbre $\mu_k^1(b)$ n'est pas Mortia équivalente à $\mu_k(C_4)$. Cependant les diviseurs élémentaires de matrices de Cartan de $\mu_k^1(b)$ et $\mu_k(C_4)$ sont les mêmes.*

Démonstration. La matrice de Cartan de $\mu_k(C_4)$ est :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

□

La démonstration de la proposition 4.6.2 nécessite la connaissance des modules de 2-permutation indécomposables dans le bloc b qui contient $V_\zeta = \text{Ind}_{\langle a,z \rangle}^{X_{p^3}} \text{Inf}_{\langle z \rangle}^{\langle a,z \rangle} k_\zeta$. Pour plus de clarté, on note V_ζ le kX_{p^3} -module simple $\text{Ind}_{\langle a,z \rangle}^{X_{p^3}} \text{Inf}_{\langle z \rangle}^{\langle a,z \rangle} k_\zeta$ et \tilde{V}_ζ le module V_ζ que l'on étend à G .

Lemme 4.6.4. *Le module \tilde{V}_ζ est de 2-permutation si et seulement si $p = 1 \pmod{4}$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\text{Res}_{C_4}^G(\tilde{V}_\zeta)$ est un module de permutation. Sur l'anneau de valuation, l'action du générateur $x \in C_4$ sur \tilde{V}_ζ se fait par la matrice $M := \lambda(c_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \{0, \dots, p-1\}}$, où $\lambda^4 = \frac{1}{p^2}$ et $c_{\alpha,\beta} = \zeta^{-\alpha\beta}$. On choisit $\lambda = \frac{i}{\sqrt{p}}$.

Alors le caractère ordinaire de $\text{Res}_{C_4}^G(\tilde{V}_\zeta)$ est un somme de caractères ordinaires de C_4 , que l'on note, avec des notations évidentes, $\chi_1, \chi_{-1}, \chi_i, \chi_{-i}$. On a alors des entiers m_1, m_{-1}, m_i et m_{-i} tels que

$$\text{Res}_{C_4}^G(\tilde{V}_\zeta) = m_1\chi_1 + m_{-1}\chi_{-1} + m_i\chi_i + m_{-i}\chi_{-i}.$$

Comme $\dim_k(V) = p$, on a $m_1 + m_{-1} + m_i + m_{-i} = p$, et

$$\text{tr}(M) = m_1 + im_i - m_{-1} - im_{-i}.$$

Mais $\text{tr}(M) = \lambda \cdot \left(\sum_{\alpha=0}^{p-1} \zeta^{-\alpha^2} \right)$. C'est une somme de Gauss, donc $\text{tr}(M) = 1$ si $p = 1 \pmod{4}$ et $\text{tr}(M) = -1$ si $p = -1 \pmod{4}$.

4.6. Exemple de $X_{p^3} \rtimes C_4$.

On sait de plus que, en caractéristique p , le module $Res_{C_4}^G(V_\zeta)$ est endo-trivial, donc il existe des entiers m et n tels que

$$Res_{C_4}^G \tilde{V}_\zeta = n\Omega_{C_4} \oplus mk,$$

où Ω_{C_4} le noyau du morphisme d'augmentation $kC_4 \rightarrow k$. Le caractère ordinaire de $Res_{C_4}^G(V_\zeta)$ est :

$$\chi_{Res_{C_4}^G \tilde{V}_\zeta} = n\chi_{\Omega_{C_4}} + m\chi_{Ind_1^{C_4} K},$$

où $\chi_{\Omega_{C_4}}$ est le caractère ordinaire de Ω_{C_4} et $Ind_1^{C_4} K$ est le caractère ordinaire de kC_4 . Si $p \equiv 1 \pmod{4}$, alors $m_1 = m_{-1} + 1$ et $m_i = m_{-i}$, ce qui entraîne que $n = 0$ et donc $Res_{C_4}^G(\tilde{V}_\zeta)$ est un module de permutation. Si $p \equiv -1 \pmod{4}$, alors $m_1 = m_{-1} - 1$ et $m_i = m_{-i}$, ce qui entraîne que $n \neq 0$ et donc que $Res_{C_4}^G(\tilde{V}_\zeta)$ n'est pas un module de permutation. \square

Lemme 4.6.5. *Les modules de 2-permutation indécomposables sont :*

1. $Ind_{X_{p^3}}^G(V_\zeta)$ qui est un module projectif de dimension $4p$.
2. $Ind_{X_{p^3} \times C_2}^G(\hat{V}_\zeta)$ qui est de dimension $2p$ et de vortex C_2 , où \hat{V}_ζ est le module V_ζ que l'on étend à $X_{p^3} \times C_2$.
3. • Si $p \equiv 1 \pmod{4}$: \tilde{V}_ζ qui est de vortex C_4 et de dimension p .
• Si $p \equiv -1 \pmod{4}$: $\Omega_{C_4} \otimes_k \tilde{V}_\zeta$ qui est de vortex C_4 et de dimension $3p$, où Ω_{C_4} est le noyau du morphisme d'augmentation $kC_4 \rightarrow k$.

Démonstration. Le théorème 3.7.12 permet d'affirmer qu'il y a trois classes d'isomorphisme de modules de 2-permutation indécomposables.

1. Le premier module est projectif puisque induit d'un module projectif et il est indécomposable d'après le théorème d'indécomposabilité de Green. Ce module étant la couverture projective de V_ζ , il est dans le bloc b .
2. Le second est de 2-permutation puisque la restriction de \hat{V}_ζ à C_2 est de permutation. On peut calculer la structure de Loewy de ce module et vérifier que c'est une extension non scindée de \tilde{V}_ζ par lui même. Ce qui démontre à la fois que le module est indécomposable, mais aussi qu'il est dans le bloc b .
3. Si $p \equiv 1 \pmod{4}$, alors \tilde{V}_ζ est un module de 2-permutation.
4. Si $p \equiv -1 \pmod{4}$, alors le module \tilde{V}_ζ n'est pas un module de 2-permutation. Alors le module $M := \tilde{V}_\zeta \otimes_k \Omega$ est un module de 2-permutation indécomposable. En effet $Res_{C_4}^G(\tilde{V}_\zeta) = \Omega_{C_4} \oplus n.k \oplus perm$,

où k est le kC_4 -module trivial, et $perm$ un module de permutation. Alors

$$\begin{aligned} Res_{C_4}^G(\tilde{V}_\zeta \otimes_k \Omega_{C_4}) &= Res_{C_4}^G(\tilde{V}_\zeta) \otimes_k \Omega_{C_4} \\ &\cong \Omega_{C_4} \otimes_k \Omega_{C_4} \oplus k \otimes_k \Omega_{C_4} \oplus perm \otimes_k \Omega_{C_4} \end{aligned}$$

Les deux termes de droite sont des modules de permutation, et

$$\Omega_{C_4} \otimes_k \Omega_{C_4} \cong \Omega_{C_4}^* \otimes \Omega_{C_4} \cong End_{kC_4}(\Omega_{C_4}),$$

qui est un module de permutation puisque Ω_{C_4} est un module d'endo-permutation.

Le module M est indécomposable, car on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow V_\zeta \otimes_k \Omega_{C_4} \longrightarrow V_\zeta \otimes_k kC_4 \longrightarrow V_\zeta \otimes_k k \longrightarrow 0$$

donc M est le translaté d'Heller de V_ζ , qui est simple. Donc M est indécomposable. □

Démonstration de la proposition 4.6.2. On peut utiliser la Proposition 5.11 de [7], ou la formule de la Proposition 4.2.2. □

Du point de vue des algèbres de groupes, tous les blocs non principaux "se ressemblent", c'est-à-dire que les données calculatoires des blocs, tels que le défaut, la matrice de Cartan et de décomposition, ne permettent pas de les différencier du bloc principal. Cependant comme on vient de le voir, la matrice de Cartan des algèbres de Mackey p -locales semble permettre de comparer des données plus profondes : les modules de p -permutation indécomposables des blocs.

Question 4.6.6. • Si $p = 1 \pmod{4}$, y-a-t-il une équivalence de Morita :

$$\mu_k^1(b)\text{-Mod} \cong \mu_k(C_4)\text{-Mod} ?$$

• Si $p = -1 \pmod{4}$, y-a-t-il une équivalence de Dérivée

$$D^b(\mu_k^1(b)) \cong D^b(\mu_k(C_4)) ?$$

L'existence d'une équivalence de Morita, ou dérivée semble difficile à vérifier. Contrairement à l'exemple précédent, les foncteurs de Mackey projectifs sont difficile à comprendre et l'algèbre de Mackey n'étant pas symétrique, il semble difficile d'exhiber la structure de Loewy des projectifs indécomposables. Dans la suite de cette section, on indique quelques résultats, ainsi que quelques pistes pour cette question.

4.7. Exemple de $X_{p^3} \rtimes Q_8$.

Lemme 4.6.7. *On note k_ζ le $k\overline{N}_G(C_4)$ module de dimension 1 induit par le caractère ζ .*

- *On a la décomposition suivante :*

$$\text{Ind}_{N_G(C_2)}^G \text{Inf}_{\overline{N}_G(C_2)}^{N_G(C_2)} \text{Ind}_{\overline{N}_G(C_2)/(C_4/C_2)}^{\overline{N}_G(C_2)} k_\zeta \cong \text{Ind}_{X_{p^3} \times C_2}^G (\hat{V}_\zeta) \oplus \frac{p-1}{2} \text{Ind}_{X_{p^3}}^G (V_\zeta).$$

- *Si $p = 1 \pmod 4$, alors*

$$\text{Ind}_{N_G(C_4)}^G \text{Inf}_{\overline{N}_G(C_4)}^{N_G(C_4)} k_\zeta \cong \tilde{V}_\zeta \oplus \frac{p-1}{4} \text{Ind}_{X_{p^3}}^G (V_\zeta).$$

- *Si $p = -1 \pmod 4$, alors*

$$\text{Ind}_{N_G(C_4)}^G \text{Inf}_{\overline{N}_G(C_4)}^{N_G(C_4)} k_\zeta \cong \Omega_{C_4} \otimes_k \tilde{V}_\zeta \oplus \frac{p-3}{4} \text{Ind}_{X_{p^3}}^G (W).$$

On peut ainsi exprimer les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables de la façon suivante :

Corollaire 4.6.8. *On a les décompositions suivantes :*

- $B_{G/C_2} \otimes \text{Ind}_{\overline{N}_G(C_2)/(C_4/C_2)}^{\overline{N}_G(C_2)} k_\zeta \cong P_{C_2, \zeta} \oplus \frac{p-1}{2} FP_{\text{Ind}_{X_p^3}^G W}$.
- *Si $p = 1 \pmod 4$, alors $B_{G/C_4} \otimes k_\zeta \cong P_{C_4, \zeta} \oplus \frac{p-1}{4} FP_{\text{Ind}_{X_p^3}^G W}$.*
- *Si $p = -1 \pmod 4$, alors $B_{G/C_4} \otimes k_\zeta \cong P_{C_4, \zeta} \oplus \frac{p-3}{4} FP_{\text{Ind}_{X_p^3}^G W}$.*

4.7 Exemple de $X_{p^3} \rtimes Q_8$.

Il y a un homomorphisme de groupe de Q_8 vers $\text{Aut}(X_{p^3}) \cong GL_2(\mathbb{F}_p)$. Ce morphisme est défini sur les générateurs i et j de Q_8 par :

$$\begin{aligned} i &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ j &\mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tel que $x^2 + y^2 = -1$. Une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{F}_p)$ induit l'automorphisme de X_{p^3} suivant :

$$\begin{aligned} a &\mapsto a^\alpha b^\beta \\ b &\mapsto a^\gamma b^\delta \\ z &\mapsto z^{\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

On peut étendre l'exemple précédent aux groupes $X_{p^3} \rtimes Q_8$. La situation n'était pas simple pour les groupes $X_{p^3} \rtimes C_4$, mais elle est encore plus compliquée pour les groupes $X_{p^3} \rtimes Q_8$. On présente cet exemple parce que, pour des personnes non expertes en représentations modulaires, il peut être intrigant. Toutefois, nous ne sommes actuellement pas capable de donner les démonstrations complètes et nous observons que les formules ci-dessous sont vérifiées dans les petits cas, et dans quelques autres cas à l'aide de GAP4. Soit k un corps de caractéristique 2 "assez gros".

Lemme 4.7.1. *Soit $G = X_{p^3} \rtimes Q_8$, alors dans kG , il y a :*

- $\frac{p^2-1}{8}$ blocs de défaut zéro.
- p blocs de défaut Q_8 .

Démonstration. La démonstration est similaire à la démonstration de la proposition 4.6.1. □

Soit $V_\zeta = \text{Ind}_{\langle a, z \rangle}^{X_{p^3}} \text{Inf}_{\langle z \rangle}^{\langle a, z \rangle} k_\zeta$ un kX_{p^3} -module simple de dimension p . Alors V_ζ s'étend en un kG -module simple, que l'on note \tilde{V}_ζ de dimension p . Soit b le bloc de kG tel que $b\tilde{V}_\zeta = \tilde{V}_\zeta$.

Lemme 4.7.2. *Si $p \not\equiv 1 \pmod{4}$, alors \tilde{V}_ζ n'est pas un kG -module de 2-permutation.*

Démonstration. Il est facile de vérifier que la matrice du générateur i sur V_ζ est $\lambda(c_{a,b})_{a,b \in \{0, \dots, p-1\}}$, où $\lambda^4 = 1$ et $c_{a,b} = \zeta^{-ab}$. Donc en notant $\langle i \rangle$ le sous-groupe de Q_8 engendré par i , on a $\text{Res}_{X_{p^3} \rtimes \langle i \rangle}^G \tilde{V}_\zeta$ est isomorphe au module du lemme 4.6.4. Donc si $p \not\equiv 1 \pmod{4}$, le module \tilde{V}_ζ n'est pas de 2-permutation. Dans le cas où $p \equiv 1 \pmod{4}$, il existe $\alpha \in \mathbb{F}_p$ tel que $\alpha^2 = -1$. Dans ce cas, on choisit de représenter le générateur j de Q_8 par la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$. On peut alors vérifier que l'action du générateur j de Q_8 sur \tilde{V}_ζ est donnée par la matrice $\gamma(\delta_{\alpha i, j})$, où $\gamma^4 = 1$ et δ est le symbole de Kronecker. □

Observation 4.7.3. *Si $p \equiv 1 \pmod{8}$ alors \tilde{V}_ζ est un module de 2-permutation pour $\frac{p-1}{2}$ racines p -ième primitives de l'unité ζ et n'est pas un module de 2-permutations pour les $\frac{p-1}{2}$ restantes.*

Idée de la démonstration. Nous ne connaissons pas de démonstration générale pour ce résultat, mais voici une idée de démonstration possible. D'après la théorie générale, on sait que $V := \text{Res}_{Q_8}^G(\tilde{V}_\zeta)$ est un module endotrivial et les modules endo-triviaux du groupe Q_8 sont bien connus. Le module

4.7. Exemple de $X_{p^3} \rtimes Q_8$.

V_ζ est donc de 2-permutation si et seulement si le module trivial k est facteur direct de V .

Le module k est facteur direct de V si et seulement si il existe un vecteur $v \in V$ invariant par l'action des générateurs de Q_8 et une forme k -linéaire ϕ invariante sur V telle que $\phi(v) = 1$. En écrivant proprement l'action des matrices des générateurs de Q_8 sur ce vecteur $v \in V$, on a :

$$k \mid V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Im}(M - Id),$$

où M est une matrice carrée indexée par le groupe $\Gamma := (\mathbb{F}_p)^\times / \langle \alpha \rangle$, construite comme suit. On pose :

$$Z := \zeta + \zeta^\alpha + \zeta^{-\alpha} + \zeta^{-1},$$

et pour $i \in \Gamma$, on pose

$$Z_i := \zeta^i + \zeta^{\alpha i} + \zeta^{-\alpha i} + \zeta^{-i}.$$

Alors le coefficient (i, j) de la matrice M est Z_{ij} . Il semble que pour la moitié des racines p -ème de l'unité le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans l'image de $M - Id$ et pour l'autre moitié, il ne l'est pas. \square

Voici une démonstration dans le cas (très favorable) $p = 17$:

Proposition 4.7.4. *Supposons $p = 17$, alors*

- *si le polynôme minimal de ζ est*

$$P_1(X) = X^8 + X^5 + X^4 + X^3 + 1,$$

alors le module \tilde{V}_ζ est de 2-permutation.

- *Si le polynôme minimal de ζ est*

$$P_2(X) = X^8 + X^7 + X^6 + X^4 + X^2 + X + 1,$$

alors \tilde{V}_ζ n'est pas un module de 2-permutation.

Démonstration. On pose $\alpha = 4$ une racine carrée de -1 et on pose

$$Z = \zeta + \zeta^\alpha + \zeta^{-\alpha} + \zeta^{-1},$$

alors $Z^3 = 1$. Donc Z est soit 1 soit une racine cubique primitive de 1 que l'on note j et j^2 . De même, on note $Z_3 = \zeta^3 + \zeta^{3\alpha} + \zeta^{-3\alpha} + \zeta^{-3}$ et on peut vérifier que $Z_3^3 = 1$. Le polynôme cyclotomique $\Phi_{17}(X) \in k[X]$ est produit des deux polynômes P_1 et P_2 qui sont irréductibles et de degré 8. Si ζ est une racine de P_1 , alors $\zeta^2, \zeta^4, \dots, \zeta^{16}$ sont racines de P_1 , ce qui arrive si et seulement si $Z = 1$. En particulier si $Z = 1$ alors $Z_3 \in \{j, j^2\}$ et si $Z \in \{j, j^2\}$ alors $Z_3 = 1$.

Dans ce cas favorable, la matrice M est :

$$M := \begin{pmatrix} Z & Z^2 & Z_3 & Z_3^2 \\ Z^2 & Z & Z_3^2 & Z_3 \\ Z_3 & Z_3^2 & Z^2 & Z \\ Z_3^2 & Z_3 & Z & Z^2 \end{pmatrix}$$

Si $Z = 1$, on vérifie que $(M - Id) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si $Z_3 = 1$, on doit

résoudre le système :

$$\begin{cases} Z^2(a+b) + c + d = 1 \\ a + b + Z(c+d) = 1, \end{cases}$$

qui n'a pas de solution. □

Lemme 4.7.5. *Un système de représentants des classes d'isomorphisme des kGb -modules de 2-permutation indécomposables est :*

1. $Ind_{X_{p^3}}^G V_\zeta$ qui est de dimension $8p$ et projectif.
2. $Ind_{X_{p^3} \rtimes C_2}^G \hat{V}_\zeta$ de dimension $4p$ et de vortex C_2 .
3. $Ind_{X_{p^3} \rtimes C_4}^G M$, où M est $X_{p^3} \rtimes C_4$ module de de p -permutation indécomposable de vortex C_4 qui est dans le bloc qui contient \tilde{V}_ζ . C'est un module de vortex C_4 et de dimension $2p$ si $p = 1 \pmod{4}$ et de dimension $6p$ si $p = -1 \pmod{4}$.
4. $\tilde{V}_\zeta \otimes S$, où S est la source du module simple \tilde{V}_ζ . C'est un module de Vortex Q_8 et de dimension p ou $9p$ pour $p = 1 \pmod{8}$ et de dimension np où n le représentant de p dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ dans les autres cas.

Démonstration. Pour les 3 premières assertions le résultat est une conséquence de la section 4.6. Pour l'assertion 4, nous n'avons pas de démonstration de ce résultat, la dimension a été calculée, dans des exemples, à l'aide de *GAP4*, on peut vérifier que le résultat est compatible avec la dimension des modules endo-triviaux pour le groupe Q_8 . □

4.7. Exemple de $X_{p^3} \rtimes Q_8$.

Observation 4.7.6. *La matrice de Cartan de $\mu_k^1(b)$ est, en ne notant que la partie triangulaire supérieure :*

- Si $p = 3 \pmod 8$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ & 10 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ & & 10 & 6 & 6 & 6 \\ & & & 10 & 6 & 6 \\ & & & & 8 & 4 \\ & & & & & 8 \end{pmatrix}.$$

- Si $p = 5 \pmod 8$:

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ & 6 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ & & 6 & 6 & 4 & 2 \\ & & & 6 & 4 & 2 \\ & & & & 8 & 4 \\ & & & & & 8 \end{pmatrix}.$$

- Si $p = 7 \pmod 8$:

$$\begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 & 8 & 5 & 7 \\ & 10 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ & & 10 & 6 & 6 & 6 \\ & & & 10 & 6 & 6 \\ & & & & 8 & 4 \\ & & & & & 8 \end{pmatrix}.$$

- Si $p = 1 \pmod 8$, alors la matrice de Cartan est soit :

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ & 6 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ & & 6 & 2 & 4 & 2 \\ & & & 6 & 4 & 2 \\ & & & & 8 & 4 \\ & & & & & 8 \end{pmatrix},$$

soit

$$\begin{pmatrix} 16 & 5 & 5 & 5 & 6 & 1 \\ & 6 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ & & 6 & 2 & 4 & 2 \\ & & & 6 & 4 & 2 \\ & & & & 8 & 4 \\ & & & & & 8 \end{pmatrix}.$$

Les diviseurs élémentaires de toutes ces matrices sont : $(1, 1, 2, 4, 4, 240)$.

Lemme 4.7.7. La matrice de Cartan de $\mu_k(Q_8)$ est :

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ & 6 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ & & 6 & 2 & 4 & 2 \\ & & & 6 & 4 & 2 \\ & & & & 8 & 4 \\ & & & & & 8 \end{pmatrix},$$

et ses diviseurs élémentaires sont $(1, 1, 2, 4, 4, 240)$.

Question 4.7.8. Y-a-t-il une équivalence de catégories dérivées :

$$D^b(\mu_k^1(b)) \cong D^b(\mu_k(Q_8))?$$

4.8 Conclusion.

Soit $R = \mathcal{O}$ ou k . Soient G un groupe fini et b un bloc de RG de défaut abélien D . Soit b' le correspondant de Brauer de b dans $N_G(D)$. On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} b \in Z(RG) & \longrightarrow & b^\mu \in Z(\mu_R^1(G)) \\ \downarrow & & \\ b' \in Z(RN_G(D)) & \longrightarrow & b'^\mu \in Z(\mu_R^1(N_G(D))) \end{array}$$

Il a été conjecturé par Broué que les blocs RGb et $RN_G(D)$ sont fortement liés. Le lien pouvant être visible au niveau des caractères ordinaires des deux blocs avec l'existence d'une isométrie parfaite ou d'une isotypie, ou il peut être visible au niveau de l'algèbre avec l'existence d'un isomorphisme, ou enfin au niveau des catégories de modules avec l'existence d'une équivalence de Morita ou d'une équivalence dérivée.

1. L'exemple du bloc principal de S_3 en caractéristique 2 montre que si deux blocs d'algèbres de groupes sont isomorphes, les algèbres de Mackey p -locales de ces blocs ne sont pas nécessairement isomorphes.
2. L'exemple d'un bloc non principal de $SL(2, \mathbb{F}_3)$ montre que si deux blocs d'algèbres de groupes sont Morita équivalents, les algèbres de Mackey p -locales correspondantes ne le sont pas forcément.

4.8. Conclusion.

3. Les deux derniers exemples de $X_{p^3} \rtimes C_4$ et $X_{p^3} \rtimes Q_8$ ainsi que l'exemple du bloc principal de S_3 montrent que pour des blocs d'algèbres de groupes Morita équivalents, il est possible que les algèbres de Mackey p -locales correspondantes soient Morita équivalentes. De plus le fait qu'une équivalence de Morita entre blocs d'algèbres de groupes induise, ou non, une équivalence de Morita entre les algèbres de Mackey p -locales correspondantes, semble dépendre d'une "donnée". Cette donnée lisible dans les catégories de modules sur les blocs d'algèbres de groupes, n'est pas un invariant d'équivalences de Morita.
4. Dans tous les exemples considérés, ainsi que de nombreux autres exemples non détaillés ici (pour $G = A_5$ voir remarque 4.8.2), qui sont dans le cadre de la conjecture de défaut abélien de Broué, les matrices de Cartan des algèbres de Mackey p -locales des blocs correspondants possèdent les mêmes diviseurs élémentaires.

Ces différents exemples permettent donc d'éliminer les idées trop naïves que l'on pourrait avoir. Les exemples de $SL(2, \mathbb{F}_3)$ ainsi que $X_{p^3} \rtimes C_4$ et $X_{p^3} \rtimes Q_8$ peuvent être troublants dans un premier temps, mais ils permettent de mettre en évidence l'importance des modules de p -permutation pour la question des équivalences entre blocs d'algèbres de Mackey. Il faut donc certainement chercher un type d'équivalence entre blocs d'algèbres de groupes qui respecte cette classe de modules. L'exemple le plus naturel d'équivalence possédant cette propriété a été introduit par Rickard avec les équivalences splendides. Il est d'autant plus rassurant que, comme l'explique Rickard dans la section 7. de ([30]), en général les équivalences de Morita ne sont pas splendides, il faut remplacer le bimodule qui induit l'équivalence de Morita par un complexe bilatère splendide.

La question la plus naturelle à poser est donc :

Question 4.8.1. *Soient G et H deux groupes finis. Soient b un bloc de RG et c un bloc de RH . On suppose que RGb et RHc sont splendidement dérivés équivalents. Alors, y-a-t-il une équivalence*

$$D^b(\mu_R^1(b)) \cong D^b(\mu_R^1(c)) ?$$

Remarque 4.8.2. Soit G un groupe fini et b un bloc de kG de défaut abélien D . Soit b' le correspondant de Brauer de b dans $N_G(D)$. A l'aide d'un programme GAP4, nous avons calculé les diviseurs élémentaires des matrices de Cartan de $\mu_k^1(b)$ et $\mu_k^1(b')$ dans de très nombreux cas. Et pour chaque cas les diviseurs élémentaires sont les mêmes. Cependant si on calcule les diviseurs élémentaires des matrices de Cartan du bloc principal de $\mu_k(A_5)$ en caractéristique 2 et de la matrice de Cartan de $\mu_k(A_4)$ que l'on trouve

dans les annexes de [38], on ne trouve pas les mêmes diviseurs élémentaires. Il se trouve qu'il y a une petite erreur dans la matrice de Cartan de A_5 . Avec les mêmes notations, l'erreur est située dans la matrice de Ψ pour A_5 en caractéristique zéro. Il est écrit que $S_{C_2,1}(C_2 \times C_2) \cong \sigma_{C_2 \times C_2,1}$, or

$$\begin{aligned}
 S_{C_2,1}(C_2 \times C_2) &= \text{Ind}_{N_{A_5}(C_2)}^{A_5} \text{Inf}_{\overline{N}_{A_5}(C_2)}^{N_{A_5}(C_2)} S_{1,1}^{C_2}(C_2 \times C_2) \\
 &= \bigoplus_{g \in [C_2 \times C_2 \setminus A_5 / C_2 \times C_2]} (\text{Inf}_{\overline{N}_{A_5}(C_2)}^{N_{A_5}(C_2)} S_{1,1}^{C_2}) (C_2 \times C_2 \cap {}^g(C_2 \times C_2)) \\
 &= \bigoplus_{g \in [C_2 \times C_2 \setminus A_4 / C_2 \times C_2]} (\text{Inf}_{\overline{N}_{A_5}(C_2)}^{N_{A_5}(C_2)} S_{1,1}^{C_2}) (C_2 \times C_2) \\
 &= K \oplus K_\omega \oplus K_{\bar{\omega}} \\
 &= \sigma_{C_2 \times C_2,1} \oplus \sigma_{C_2 \times C_2,\omega} \oplus \sigma_{C_2 \times C_2,\bar{\omega}}.
 \end{aligned}$$

La matrice de Cartan de l'algèbre de Mackey p -locale du bloc principal de A_5 est en fait :

$$C := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cette matrice à bien les mêmes diviseurs élémentaires que la matrice de Cartan de $\mu_k(A_4)$.

Chapitre 5

Blocs d'algèbres de Mackey cohomologiques.

5.1 Introduction

Lorsque l'on étudie les matrices de décomposition d'une algèbre de Mackey p -locale, on voit qu'elle possède une grosse sous-matrice qui correspond à la matrice de décomposition de l'algèbre de Mackey cohomologique, ce qui tend à dire que cette dernière est à considérer dans un premier temps. De plus Thévenaz et Webb ont démontré que les idempotents primitifs de l'algèbre de Mackey cohomologique sont eux aussi en bijection avec les blocs de l'algèbre de groupe. Donc la question 4.8.1 a un sens pour les algèbres de Mackey cohomologiques.

Dans ce chapitre, on présente l'équivalence de Yoshida pour les foncteurs de Mackey cohomologiques, ainsi qu'une version par blocs de cette équivalence. Dans la seconde partie du chapitre, on utilise cette équivalence pour construire des foncteurs entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques. On va voir qu'on peut étendre une équivalence de Morita splendide entre blocs d'algèbres de groupes en une équivalence entre les catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques correspondantes. Finalement, on s'intéresse au cas des équivalences dérivées. En application de ces résultats, on retrouve partiellement un résultat de Serge Bouc sur les matrices de Cartan des algèbres de Mackey cohomologiques des blocs nilpotents. L'utilisation de ce nouveau point de vue permet de comprendre qu'il est très naturel que les algèbres de Mackey des blocs nilpotents jouent un rôle particulier.

5.2 Foncteurs de Mackey cohomologiques

Soit R un anneau commutatif unitaire et G un groupe fini. La définition des foncteurs de Mackey cohomologiques est la plus naturelle lorsque l'on prend le point de vue de Green.

Définition 5.2.1. Un foncteur de Mackey M pour G sur R est cohomologique si pour tous sous-groupes $K \leq H$ de G , on a :

$$t_K^H r_K^H = |H : K| Id_{M(H)}.$$

En utilisant les équivalences de catégories de foncteurs de Mackey, on obtient des définitions équivalentes pour la notion de foncteur de Mackey cohomologique. On note, abusivement, par $Comack_R(G)$ la catégorie des foncteurs de Mackey cohomologiques, sans prendre en compte la définition choisie.

Exemple 5.2.2. Les foncteurs de points fixes ainsi que leurs dérivés sont des foncteurs de Mackey cohomologiques. La démonstration est évidente pour les foncteurs de points fixes. Pour les foncteurs dérivés on utilise un argument de décalage.

Exemple 5.2.3. Le foncteur de Burnside n'est en général pas cohomologique si G n'est pas le groupe trivial, puisque pour un sous-groupe K de G , on a :

$$\begin{aligned} Ind_1^G Res_1^G(G/K) &= Ind_1^G(|G : K|1/1) \\ &= |G : K|G/1. \end{aligned}$$

Dans le théorème suivant, on rappelle les résultats importants sur les foncteurs de Mackey cohomologiques.

Théorème 5.2.4. *[[38],[6]] Soit R un anneau commutatif unitaire et G un groupe fini.*

1. *Soit V un RG -module. Les foncteurs FP_V et FQ_V sont cohomologiques.*
2. *Les quotients et sous-foncteurs d'un foncteur de Mackey cohomologique sont cohomologiques.*
3. *Un foncteur de Mackey M est cohomologique si et seulement si il est quotient d'un foncteur de points fixes FP_V où V est un facteur de permutation.*
4. *Les foncteurs de Mackey cohomologiques projectifs sont les FP_V , où V un facteur de permutation.*

5.2. Foncteurs de Mackey cohomologiques

5. Soit $H \leq G$ et M un foncteur de Mackey cohomologique pour H . Alors $\text{Ind}_H^G(M)$ est un foncteur de Mackey cohomologique pour G . De même, si N est un foncteur de Mackey cohomologique pour G , alors $\text{Res}_H^G(N)$ est un foncteur de Mackey cohomologique pour le groupe H .
6. Soit k un corps de caractéristique zéro où ne divisant pas l'ordre du groupe. Alors $S_{H,V}$ est cohomologique si et seulement si $H = 1$.
7. Soit k un corps de caractéristique $p \mid |G|$. Alors $S_{H,V}$ est cohomologique si et seulement si H est un p -groupe.
8. $\text{Comack}_R(G) \cong \text{co}\mu_R(G)\text{-Mod}$, où $\text{co}\mu_R(G)$ est l'algèbre de Mackey cohomologique. Cette algèbre est le quotient de $\mu_R(G)$ par l'idéal engendré par les $t_K^H r_K^H - |H : K| t_H^H$ pour $K \leq H$.
9. $\text{co}\mu_R(G) \cong \text{FP}_{R\Omega_G}(\Omega_G) \cong \text{End}_{RG}(R\Omega_G)$ avec $\Omega_G = \bigsqcup_{H \leq G} G/H$.
10. Le foncteur $V \mapsto \text{FP}_V$ est un foncteur plein et fidèle de $RG\text{-Mod}$ vers $\text{Comack}_R(G)$. La catégorie $RG\text{-Mod}$ peut donc être vue comme sous-catégorie pleine de $\text{Comack}_R(G)$.
11. Soit $R = k$ ou \mathcal{O} , alors $\text{Comack}_R(G)$ est une sous-catégorie pleine de $\text{Mack}_R(G, 1)$. L'algèbre $\text{co}\mu_R(G)$ est un quotient de $\mu_R^1(G)$.

Remarque 5.2.5. Lorsque l'on voit $RG\text{-Mod}$ comme sous-catégorie pleine de $\text{Comack}_R(G)$, il convient de faire attention. Les RG -modules projectifs induisent des foncteurs de Mackey cohomologiques projectifs. Mais inversement les foncteurs de Mackey projectifs ne sont pas forcément projectifs dans cette sous-catégorie pleine. Par exemple si V est un RG -module de p -permutation qui n'est pas projectif, alors FP_V est un foncteur de Mackey cohomologique projectif, mais ça n'est pas un foncteur projectif dans la catégorie $RG\text{-Mod}$.

Il y a un foncteur, appelé foncteur de cohomologification de $\text{Mack}_R(G) \rightarrow \text{Comack}_R(G)$ défini par $M \mapsto M^{\text{coh}}$, où M^{coh} est le plus grand quotient cohomologique de M . On a

Proposition 5.2.6. *Soit G un groupe fini, alors*

1. $B^{\text{coh}} = \text{FP}_R$. Plus généralement, si X est un G -ensemble, alors

$$B_X^{\text{coh}} = \text{FP}_{RX}.$$

2. Si $R = k$ est un corps de caractéristique $p > 0$, alors $S_{H,V}^{\text{coh}} = S_{H,V}$ si H est un p -groupe et $S_{L,V}^{\text{coh}} = 0$ si L n'est pas un p -groupe.

5.3 Equivalence de Yoshida

On va démontrer que la catégorie des foncteurs de Mackey cohomologiques est équivalente à la catégorie des foncteurs contravariants de $perm_R(G)$ vers $R\text{-Mod}$, où $perm_R(G)$ est la catégorie des modules RG -modules de permutation. Pour cela, on a besoin de quelques constructions. La première est le foncteur de linéarisation dans sa version bivariante :

Lemme 5.3.1. *Soit X un G -ensemble fini, on pose $\Pi(X) = RX$ le RG -module de permutation ayant pour base X . Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de G -ensembles. On définit $\Pi^*(f) : \Pi(Y) \rightarrow \Pi(X)$ par :*

$$\Pi^*(f)\left(\sum_{y \in Y} r_y y\right) = \sum_{x \in X} r_{f(x)} x.$$

On définit $\Pi_*(f) : \Pi(Y) \rightarrow \Pi(Y)$ par :

$$\Pi_*(f)\left(\sum_{x \in X} r_x x\right) = \sum_{x \in X} r_x f(x).$$

Alors (Π^*, Π_*) est un foncteur bivariant de G -ens vers $RG\text{-Mod}$. De plus, ce foncteur possède les propriétés suivantes :

Additivité : Soient X et Y deux G -ensembles et $(X \sqcup Y, i_X, i_Y)$ le coproduit de ces G -ensembles. Alors $\Pi(X) \oplus \Pi(Y) \cong \Pi(X \sqcup Y)$, et l'isomorphisme est donné par $(\Pi^(i_X), \Pi^*(i_Y))$ et $(\Pi_*(i_X), \Pi_*(i_Y))$.*

Formule de Mackey : Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ \downarrow b & & \downarrow c \\ Z & \xrightarrow{d} & T \end{array}$$

un diagramme cartésien de G -ensembles, alors

$$\begin{array}{ccc} \Pi(X) & \xleftarrow{\Pi^*(a)} & \Pi(Y) \\ \downarrow \Pi_*(b) & & \downarrow \Pi_*(c) \\ \Pi(Z) & \xleftarrow{\Pi^*(d)} & \Pi(T) \end{array}$$

est un diagramme commutatif.

Remarque 5.3.2. Le foncteur (Π^*, Π_*) est donc un “foncteur de Mackey” pour G sur l'anneau non commutatif RG .

5.3. Equivalence de Yoshida

Démonstration. Il est clair que (Π, Π^*) est un foncteur de la catégorie des G -ensembles finis vers la catégorie des RG -modules. Soient X, Y et Z trois G -ensembles. Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux morphismes de G -ensembles. Soit $z \in Z$, alors on a

$$\begin{aligned} (\Pi^*(f) \circ \Pi^*(g))(z) &= \sum_{y \in g^{-1}(z)} \Pi^*(f)(y) \\ &= \sum_{y \in g^{-1}(z)} \sum_{x \in f^{-1}(y)} x \\ &= \sum_{x \in (g \circ f)^{-1}(z)} x \\ &= \Pi^*(g \circ f)(z). \end{aligned}$$

Donc (Π, Π^*) est bien un foncteur contravariant de la catégorie des G -ensembles finis vers la catégorie des RG -modules.

Soient X et Y deux G -ensembles finis et soient i_X et i_Y les injections canoniques de X et Y respectivement, vers $X \sqcup Y$. Alors,

$$(\Pi(i_X)^*, \Pi(i_Y)^*) \circ (\Pi(i_X)_*, \Pi(i_Y)_*)(x, y) = \Pi(i_X)^*(x, y) + \Pi(i_Y)^*(x, y) = (x, y).$$

de même on a $(\Pi(i_X)_*, \Pi(i_Y)_*) \circ (\Pi(i_X)^*, \Pi(i_Y)^*) = Id_{R(X \sqcup Y)}$.

Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ \downarrow b & & \downarrow c \\ Z & \xrightarrow{d} & T \end{array}$$

un carré cartésien de G -ensembles finis. Ce qui veut dire que le G -ensemble X est isomorphe au produit fibré (pullback) de Y et Z au dessus de T . L'isomorphisme est donné par l'application $x \mapsto (a(x), b(x))$. Soit $y \in Y$, on a :

$$\Pi_*(b)\Pi^*(a)(y) = \sum_{x \in a^{-1}(y)} b(x),$$

et

$$\Pi^*(d)\Pi_*(c)(y) = \sum_{z \in d^{-1}(c(y))} z.$$

Comme X est isomorphe au produit fibré de Y et Z au dessus de T , on a

$$\begin{aligned} z \in d(c(y)) &\Leftrightarrow \exists! x \in X; z = b(x) \text{ and } y = a(x) \\ &\Leftrightarrow \exists! x \in a^{-1}(y); z = b(x), \end{aligned}$$

D'où $\Pi_*(b)\Pi^*(a)(y) = \Pi^*(d)\Pi_*(c)(y)$. □

On note $Fun_R(G)$ la catégorie des foncteurs R -linéaires contravariants de $perm_R(G)$ vers $R\text{-Mod}$. La construction du lemme 5.3.1 permet de définir un foncteur Γ de $Fun_R(G)$ vers $Mack_R(G)$ par pré-composition : soit $F \in Fun_R(G)$, alors $\Gamma(F) = F \circ \Pi$.

Lemme 5.3.3. *Soit $F \in Fun_R(G)$, alors $\Gamma(F)$ est un foncteur de Mackey cohomologique.*

Démonstration. Soient $K \leq H$ des sous-groupes de G . Pour montrer que le foncteur de Mackey $\Gamma(F)$ est cohomologique, on doit montrer que $t_H^K r_H^K = |K : H| Id_{(\Gamma(F))(H)}$. Mais $\Gamma(F)$ est un foncteur de Mackey au sens de Dress et la définition des foncteurs cohomologique a été donnée au sens de Green. Par l'équivalence de catégories du théorème 3.2.17, on a : $\Gamma(F)(H) = \Gamma(F)(G/H) = F(R(G/H))$. On note π_K^H la projection canonique de $G/K \rightarrow G/H$, alors $t_K^H = \Gamma(F)_*(\pi_K^H)$ et $r_K^H = \Gamma(F)^*(\pi_K^H)$. On a donc :

$$\begin{aligned} t_K^H r_K^H &= F(\Pi_*(\pi_K^H)) \circ F(\Pi^*(\pi_K^H)) \\ &= F(\Pi^*(\pi_K^H) \circ \Pi_*(\pi_K^H)). \end{aligned}$$

Or il est clair que $\Pi^*(\pi_K^H) \circ \Pi_*(\pi_K^H) = |H : K| Id_{R(G/K)}$. □

Inversement, si M est un foncteur de Mackey pour le groupe G , on a un foncteur de Yoneda $Y(M)$ défini comme suit : pour X un G -ensemble fini, $Y(M)(RX) = Hom_{Comack_R(G)}(FP_{RX}, M)$.

Théorème 5.3.4 (Yoshida). *Les foncteurs Γ et Y sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre.*

Remarque 5.3.5. La démonstration proposée ici est celle donnée par Serge Bouc lors du cours : "Foncteurs de Mackey et foncteurs à bi-ensembles" à l'université de Picardie Jules Verne en 2011.

Démonstration. La première étape de la démonstration consiste à démontrer que (Γ, Y) est un couple de foncteurs adjoints. Pour ça, on donne l'unité et la co-unité de l'adjonction. L'unité est donnée ainsi :

soit $F \in Fun_R(G)$, Soient X et Z deux G -ensembles finis et $u \in F(RX)$, alors

$$\begin{aligned} \eta_F(RX)(u)_Z : FP_{RX}(Z) &\rightarrow \Gamma(F)(Z) \\ \alpha &\mapsto F(\alpha)(u) \end{aligned}$$

La co-unité est donnée par :

soit M un foncteur de Mackey, soit X un G -ensemble fini, alors

$$\begin{aligned} \epsilon_M(X) : Y(M)(RX) &\rightarrow M(X) \\ \alpha &\mapsto \alpha_X(Id_{RX}). \end{aligned}$$

5.3. Equivalence de Yoshida

Soit $F \in Fun_R(G)$. Montrons que la composée :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma Y \Gamma(F) & \xrightarrow{\epsilon_{\Gamma(F)}} & \Gamma(F) \\ \Gamma(\eta_F) \uparrow & \nearrow & \\ \Gamma(F) & & \end{array}$$

est l'identité de $\Gamma(F)$. Soit X un G -ensemble et soit $u \in F(RX)$. La composée des deux applications est

$$\begin{aligned} \epsilon_{\Gamma(F)(X)} \circ \eta_F(RX)(u) &= \eta_F(RX)(u)_X (Id_{RX}) \\ &= F(Id_{RX})(u) = u. \end{aligned}$$

De même, soit M un foncteur de Mackey. On doit montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y \Gamma Y \Gamma M & \xrightarrow{Y(\epsilon_M)} & Y(M) \\ \eta_{Y(M)} \uparrow & \nearrow id_{Y(M)} & \\ Y(M) & & \end{array}$$

Soit X un G -ensemble fini et soit α un morphisme de foncteurs de Mackey de FP_{RX} vers M , alors

$$\eta_{Y(M)}(RX)(\alpha)_Y(f) = \alpha \circ f.$$

Soit γ un morphisme de foncteurs de Mackey de FP_{RX} vers M et $f \in FP_{RX}(Y)$, alors

$$\epsilon_M(Y)(\gamma_Y(f)) = (\gamma_Y(f)_Y)(Id_Y).$$

Donc la composée de ces deux applications est

$$\begin{aligned} Y(\epsilon_M) \circ \eta_{Y(M)}(RX)(\alpha) &= \eta_{Y(M)}(RX)(\alpha)_X (Id_{RX}) \\ &= \alpha \circ Id_{RX} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

On a donc bien une adjonction, en admettant que les constructions ϵ et η sont des transformations naturelles.

Lemme 5.3.6. *Soit M un foncteur de Mackey pour le groupe G sur l'anneau R . Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Le foncteur de Mackey M est cohomologique.*
2. *Pour tout G -ensemble X , la co-unité $\epsilon_M(X)$ est un isomorphisme.*

3. Pour tout G -ensemble X , la co-unité $\epsilon_M(X)$ est un épimorphisme.

Démonstration. • L'équivalence de 2 et 3 vient du fait que $\epsilon_M(X)$ est toujours injective par le lemme de Yoneda.

- Supposons que pour tout G -ensemble X , la co-unité $\epsilon_M(X)$ soit un isomorphisme. Alors le foncteur de Mackey M est isomorphe au foncteur de Mackey $X \mapsto \text{Hom}_{\text{Mack}_R(G)}(FP_{RX}, M)$ qui est cohomologique d'après le Lemme 5.3.3, donc le foncteur M est cohomologique.
- Supposons que le foncteur de Mackey M soit cohomologique. Comme les isomorphismes que l'on cherche sont additifs, il suffit de démontrer que $\epsilon_M(G/H)$ est un isomorphisme pour tout sous-groupe H de G . On doit donc démontrer que

$$\text{Hom}_{\text{Mack}_R(G)}(FP_{R(G/H)}, M) \rightarrow M(G/H) = \text{Res}_H^G(M)(H)$$

est un isomorphisme, mais $FP_{R(G/H)} \cong \text{Ind}_H^G FP_R$, donc

$$\text{Hom}_{\text{Mack}_R(G)}(FP_{R(G/H)}, M) \cong \text{Hom}_{\text{Mack}_R(H)}(FP_R, \text{Res}_H^G M).$$

Ainsi par récurrence, il suffit de démontrer que l'on a un isomorphisme

$$\epsilon_M(G/G) : \text{Hom}_{\text{Mack}_R(G)}(FP_R, M) \rightarrow M(G).$$

On a : $\epsilon_M(G/G)(\alpha) = \alpha_{G/G}(1_R) \in M(G)$. Inversement, si $m \in M(G)$, on construit un morphisme de foncteurs de Mackey f de la façon suivante : soit H un sous groupe de G , on pose $f_H(1_R) = r_H^G(m)$. On étend par linéarité cette construction, et l'on a ainsi une famille $(f_H)_{H \leq G}$ d'applications de $FP_R(H) = R \rightarrow M(H)$. Il faut vérifier que ceci donne un morphisme de foncteurs de Mackey (au sens de Green). La seule condition qui n'est pas complètement transparente est que la famille (f_H) est compatible avec les morphismes de transfert. Soient $K \leq H$ des sous-groupes de G et $\lambda \in R$.

$$t_K^H f_K(\alpha) = t_K^H r_K^G(m) = |H : K| \lambda r_K^G(m),$$

et

$$f_K(t_K^H \lambda) = f_K(|H : K| \lambda) = |H : K| \lambda r_K^G(m).$$

On a ainsi l'isomorphisme recherché. □

Soit M un foncteur de Mackey cohomologique et X un G -ensemble, alors on a

$$\begin{aligned} \Gamma Y M(X) &= \text{Hom}(FP_{RX}, M) \\ &\cong M(X). \end{aligned}$$

5.4. Complétion idempotente

L'isomorphisme est donné par la co-unité de l'adjonction. Soient $F \in \text{Fun}_R(G)$ et X un G -ensemble, on a

$$\begin{aligned} Y\Gamma(F)(RX) &= \text{Hom}(FP_{RX}, \Gamma(F)) \\ &\cong \Gamma(F)(X) \text{ par le Lemme 5.3.6} \\ &= F(RX). \end{aligned}$$

On peut vérifier que l'isomorphisme est donné par l'unité de l'adjonction. \square

On a démontré que $\text{Comack}_R(G) \cong \text{Fun}_R(G)$, où $\text{Fun}_R(G)$ est la catégorie des foncteurs contravariants de $\text{perm}_R(G)$ vers $R\text{-Mod}$. Or comme on l'a vu dans les chapitres précédents, lorsque l'on travaille avec les foncteurs de Mackey, les facteurs directs des modules de permutation apparaissent naturellement, cependant ils ne sont pas dans la catégorie $\text{perm}_R(G)$. C'est un problème auquel on va remédier en utilisant la complétion idempotente.

5.4 Complétion idempotente

Soit \mathcal{A} une catégorie additive. L'idée de la complétion idempotente est de construire une catégorie notée \mathcal{A}^+ , qui contient tous les facteurs directs des objets de \mathcal{A} . La bonne propriété de cette construction est que les catégories de foncteurs additifs de \mathcal{A} vers une catégorie abélienne \mathcal{B} et de \mathcal{A}^+ vers \mathcal{B} sont équivalentes.

Définition 5.4.1. La catégorie \mathcal{A} est Karoubi-complète si pour tout objet A de \mathcal{A} et pour tout morphisme $e \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$ tel que $e^2 = e$, on a

$$A = \text{Ker}(e) \oplus \text{Im}(e).$$

Définition 5.4.2 ([1] exemple 8.7.8 page 97.). Soit \mathcal{A}^+ la catégorie dont les objets sont les couples (A, e) où A est un objet de la catégorie \mathcal{A} et e est un morphisme de A vers A tel que $e^2 = e$. Un morphisme ϕ de (A, e) vers (B, f) est un morphisme de A vers B dans la catégorie \mathcal{A} tel que

$$\phi \circ e = f \circ \phi = \phi.$$

Soit $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^+$ le foncteur défini par $A \mapsto (A, Id_A)$.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 5.4.3. *La catégorie \mathcal{A}^+ est Karoubi-complète. Le foncteur i est additif et induit une équivalence de catégories,*

$$\text{Fun}_{\text{Add}}(\mathcal{A}^+, L) \cong \text{Fun}_{\text{Add}}(\mathcal{A}, L),$$

où L est une catégorie abélienne.

Démonstration. Il est clair que i est un foncteur additif. Par construction la catégorie \mathcal{A}^+ est Karoubi-complète. Soit L une catégorie abélienne. La composition par le foncteur i induit un foncteur de $Fun_{Add}(\mathcal{A}^+, L)$ vers $Fun_{Add}(\mathcal{A}, L)$. Inversement on construit un foncteur $J : Fun_{Add}(\mathcal{A}, L) \rightarrow Fun_{Add}(\mathcal{A}^+, L)$ de la façon suivante : soit L un foncteur de \mathcal{A} vers L et $(A, e) \in \mathcal{A}^+$, alors

$$J(L)(A, e) := L(e)(L(A)).$$

Il est facile de vérifier que ces deux foncteurs sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre. \square

Soit R un anneau commutatif unitaire et G un groupe fini.

Lemme 5.4.4. *La complétion idempotente $perm_R^+(G)$ de la catégorie des RG -modules de permutation, est équivalente à la catégorie des RG -facteurs de permutation.*

Démonstration. On appelle temporairement \mathcal{A} la catégorie des RG -facteurs de permutation. Les objets de $perm_R^+(G)$ sont des couples (V, π) où V est un RG -module de permutation et π un projecteur de V dans V . Il y a un foncteur F de $perm_R^+(G)$ vers \mathcal{A} défini par $F(V, \pi) = \pi(V)$. Ce foncteur est dense et pleinement fidèle. \square

Dans la suite du document, on note $perm_R^+(G)$ la catégorie des RG -facteurs de permutation et on note $Fun_R^+(G)$ la catégorie des foncteurs R -linéaires contravariants de $perm_R^+(G)$ vers $R\text{-Mod}$. Le lemme 5.4.3 ainsi que le théorème 5.3.4 ont pour conséquence :

Théorème 5.4.5. *[Yoshida.]*

$$Comack_R(G) \cong Fun_R^+(G).$$

Dans la suite, on notera, abusivement, par Y et Γ les deux équivalences quasi-inverses l'une de l'autre après complétion idempotente.

Lemme 5.4.6. *Soit A un RG -module, alors*

$$Y(FP_A) = Hom_{Comack_R(G)}(FP_-, FP_A) \cong Hom_{kG}(-, A).$$

Démonstration. Restreint aux modules de permutations $Y(FP_A) = Hom_{Comack_R(G)}(FP_-, FP_A)$, par définition. Comme le foncteur de complétion idempotente induit une équivalence de catégories, on en déduit le résultat. \square

5.5 Version par blocs

Soit G un groupe fini et (K, \mathcal{O}, k) un triplet p -modulaire “assez gros” pour $\mu_k^1(G)$. On va démontrer que si $R = \mathcal{O}$ ou k , alors l’équivalence de Yoshida est compatible avec l’action des idempotents blocs. Cependant comme le résultat est vrai dans plus de généralité, on se place de le cadre suivant : soit R un anneau commutatif unitaire et G un groupe fini.

Théorème 5.5.1 (Equivalence de Yoshida, version par blocs.). *Il y a un digramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
 & & Z(\text{Fun}_R^+(G)) \\
 & \nearrow \eta \cong & \downarrow \Gamma \cong \\
 Z(RG) & & Z(\text{Comack}_R(G)) \\
 & \searrow \zeta \cong &
 \end{array} \tag{5.1}$$

Soit $1 = e + f \in Z(RG)$ une décomposition de 1 en somme d’idempotents orthogonaux. Alors

$$\text{Comack}_R(G) \cong \zeta(e)(\text{Comack}_R(G)) \oplus \zeta(f)(\text{Comack}_R(G)).$$

et

$$\text{Fun}_R^+(G) = \eta(e)(\text{Fun}_R^+(G)) \oplus \eta(f)(\text{Fun}_R^+(G)).$$

Les sous-catégories correspondantes sont équivalentes.

Démonstration. L’idée de la démonstration est très simple : il est bien connu que le centre de la catégorie des foncteurs de Mackey cohomologiques est isomorphe au centre de RG . Cependant cet isomorphisme n’est explicite que si on l’on voit les foncteurs de Mackey cohomologiques comme modules sur l’algèbre de Mackey cohomologique. Pour contourner ce problème, on raisonne avec des résolutions projectives.

1. On démontre dans un premier lieu que $Z(RG)$ est isomorphe au centre de la catégorie $\text{Fun}_R^+(G)$. On voit le centre de RG comme centre de la catégorie $RG\text{-Mod}$. Si $m_z \in Z(RG)$, on définit $\eta(m_z)$ ainsi : soit $F \in \text{Fun}_R^+(G)$ et $V \in \text{perm}_R^+(G)$ alors

$$\eta_F(m_z)(V) = F(m_z(V)).$$

Il y a une liste de vérifications élémentaires à faire :

- Pour un foncteur F fixé, on montre que $\eta_F(m_z)$ est une transformation naturelle de F vers F . En effet, soit $f : V \rightarrow W$ un morphisme entre deux facteurs de permutation. Alors

$$\begin{array}{ccc} F(V) & \xrightarrow{F(m_z(V))} & F(V) \\ F(f) \uparrow & & \uparrow F(f) \\ F(W) & \xrightarrow{F(m_z(W))} & F(W) \end{array}$$

Ce diagramme commute puisque m_z est un endomorphisme du foncteur identité de $RG\text{-Mod}$, donc le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ m_z(V) \downarrow & & \downarrow m_z(W) \\ V & \xrightarrow{f} & W. \end{array}$$

- Montrons maintenant que $F \mapsto \eta_F(m_z)$ est un endomorphisme du foncteur identité de la catégorie $Fun_R^+(G)$. Soient F et G deux foncteurs de $Fun_R^+(G)$ et ϕ une transformation naturelle de F dans G . On doit montrer que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\eta_F(m_z)} & F \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ G & \xrightarrow{\eta_G(m_z)} & G \end{array}$$

est commutatif. Pour ça, il suffit de le faire après évaluation en un facteur de permutation V . Mais le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} F(V) & \xrightarrow{\eta_F(m_z(V))} & F(V) \\ \phi_V \downarrow & & \downarrow \phi_V \\ G(V) & \xrightarrow{\eta_G(m_z(V))} & G(V) \end{array}$$

est commutatif puisque ϕ est une transformation naturelle.

- Montrons maintenant que η est un morphisme d'anneaux unitaires. Si on note m_1 la transformation naturelle identité, il est clair que η_{m_1} est la transformation naturelle identité du foncteur identité de $Fun_R^+(G)$. Soient m_z et $m_{z'}$ deux endomorphismes du foncteur identité de $RG\text{-Mod}$. L'additivité étant claire, on doit montrer que $\eta(m_z \circ m_{z'}) =$

5.5. Version par blocs

$\eta(m_z) \circ \eta(m_{z'})$. Pour cela on considère un foncteur $F \in Fun_R^+(G)$ et V un facteur de permutation. Alors

$$\begin{aligned} \eta_F(m_z \circ m_{z'})(V) &= F(m_z(V) \circ m_{z'}(V)) \\ &= F(m_{z'}(V) \circ m_z(V)) \\ &= F(m_z(V)) \circ F(m_{z'}(V)) \\ &= \eta_F(m_z(V)) \circ \eta_F(m_{z'}(V)). \end{aligned}$$

Puisque en tant qu'élément du centre de $RG\text{-Mod}$, les transformations naturelles m_z et $m_{z'}$ commutent, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{m_z(V)} & V \\ m_{z'}(V) \downarrow & & \downarrow m_{z'}(V) \\ V & \xrightarrow{m_z(V)} & V \end{array}$$

Inversement, on doit construire un morphisme du centre de $Fun_R^+(G)$ vers le centre de $RG\text{-Mod}$. Soit μ un endomorphisme du foncteur identité de $Fun_R^+(G)$. On construit un élément z_μ de $Z(RG)$ de la façon suivante :

$$z_\mu := \mu_{Y_{RG}}(RG)(Id_{RG})(1_{RG}),$$

où Y_{RG} est le foncteur de Yoneda sur le RG -module libre de rang 1 : soit V un facteur de permutation, alors $Y_{RG}(V) = Hom_{RG}(V, RG)$.

- L'élément z_μ est bien dans le centre de RG : soit $z \in RG$, alors on définit un morphisme f_z de RG -modules de RG dans lui-même par $f_z(1) = z$, que l'on prolonge par RG -linéarité. Alors on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y_{RG}(RG) & \xrightarrow{\mu_{RG}(RG)} & Y_{RG}(RG) \\ Y_{RG}(f_z) \downarrow & & \downarrow Y_{RG}(f_z) \\ Y_{RG}(RG) & \xrightarrow{\mu_{RG}(RG)} & Y_{RG}(RG) \end{array}$$

qui est commutatif puisque μ_{RG} est une transformation naturelle du foncteur Y_{RG} . Si on applique ce diagramme commutatif à Id_{RG} , on obtient

$$\mu_{Y_{RG}}(RG)(Id_{RG}) \circ f_z = \mu_{RG}(RG)(f_z).$$

Maintenant μ est un endomorphisme du foncteur identité de la catégorie $Fun_R^+(G)$, donc le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} Y_{RG} & \xrightarrow{\mu_{RG}} & Y_{RG} \\ Y_{f_z} \downarrow & & \downarrow Y_{f_z} \\ Y_{RG} & \xrightarrow{\mu_{RG}} & Y_{RG} \end{array}$$

où Y_{f_z} est la transformation naturelle de Y_{RG} dans lui même induite par le morphisme f_z . Si on applique ce diagramme commutatif au module RG , puis au morphisme identité, on obtient :

$$f_z \circ \mu_{RG}(RG)(Id_{RG}) = \mu_{RG}(RG)(f_z). \quad (5.2)$$

Ce qui démontre que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} RG & \xrightarrow{\mu_{RG}(RG)(Id_{RG})} & RG \\ \downarrow f_z & & \downarrow f_z \\ RG & \xrightarrow{\mu_{RG}(RG)(Id_{RG})} & RG \end{array}$$

est commutatif, et que donc l'élément z_μ est dans le centre de RG .

- Le morphisme $\mu \mapsto z_\mu$ est clairement additif, donc c'est un morphisme d'anneaux unitaires. Il est clair que la transformation naturelle identité est envoyée sur le 1 de l'anneau. De même si μ et μ' sont deux endomorphismes du foncteur identité de $Fun_R^+(G)$. On a

$$\begin{aligned} \mu \circ \mu' &\mapsto \mu_V(\mu'_V(Id_V)) \\ &= \mu_V(Id_V) \circ \mu'_V(Id_V) \text{ d'après (5.2).} \end{aligned}$$

On doit maintenant vérifier que les morphismes $\mu \mapsto z_\mu$ et η sont deux morphismes inverses l'un de l'autre. Si $z \in Z(RG)$, on obtient une transformation naturelle m_z du foncteur identité de $RG\text{-Mod}$ par multiplication par z : soit V un RG -module, alors $m_z(V) : V \rightarrow V$ est défini par $m_z(V)(v) = zv$ pour $v \in V$. Alors,

$$\begin{aligned} z_{\eta(m_z)} &= (\eta_{m_z})_{RG}(RG)(Id_{RG})(1) \\ &= m_z(1) \\ &= z. \end{aligned}$$

Inversement, c'est moins direct : soit μ un endomorphisme du foncteur identité de $Fun_R^+(G)$. La première chose à démontrer est la suivante : soit V un RG -facteur de permutation. Alors l'application $m_{z_\mu} : V \rightarrow V$ est égale à $\mu_V(V)(Id_V)$. Soit $v \in V$ et f l'application de RG dans V définie par $f(1) = v$, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y_{RG}(RG) & \xrightarrow{\mu_{RG}(RG)} & Y_{RG}(RG) \\ Y_f(RG) \downarrow & & \downarrow Y_f(RG) \\ Y_V(RG) & \xrightarrow{\mu_V(RG)} & Y_V(RG) \end{array}$$

5.5. Version par blocs

On applique ce diagramme commutatif à Id_{RG} puis on évalue en 1 et on obtient :

$$\mu_V(RG)(f)(1) = \mu_{RG}(RG)(Id_{RG})(1).v.$$

Or le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y_V(V) & \xrightarrow{Y_V(V)} & Y_V(V) \\ Y_V(f) \downarrow & & \downarrow Y_V(f) \\ Y_V(RG) & \xrightarrow{Y_V(RG)} & Y_V(RG). \end{array}$$

On applique ce diagramme à Id_V et on obtient :

$$\mu_V(RG)(f) = \mu_V(V)(Id_V) \circ f.$$

D'où : pour tout $v \in V$,

$$\mu_V(RG)(f)(1) = \mu_V(V)(Id_V)(v).$$

Maintenant, on démontre que si F est un foncteur de $Fun_R^+(G)$ et V est un RG -facteur de permutation, alors $F \circ \mu_V(V)(Id_V) = \mu_F(V)$. Ceci est une conséquence directe du lemme de Yoneda. Soit $x \in F(V)$ alors x correspond à une transformation naturelle ϕ_x de Y_V vers F . Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y_V(V) & \xrightarrow{\mu_V(V)} & Y_V(V) \\ \phi_x \downarrow & & \downarrow \phi_x \\ F(V) & \xrightarrow{\mu_F(V)} & F(V) \end{array}$$

En appliquant ce diagramme à Id_V , on obtient :

$$F(\mu_V(V)(Id_V))(x) = \mu_F(V)(x).$$

2. Le fait que $Z(RG)$ soit isomorphe à $Z(Comack_R(G))$ est connu depuis longtemps ([6] pages 332-335).

Comme la catégorie $RG\text{-Mod}$ est équivalente à une sous-catégorie pleine de $Comack_R(G)$ (Théorème 5.2.4), on a une flèche naturelle de $Z(Comack_R(G))$ vers $Z(RG)\text{-Mod}$: soit μ un endomorphisme du foncteur identité de $Comack_R(G)$. On définit un endomorphisme $\gamma(\mu)$ du foncteur identité de $RG\text{-Mod}$ de la façon suivante : soit V un RG -module. On note μ_{FP_V} l'évaluation de μ sur le foncteur de points fixes FP_V . Alors

$$\gamma(\mu)_V = \mu_{FP_V}(1).$$

Il faut vérifier que cette construction est un endomorphisme du foncteur identité de $RG\text{-Mod}$ ainsi qu'un morphisme d'anneaux unitaires. C'est une succession de vérifications élémentaires qui découlent de la propriété d'adjonction du foncteur de points fixes.

- Soit $f : V \rightarrow W$ un morphisme de RG -modules. Alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\gamma(\mu)_V} & V \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ W & \xrightarrow{\gamma(\mu)_W} & W \end{array}$$

est commutatif puisque c'est l'évaluation en 1 du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} FP_V & \xrightarrow{\mu_{FP_V}} & FP_V \\ FP_f \downarrow & & \downarrow FP_f \\ FP_W & \xrightarrow{\mu_{FP_W}} & FP_W \end{array}$$

Donc $\gamma(\mu)$ est un endomorphisme du foncteur identité de la catégorie $RG\text{-Mod}$.

- Il est clair γ est un morphisme d'anneaux unitaires.

Inversement soit m_z un endomorphisme du foncteur identité de $RG\text{-Mod}$. Par propriété d'adjonction des foncteurs de points fixes, on obtient un endomorphisme de la catégorie des foncteurs de Mackey cohomologiques projectifs. Soit M un foncteur de Mackey cohomologique. On choisit $(FP_{P_\bullet}, d^\bullet)$ une résolution projective de M .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & FP_1 & \xrightarrow{d^1} & FP_0 & \xrightarrow{d_0} & M \\ & & \downarrow FP_{m_z(P_1)} & & \downarrow FP_{m_z(P_0)} & & \vdots \\ \cdots & \longrightarrow & FP_1 & \xrightarrow{d^1} & FP_0 & \xrightarrow{d_0} & M \end{array}$$

On définit alors $\zeta(m_z)_M$ comme étant l'application induite par $FP_{m_z(P_1)}$ sur l'homologie du complexe précédent. Par des arguments classiques d'algèbre homologique, ce morphisme ne dépend pas de la résolution choisie. De nouveau il y a une liste de vérifications élémentaires à effectuer.

- Soient M et N deux foncteurs de Mackey cohomologiques et soit $\phi : M \rightarrow N$ un morphisme de foncteurs de Mackey.

La diagramme :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\zeta(m_z)_M} & M \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ N & \xrightarrow{\zeta(m_z)_N} & N \end{array}$$

5.5. Version par blocs

est commutatif puisque si l'on choisit des résolutions projectives $(FP_{P_\bullet}, d^\bullet)$ et $(FP_{Q_\bullet}, \delta^\bullet)$ de M et N , alors le morphisme ϕ se relève, de façon unique, à homotopie près, en un morphisme de complexes $\phi_\bullet : FP_{P_\bullet} \rightarrow FP_{Q_\bullet}$. Chacun des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} FP_{P_i} & \xrightarrow{FP_{m_z(P_i)}} & FP_{P_i} \\ \phi_i \downarrow & & \downarrow \phi_i \\ FP_{Q_i} & \xrightarrow{FP_{m_z(Q_i)}} & FP_{Q_i} \end{array}$$

est commutatif.

- Cette construction est un morphisme d'anneaux unitaires : soient m_z et $m_{z'}$ deux endomorphismes du foncteur identité de $RG\text{-Mod}$. Puisque pour tous RG -module V , les morphismes $FP_{m_z \circ m_{z'}}$ et $FP_{m_z} \circ FP_{m_{z'}}$ de FP_V vers lui-même sont égaux, on a $\zeta(m_z \circ m_{z'}) = \zeta_{m_z} \circ \zeta_{m_{z'}}$. Le morphisme ζ est clairement unitaire.

Ces deux morphismes sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. Soit m_z un endomorphisme du foncteur identité de $RG\text{-Mod}$. Alors soit V un RG -module,

$$\gamma \circ \zeta(m_z)_V = FP_{m_z(V)}(1) = m_z(V).$$

Inversement, soit μ un endomorphisme du foncteur identité de la catégorie $Comack_R(G)$. Il suffit de montrer que $\zeta(\gamma(\mu)) = \mu$ sur les foncteurs projectifs. Soit FP_P un foncteur projectif, alors $\zeta(\gamma(\mu))_{FP_P} = FP_{\mu_1} = \mu$.

3. L'isomorphisme entre $Z(Fun_R^+(G))$ et $Z(Comack_R(G))$ vient de l'équivalence de Yoshida du théorème 5.3.4.

4. On peut maintenant vérifier que le diagramme 6.1 est commutatif : soit m_z un endomorphisme du foncteur identité de $RG\text{-Mod}$ et V un RG -module. Alors

$$\zeta^{-1} \circ \Gamma \circ \eta(m_z)_V = ev_1 : \Gamma \circ \eta(m_z)_V : FP_V \rightarrow FP_V.$$

Comme l'équivalence de Yoshida est donnée pour les foncteurs de Mackey selon la définition de Dress, l'évaluation en 1 correspond à l'évaluation sur le G -ensemble $G/1$. D'où

$$\begin{aligned} ev_1(\Gamma \circ \eta(m_z)_V) : Hom_{RG}(RG, V) &\rightarrow Hom_{RG}(RG, V) \\ f &\mapsto m_z(V) \circ f. \end{aligned}$$

En utilisant l'isomorphisme $Hom_{RG}(RG, V) \cong V$, on a le résultat. \square

Considérons maintenant le cas $R = \mathcal{O}$ ou k . La notion de bloc de RG à alors un sens.

Définition 5.5.2. Soit b un bloc de RG . On note $perm_R^+(b)$ la catégorie des RGb -modules de p -permutation.

Lemme 5.5.3. Soit b un bloc de RG , alors $\zeta(b)(Fun_R^+(G))$ est équivalente à la catégorie $Fun_R^+(b)$ des foncteurs contravariants de $perm_R^+(b)$ vers $R\text{-Mod}$.

Démonstration. Soit $F \in \zeta(b)(Fun_R^+(G))$, alors pour tout RG -module de p -permutation V , on a $F(V) = F(bV)$. Donc F induit un foncteur de $perm_R^+(b)$ vers $R\text{-Mod}$. Inversement si F est un foncteur de $Fun_R^+(b)$. On définit un foncteur Θ de $\zeta(b)(Fun_R^+(G))$ de la façon suivante : soit V un RG -module de p -permutation, alors

$$\Theta(V) = \Theta(bV \oplus (1 - b)V) := \Theta(bV).$$

Ces constructions sont inverses l'une de l'autre. □

Corollaire 5.5.4. Soit b un bloc de RG . L'équivalence de Yoshida se restreint en une équivalence

$$Comack_R(b) \cong Fun_R^+(b),$$

où $Comack_R(b) := \zeta(b)(Comack_R(b))$.

5.6 Equivalences entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques.

Dans cette section, on utilise la version par blocs de l'équivalence de Yoshida pour relever des équivalences de Morita entre blocs d'algèbres de groupes en des équivalences entre algèbres de Mackey cohomologiques. L'équivalence de Yoshida donne une autre définition possible des foncteurs de Mackey cohomologiques. L'avantage de cette définition est qu'elle "linéarise" la définition des foncteurs de Mackey dans le sens suivant : les foncteurs de Mackey sont des foncteurs de G -ens vers $R\text{-Mod}$, les foncteurs de Mackey cohomologiques sont des foncteurs de $perm_R^+(G)$ vers $R\text{-Mod}$. Cette définition linéaire permet de construire, de façon naturelle, des foncteurs entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques.

Soit $R = \mathcal{O}$ ou k .

5.6.1 Foncteurs entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques.

Définition 5.6.1. Soient A et B des blocs d'algèbres de groupes. Un A - B -bimodule X possède la propriété \mathcal{P} si

5.6. Equivalences entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques.

\mathcal{P} : Le foncteur $X \otimes_B -$ envoie les B -modules de p -permutation sur des A -modules de p -permutation.

Lemme 5.6.2. *Soient G et H deux groupes finis et soient b et c des blocs de RG et RH respectivement. Soit X un RGb - RHc -bimodule possédant la propriété \mathcal{P} , alors il existe un foncteur défini ci-dessous, noté $L_X : Comack_R(b) \rightarrow Comack_R(c)$, qui envoie un foncteur de points fixes sur un foncteur de points fixes.*

Démonstration. On utilise l'équivalence $Comack_R(b) \cong Fun_R^+(b)$ et $Comack_R(c) = Fun_R^+(c)$. Le foncteur L_X est alors défini par pré-composition par X : Soit $F \in Fun_R^+(b)$,

$$L_X(F) = F(X \otimes_{RHc} -).$$

Il est évident que ceci donne effectivement un foncteur entre les catégories $Fun_R^+(b)$ et $Fun_R^+(c)$.

On note abusivement par L_X le foncteur induit entre les catégories $Comack_R(b)$ et $Comack_R(c)$, c'est-à-dire que L_X est alors la composée suivante :

$$\begin{array}{ccc} Fun_R^+(b) & \xrightarrow{L_X} & Fun_R^+(c) \\ \uparrow Y & & \downarrow \Gamma \\ Comack_R(b) & \xrightarrow{\quad} & Comack_R(c) \end{array}$$

Soit V un RGb -module et FP_V le foncteur de points fixes correspondant. Pour calculer l'image de ce foncteur, on doit calculer la composée :

$$(\Gamma \circ L_X \circ Y)(FP_V).$$

On a vu au lemme 5.4.6 que $Y(FP_V)$ est le foncteur $Hom_{Comack_R(G)}(FP_-, FP_V)$, alors on a une succession d'isomorphismes naturels provenant d'adjonctions :

$$\begin{aligned} L_X(Hom_{Comack_R(G)}(FP_-, FP_V)) &\cong Hom_{Comack_R(G)}(FP_{X \otimes_{RH} -}, FP_V) \\ &\cong Hom_{RG}(X \otimes_{RH} -, V) \\ &\cong Hom_{RH}(-, Hom_{RG}(X, V)) \\ &\cong Hom_{Comack_R(H)}(FP_-, FP_{Hom_{RG}(X, V)}). \end{aligned}$$

Donc on a :

$$(\Gamma \circ L_X \circ Y)(FP_V) \cong FP_{Hom_{RG}(X, V)}.$$

□

On a alors le résultat immédiat suivant :

Lemme 5.6.3. *Soient G , H et K des groupes finis et soient b , c et d des blocs de RG , RH et RK respectivement. Soient X un RGb - RHc -bimodule qui possède la propriété \mathcal{P} et soit Y un RHc - RKd -bimodule qui possède la propriété \mathcal{P} . Alors*

$$L_Y \circ L_X \cong L_{X \otimes_{RH} Y}$$

comme foncteurs de $Fun_R^+(b)$ vers $Fun_R^+(d)$

Démonstration. Soit $F \in Fun_R^+(b)$, alors

$$L_Y \circ L_X(F) = L_X(F)(Y \otimes_{RKd} -) = F(X \otimes_{RHc} Y \otimes_{RKd} -) = L_{X \otimes_{RHc} Y}(F).$$

Soit $\eta : F \rightarrow G$ une transformation naturelle de foncteurs de $Fun_R^+(b)$. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L_Y \circ L_X(F) & \longrightarrow & L_{X \otimes Y} F \\ L_Y \circ L_X(\eta) \downarrow & & \downarrow L_{X \otimes Y}(\eta) \\ L_Y \circ L_X(G) & \longrightarrow & L_{X \otimes Y}(G) \end{array}$$

puisque si on l'évalue en un RKd -module de p -permutation, on a :

$$\begin{array}{ccc} F(X \otimes Y \otimes V) & \xrightarrow{F(Id_{X \otimes Y \otimes V})} & F(X \otimes Y \otimes V) \\ \downarrow \eta(X \otimes Y \otimes V) & & \downarrow \eta(X \otimes Y \otimes V) \\ G(X \otimes Y \otimes V) & \xrightarrow{G(Id_{X \otimes Y \otimes V})} & G(X \otimes Y \otimes V) \end{array}$$

Ce diagramme commute puisque η est une transformation naturelle. \square

Lemme 5.6.4. *Soient G un groupe fini et b un bloc de RG . Soit $X = RGb$ vu comme RGb - RGb -bimodule. Alors L_X est le foncteur identité de $Fun_R^+(b)$ vers $Fun_R^+(b)$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du fait que $X \otimes_{RGb} -$ est isomorphe au foncteur identité de RGb -Mod vers RGb -Mod. \square

Proposition 5.6.5. *Soient G et H deux groupes finis. Soit b un bloc de RG et c un bloc de RH . Si les catégories RGb -Mod et RHc -Mod sont équivalentes par un RHc - RGb -bimodule X qui possède la propriété \mathcal{P} , et un RGb - RHc -bimodule Y qui possède la propriété \mathcal{P} , alors $Comack_R(b) \cong Comack_R(c)$.*

5.6. Equivalences entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques.

Démonstration. D'après le lemme 5.6.2 les bi-modules X et Y induisent des foncteurs :

$$L_X : \text{Fun}_R^+(c) \rightarrow \text{Fun}_R^+(b),$$

$$L_Y : \text{Fun}_R^+(b) \rightarrow \text{Fun}_R^+(c),$$

qui sont des équivalences inverses l'une de l'autre en utilisant les lemmes 5.6.3 et 5.6.4. \square

Remarque 5.6.6. Cette équivalence généralise dans un sens convenable l'équivalence entre les blocs d'algèbres de groupes. En effet on peut voir les catégories $RGb\text{-Mod}$ (resp. $RHc\text{-Mod}$) comme sous-catégories de $\text{Comack}_R(b)$ (resp. $\text{Comack}_R(c)$) en utilisant le foncteur $V \rightarrow FP_V$. Dans ce cas la restriction du foncteur L_X à ces sous-catégories est le foncteur $\text{Hom}_R(X, R) \otimes_{RGb} -$.

Il est clair que si X est un bimodule qui donne une équivalence de Morita splendide (voir définition 2.3.2) alors X est un bimodule qui vérifie la propriété \mathcal{P} , on a donc le théorème suivant :

Théorème 5.6.7. *Soient G et H deux groupes finis. Soient b un bloc de RG et c un bloc de RH . Si RGb et RHc sont splendidement Morita équivalents, alors*

$$\text{Comack}_R(b) \cong \text{Comack}_R(c).$$

Corollaire 5.6.8. *Soient G et H deux groupes finis. Soient b un bloc de RG et c un bloc de RH . Si les matrices de Cartan des algèbres $\text{co}\mu_R(b)$ et $\text{co}\mu_R(c)$ ne sont pas équivalentes, alors les blocs RGb et RHc ne sont pas splendidement équivalents.*

Ce corollaire, bien que trivial, donne un critère suffisant pour affirmer qu'une équivalence entre blocs d'algèbres de groupes n'est pas splendide. Ce critère est d'autant plus intéressant que l'on peut calculer les matrices de Cartan des algèbres cohomologiques à l'aide d'un algorithme (voir Annexe 1 pour un algorithme sous GAP4).

5.6.2 Remarques sur la condition \mathcal{P} .

On a vu que la donnée d'un bimodule qui possède la propriété \mathcal{P} permet de construire un foncteur entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques. De plus si ce bimodule est un bimodule qui induit une équivalence de Morita entre deux blocs d'algèbres de groupes, le foncteur induit est une équivalence entre les catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques. Les

équivalences de Morita splendides possèdent la propriété \mathcal{P} . Dans cette section, on va voir où sont situées les équivalences qui possèdent la propriété \mathcal{P} dans le treillis des équivalences entre blocs d'algèbres de groupes.

Il est assez clair qu'il existe des équivalences entre blocs d'algèbres de groupes qui ne possèdent pas la propriété \mathcal{P} .

Exemple 5.6.9. $G = Q_8 \rtimes C_3$. (Exemple 4.5)

Si l'on considère des bimodules arbitraires et non des bimodules qui induisent des équivalences de Morita, alors la propriété \mathcal{P} n'est pas tellement restrictive. En effet

Exemple 5.6.10. Soit $G = H = C_2$ et k un corps de caractéristique 2. Un kG - kH -bimodule est un $k[G \times H]$ -module, c'est-à-dire un $k[C_2 \times C_2]$ -module. Comme les modules de p -permutation pour un p -groupe sont exactement les modules de permutation et que pour kC_2 tous les modules sont des modules de permutation, la condition \mathcal{P} est vide. Donc tous les $k[C_2 \times C_2]$ -modules la vérifient. Comme $k[C_2 \times C_2]$ est de type de représentation infini, il y a une infinité de modules qui conviennent.

Cependant, si l'on demande que le bimodule X soit un bimodule qui induit une auto-équivalence de Morita de kC_2 , on peut utiliser les résultats sur les groupes de Picard : les équivalences de Morita sont caractérisées par $Out_K(kC_2)$ (voir ci-après). On peut montrer que le seul bimodule qui convient est le bimodule identité kC_2 . En effet le seul automorphisme de kC_2 est l'identité. Soit σ le générateur de C_2 . Soit $f \in Aut_k(kC_2)$, alors $f(1) = 1$ et on pose $f(\sigma) = \lambda$ pour un $\lambda \in kC_2$. Alors comme $\sigma^2 = 1$, on doit avoir $\lambda^2 = 1$. Or $\lambda \in kC_2$, donc il existe $a, b \in k$ tels que $\lambda = a.1 + b\sigma$. On vérifie alors que la seule possibilité est d'avoir $\lambda = \sigma$ et donc $f = id_{kC_2}$.

Les équivalences entre algèbres de groupes ayant la propriété \mathcal{P} semblent plus faibles que les équivalences splendides, mais le sont-elle réellement ? On va étudier cette question dans le cadre des auto-équivalences de Morita des p -groupes en caractéristique p en utilisant les résultats sur les groupes de Picard des algèbres basiques.

Définition 5.6.11. Soit R un anneau commutatif et A une R -algèbre. Alors le groupe de Picard de A est :

$$Pic_R(A) = \{ [X] \in A \otimes_R A^{op} \text{- Mod} ; \exists [Y] \in A^{op} \otimes_R A \text{- Mod} ; \\ X \otimes_A Y \cong A \text{ et } Y \otimes_A X \cong A^{op} \}$$

où $[-]$ désigne la classe d'isomorphisme. C'est un groupe pour le produit tensoriel $- \otimes_A -$.

5.6. Equivalences entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques.

Il y a un morphisme de groupes de $Aut_R(A)$ vers $Pic_R(A)$ qui est défini comme suit. Soit α un automorphisme de A , alors on définit le bimodule ${}_1A_\alpha$ tordu par l'automorphisme α . En tant que R -module ${}_1A_\alpha = A$. L'action est la suivante $a.m.b = am\alpha(b)$ pour $a, b, m \in A$.

Le noyau de ce morphisme est égal à $Inn_R(A)$, le groupe des automorphismes intérieurs de A . On obtient donc un morphisme de groupes $Out_R(A) \rightarrow Pic_R(A)$.

Théorème 5.6.12 ([43]). *Soit k un corps et A une k -algèbre basique de dimension finie. Alors $Pic_k(A) \cong Out_k(A)$.*

Soit P un p -groupe et k un corps de caractéristique p . L'algèbre kP est basique, puisque l'unique kP -module simple est le module trivial et il est de dimension 1. Alors d'après le théorème précédent, les auto-équivalences de Morita de kP sont données par le produit tensoriel par un bimodule de la forme ${}_1kP_f$ pour $f \in Out_k(kP)$.

Lemme 5.6.13. *Soit V un kP -module et soit $f \in Out_k(kP)$. Alors*

$${}_1kP_f \otimes_{kP} V \cong {}_{f^{-1}}V,$$

où ${}_{f^{-1}}V$ est le kP -module V tordu par l'automorphisme f . Cet isomorphisme est naturel.

Démonstration. Soit $\phi : {}_1kP_f \otimes_{kP} V \rightarrow {}_{f^{-1}}V$ le morphisme défini par $\phi(x \otimes v) = f^{-1}(x)v$ pour $x \in kP$ and $v \in V$. Ce morphisme est bien défini puisque : soit $p \in kP$,

$$\begin{aligned} \phi(xf(p) \otimes p^{-1}v) &= f^{-1}(xf(p))p^{-1}v \\ &= f^{-1}(x)v. \end{aligned}$$

Et c'est un morphisme de kP -modules puisque : soit $p \in kP$,

$$\phi(px \otimes v) = f^{-1}(p).f^{-1}(x)v = f^{-1}(p).\phi(x \otimes v).$$

Inversement, soit $\psi : {}_{f^{-1}}V \rightarrow {}_1kP_f \otimes_{kP} V$ le morphisme défini par $\psi(v) = 1 \otimes v$ pour $v \in V$. C'est une morphisme de kP -modules puisque si $p \in kP$, alors

$$\psi(f^{-1}(p)v) = 1 \otimes f^{-1}(p)v = p \otimes v.$$

Les morphismes ϕ et ψ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. En effet soit $x \in kP$ et $v \in V$, alors

$$\phi \circ \psi(v) = \phi(1 \otimes v) = v.$$

et

$$\begin{aligned}\psi \circ \phi(x \otimes v) &= \psi(f^{-1}(x)v) \\ &= 1 \otimes f^{-1}(x)v \\ &= x \otimes v.\end{aligned}$$

Soit $\alpha : V \rightarrow W$ un morphisme de kP -modules. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} {}_1kP_f \otimes_{kP} V & \xrightarrow{\phi_V} & {}_fV \\ \downarrow id \otimes \alpha & & \downarrow \alpha \\ {}_1kP_f \otimes_{kP} W & \xrightarrow{\phi_W} & {}_fW.\end{array}$$

En effet soit $x \otimes v \in {}_1kP_f \otimes_{kP} V$, alors

$$\alpha \phi_V(x \otimes v) = \alpha(f^{-1}(x)v) = f^{-1}(v)\alpha(v) = \phi_W \circ \alpha(x \otimes v).$$

Le diagramme faisant intervenir l'isomorphisme ψ est lui aussi commutatif. \square

On considère $G = (C_2)^n$ un 2-groupe abélien élémentaire avec $n \geq 4$. Soit k un corps de caractéristique 2. On note a_1, \dots, a_n un ensemble de générateurs de G et par $x_i = a_i + 1 \in kG$ et on pose $x = x_1$. Soit H le sous-groupe de G engendré par a_1 . Soit $f \in \text{Aut}(kG)$ tel que $f(x) = x + x_2x_3$. Soit $M = {}_f kG/H$, le module tordu par l'automorphisme f . Alors comme kG/H est indécomposable le module M est indécomposable puisque

$$\text{End}_{kG}(M) \cong \text{End}_{kG}(kG/H).$$

Lemme 5.6.14. *Le module M n'est pas un module de permutation.*

Démonstration. Supposons que le module M soit un module de permutation, alors il existe un sous-groupe K de G d'ordre 2 tel que $M \cong kG/K$. Soit g un générateur de K . L'annulateur de M dans kG est donc $kG(g+1)$, mais c'est aussi $kGf(x)$. Donc, il existe $u \in kG$ tel que $f(x) = u(g+1)$. Il existe une partie B de $\{1, \dots, n\}$ tel que

$$g := \prod_{i \in B} (x_i + 1) = \sum_{C \subset B} \prod_{i \in C} x_i.$$

Donc

$$g + 1 = \sum_{\emptyset \neq C \subset B} \prod_{i \in C} x_i.$$

5.6. Equivalences entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques.

On regarde maintenant l'égalité $f(x) = u(g + 1)$ modulo J^2 où J est le radical de kG . Le radical J est égal au sous-module maximal engendré par (x_1, \dots, x_n) , donc J^2 est engendré par les produit $x_i x_j$ pour $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Si C est une partie de $\{1, \dots, n\}$, on note $x_C = \prod_{i \in C} x_i$. On a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= u(g + 1) \\ &= u \sum_{\emptyset \neq C \subset B} x_C \\ &= u \sum_{|C|=1; C \subset B} x_C \text{ mod } J^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$x = u \sum_{|C|=1; C \subset B} x_C \text{ mod } J^2,$$

d'où $u = 1 + v$ avec $v \in J$ et $B = \{x\}$. On doit donc avoir $vx = x_2 x_3$ ce qui est impossible. Donc M n'est pas un module de permutation. \square

On a donc démontré :

Proposition 5.6.15. *Il existe des auto-équivalences de Morita d'un p -groupe qui ne vérifient pas la propriété \mathcal{P} .*

Proposition 5.6.16. *Il existe des équivalences entre blocs d'algèbres de groupes qui possèdent la propriété \mathcal{P} , mais qui ne sont pas splendides.*

Démonstration. Soit p un nombre premier et soit $k = \overline{\mathbb{F}_p}$ et $G = C_{p^n}$. On considère les auto-équivalences de Morita de kC_p . Elles sont données par les bimodules ${}_1 k(C_{p^n})_f$ pour $f \in \text{Out}_k(kC_{p^n})$. D'après le lemme 5.6.13, l'image d'un module V de dimension $n \in \mathbb{N}$ par le foncteur ${}_1 k(C_{p^n})_f \otimes_{kC_{p^n}} -$ est un module de même dimension. Or à isomorphisme près, il y a un unique kC_{p^n} -module indécomposable de dimension i pour $i \in \{0, 1, \dots, p^n\}$. Et parmi ces modules seuls les modules de dimension p^j pour $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ sont de permutation. Donc le foncteur ${}_1 k(C_{p^n})_f \otimes_{kC_{p^n}} -$ possède la propriété \mathcal{P} .

En général, ce n'est pas une équivalence splendide. En effet soit $p = 3$ et $G = C_3$. Soit x un générateur de C_3 . On considère l'automorphisme de kC_3 défini par $f(x) = 1 + x - x^2$. On peut montrer, par exemple en calculant les quotients de Brauer par les sous-groupes d'ordre 3, que ${}_1 k(C_3)_f$ n'est pas un bimodule de permutation, donc n'induit pas une équivalence splendide. \square

On a donc démontré la propriété suivante.

Proposition 5.6.17. *Soient G et H deux groupes finis et b un bloc de RG et c un bloc de RH . Alors*

$$\begin{aligned} & \{cl. d'iso. d'équivalences de Morita splendides de RGb vers RHc \} \\ & \subset \{cl. d'iso. d'équivalence de Morita avec la propriété \mathcal{P} de RGb vers RHc \} \\ & \subset \{cl. d'iso. d'équivalences de Morita de RGb vers RHc \} \end{aligned}$$

Les inclusions sont strictes en général.

5.7 Equivalences dérivées entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques

Dans cette section, on démontre qu'un complexe de bimodules qui possède une propriété similaire à la propriété \mathcal{P} peut être relevé en un foncteur entre catégories dérivées de foncteurs de Mackey cohomologiques. Les idées sont les mêmes que celles de la section précédente, mais toutes les démonstrations, qui étaient alors évidentes, deviennent légèrement techniques quand on travaille dans la catégorie dérivée.

Comme dans la section précédente $R = \mathcal{O}$ ou k .

Définition 5.7.1. Soient G et H des groupes finis, b un bloc de RG et c un bloc de RH . Soit X_\bullet un complexe de RH - RG -bimodules. Le complexe X possède la propriété \mathcal{P}_\bullet si :

- pour chaque terme X_i de X , le foncteur $X_i \otimes_{RG} -$ envoie les RGb -modules de p -permutation sur des RHc -modules de p -permutation.

Lemme 5.7.2. *Soient G et H des groupes finis, b un bloc de RG et c un bloc de RH . Soit X_\bullet un complexe de RH - RG -bimodules qui possède la propriété \mathcal{P}_\bullet , alors il existe un foncteur additif, défini ci-dessous et noté L_{X_\bullet} , entre les catégories de complexes de chaînes :*

$$L_{X_\bullet} : Ch^-(co\mu_R(c)\text{-Mod}) \rightarrow Ch^-(co\mu_R(b)\text{-Mod}),$$

qui induit un foncteur triangulé entre les catégories dérivées :

$$L_{X_\bullet} : D^-(co\mu_R(c)\text{-Mod}) \rightarrow D^-(co\mu_R(b)\text{-Mod}).$$

Démonstration. On va travailler avec la catégorie $Fun_R^+(-)$. Soit X_\bullet un complexe bilatère borné à droite et à gauche comme dans les hypothèses.

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X_s \xrightarrow{d_s} X_{s-1} \xrightarrow{d_{s-1}} \cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

5.7. Equivalences dérivées entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques

et soit F_\bullet un complexe borné à droite de foncteurs de $Fun_R^+(b)$:

$$\cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\eta_i} F_{i-1} \xrightarrow{\eta_{i-1}} \cdots \longrightarrow F_m \longrightarrow 0.$$

Par pré-composition de F_\bullet par X_\bullet , on a un complexe double :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & (-1)^i F_i(d_{j+1}) & & (-1)^{i-1} F_{i-1}(d_{j+1}) & & \\ \cdots & \longrightarrow & F_i(X_j) & \xrightarrow{\eta_i(X_j)} & F_{i-1}(X_j) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & (-1)^i F_i(d_j) & & (-1)^{i-1} F_{i-1}(d_j) & & \\ \cdots & \longrightarrow & F_i(X_{j-1}) & \xrightarrow{\eta_i(X_{j-1})} & F_{i-1}(X_{j-1}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

où, pour plus de lisibilité, on note $F_i(X_j)$ le foncteur $F_i(X_j \otimes_{RG} -)$, et $F_i(d_j)$ le morphisme $F_i(d_j \otimes_{RG} Id_-)$. On note $\eta_i(X_j)$ la transformation naturelle $\eta_i(X_j \otimes_{RG} -)$. On peut alors prendre le complexe total de ce complexe double, que l'on note $L_X(F)$:

$$L_X(F)_k := \bigoplus_{i-j=k} F_i(X_j).$$

La différentielle du complexe total est notée δ . Si $w_{i,j} \in F_i(X_j)$, avec $i+j = k$, alors

$$\delta_k(w_{i,j}) = (-1)^i F_i(d_{j+1})(w_{i,j}) + \eta_i(X_j)(w_{i,j}) \in F_i(X_{j+1}) \oplus F_{i-1}(X_j).$$

On doit démontrer que :

1. $L_X(F)$ est un complexe.
2. $L_X : Ch^-(Fun_k^+(b)) \rightarrow Ch^-(Fun_k^+(c))$ est un foncteur additif.
3. $L_X : D^-(Fun_k^+(b)) \rightarrow D^-(Fun_k^+(c))$ est un foncteur triangulé bien défini.

1. On doit vérifier que $\delta_k := L_X(F)_k \rightarrow L_X(F)_{k-1}$ est une différentielle, c'est-à-dire $\delta^2 = 0$. C'est formel : soit $w \in L_X(F)$, $(\delta_{k-1} \circ \delta_k(w))_{i-1,j+1}$ la composante qui arrive dans $F_{i-1}(X_{j+1})$. Un calcul donne :

$$\begin{aligned} (\delta_{k-1} \circ \delta_k(w))_{i-1,j+1} &= (-1)^{i-1} F_{i-1}(d_{j+1})\eta_i(X_j)(w_{i,j}) + (-1)^i \eta_i(X_{j-1})(F_i(d_{j+1})) \\ &= 0, \text{ puisque } \eta_i \text{ est une transformation naturelle.} \end{aligned}$$

Donc $L_X(F)$ est bien un complexe.

2. Soient $(F_\bullet, \eta_\bullet)$ et $(G_\bullet, \gamma_\bullet)$ deux complexes de $Ch^-(Fun_k^+(b))$, et Φ un morphisme F_\bullet de G_\bullet . Pour chaque i, j , $\phi_i(X_j)$ est un morphisme de $F_i(X_j)$ vers $G_i(X_j)$. Il est donc clair que nous avons un morphisme $\Phi_k : L_X(F)_k$ vers $L_X(G)_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On doit juste démontrer que tous ces morphismes commutent aux morphismes de dérivations. On va démontrer que tous les diagrammes qui suivent sont commutatifs.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i-j=k} F_i(X_j) & \xrightarrow{\alpha} & F_{i-1}(X_j) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi_{i-1,j} \\ \bigoplus_{i-j=k} G_i(X_j) & \xrightarrow{\beta} & G_{i-1}(X_j) \end{array}$$

Où les flèches horizontales sont les restrictions des différentielles à $F_{i-1}(X_j)$ et $G_{i-1}(X_j)$ respectivement. Pour $w = (w_{i,j})$, un calcul montre que

$$\Phi_{i-1,j} \circ \alpha(w) = \Phi_{i-1,j}(\eta_i(X_j)(w_{i,j})) + (-1)^{i-1} \Phi_{i-1,j} F_{i-1}(d_j)(w_{i-1,j-1}),$$

et

$$\beta \circ \Phi(w) = \gamma_i(X_j)(\Phi_{i,j}(w_{i,j})) + (-1)^{i-1} G_{i-1}(d_j)(\Phi_{i-1,j-1}(w_{i-1,j-1})).$$

Il y a égalité puisque Φ est un morphisme de complexes et pour tous i, j , $\Phi_{i,j}$ est une transformation naturelle de foncteurs. Il est alors évident que L_X est un foncteur additif : $Ch^-(Fun_R^+(b)) \rightarrow Ch^-(Fun_R^-(c))$.

3. Soient $(F_\bullet, \eta_\bullet)$ et $(G_\bullet, \gamma_\bullet)$ deux complexes quasi-isomorphes de $Ch^-(Fun_R^+(b))$. On doit vérifier que les complexes de foncteurs $L_X(F)$ et $L_X(G)$ sont quasi-isomorphes. Soit $\Phi : F \rightarrow G$ un quasi-isomorphisme. On démontre que les groupes d'homologie de $L_X(F)$ sont des sous-groupes des groupes d'homologie de F , donc il est clair qu'un quasi-isomorphisme de F vers G induit un quasi-isomorphisme de $L_X(F) \rightarrow L_X(G)$. Si $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$Ker(\delta_k)_{i-1,j} = Ker(\eta_{i-1}(X_j)) \cap Ker(F_{i-1}(d_{j+1})) \subseteq Ker(\eta_{i-1}(X_j)).$$

et

$$Im(\delta_{k-1})_{i-1,j} \supseteq Im(\eta_i(X_i)) \cup Im(F_{i-1}(d_j)) \supseteq Im(\eta_i(X_j)).$$

donc $H^k(L_X(F))_{i-1,j} \subseteq H^{i-1}(F(X_j))$, and $H^k(L_X) \subseteq \bigoplus_{i-j=k} H^i(F(X_j))$. \square

5.7. Equivalences dérivées entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques

Dans la suite, on va noter de la même façon le morphisme L_{X_\bullet} et le morphisme induit entre les catégories de chaînes ainsi que les catégories dérivées de l'algèbre de Mackey cohomologique.

Lemme 5.7.3. *Soient G et H deux groupes finis, soit b un bloc de RG et c un bloc de RH . Soit X et Y deux complexes de $RGb-RHc$ -bimodules avec la propriété \mathcal{P}_\bullet , alors*

- $L_{X \oplus Y} \cong L_X \oplus L_Y$.
- Si le complexe X est contractile, alors L_X est contractile dans le sens suivant : le complexe $L_X(F)$ est contractile pour tous complexes de foncteurs de $\text{Fun}_R^+(b)$.

Démonstration. La première partie est claire. Pour la seconde partie, soit (X_\bullet, d_\bullet) un complexe contractile. Soit (s_\bullet) une homotopie i-e une famille d'applications $s_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ telles que $id_{X_i} = s_{i-1}d_i + d_{i+1}s_i$. Soit $(F_\bullet, \eta_\bullet)$ un complexe de $\text{Fun}_R^+(b)$. On va montrer que $L_X(F)$ est un complexe contractile. Soit

$$S_{i,j} := (-1)^i F_i(s_j \otimes Id_-) : F_i(X_{j+1} \otimes -) \rightarrow F_i(X_j \otimes -).$$

Alors :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \bigoplus_{i-j=k} F_i(X_j) & \longrightarrow & \bigoplus_{i-j=k} F_i(X_{j+1}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \swarrow \oplus S_{i,j-1} & & \swarrow \oplus S_{i,j} & & \\ \bigoplus_{i-j=k} F_i(X_{j-1}) & \longrightarrow & \bigoplus_{i-j=k} F_i(X_j) & \longrightarrow & \bigoplus_{i-j=k} F_i(X_{j+1}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

On pose $S_k := \bigoplus_{i-j=k} S_{i,j-1}$. On doit alors vérifier que ceci est effectivement une homotopie. On va montrer que la composante de $S_{k-1}\delta_k + \delta_{k+1}S_k$ qui arrive dans $F_i(X_j)$ est l'identité de $F_i(X_j)$. Ceci peut-être vu en regardant les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i-j=k} F_i(X_j) & \xrightarrow{a} & F_i(X_{j+1}) \\ & \swarrow b & \swarrow d \\ F_{i+1}(X_j) \oplus F_i(X_{j-1}) & \xrightarrow{c} & F_i(X_j) \end{array}$$

où les applications sont :

$$\begin{aligned} a &:= \eta_{i+1}(X_{j+1}) + (-1)^i F_i(d_{j+1}). \\ b &:= (-1)^{i+1} F_{i+1}(s_j) + (-1)^i F_i(s_{j-1}). \\ c &:= \eta_{i+1}(X_j) + (1)^i F_i(d_j). \\ d &:= (-1)^i F_i(s_j). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} da + cb &= F_i(d_{j+1}s_j + s_{j-1}d_j) + (-1)^i F_i(s_j)\eta_{i+1}(X_{j+1}) + (-1)^{i+1}\eta_{i+1}(X_j)F_{i+1}(s_j) \\ &= Id_{F_i(X_j)}, \end{aligned}$$

puisque η_{i+1} est une transformation naturelle de F_{i+1} vers F_i . \square

Lemme 5.7.4. *Soient G , H et K trois groupes finis et b , c et d des blocs de RG , RH et RK respectivement. Soit (X_\bullet, d_\bullet^X) un complexe borné de RGb - RKd -bimodules. Soit (Y_\bullet, d_\bullet^Y) un complexe borné de RHc - RGb -bimodules et soit $(F_\bullet, \eta_\bullet)$ un complexe borné à droite de $\text{Fun}_R^+(c)$. Si les complexes X et Y ont la propriété \mathcal{P}_\bullet , alors,*

$$(L_X \circ L_Y) \cong L_{Y \otimes_{RG} X}.$$

Démonstration. On choisit la convention suivante pour le produit tensoriel de complexes :

$$(Y \otimes_{RG} X)_k := \bigoplus_{i+j=k} Y_i \otimes X_j.$$

La dérivation est :

$$D_k := \bigoplus_{i-j=k} (-1)^i 1 \otimes d_j^X + d_i^Y \otimes 1.$$

On montre que $L_X \circ L_Y(F)$ est le complexe total du complexe double suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_m((Y \otimes X)_{m-k}) & \xrightarrow{\eta_m((Y \otimes X)_{m-k})} & F_{m-1}((Y \otimes X)_{m-k}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow (-1)^m F_m(D_{m-k+1}) & & \downarrow (-1)^{m-1} F_{m-1}(D_{m-k+1}) & & \\ \cdots & \longrightarrow & F_m((Y \otimes X)_{m-k+1}) & \xrightarrow{\eta_m((Y \otimes X)_{m-k})} & F_{m-1}((Y \otimes X)_{m-k+1}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Pour voir ceci, on doit juste changer l'ordre de sommation, ce qui est possible puisque les foncteurs sont additifs et les sommes qui apparaissent sont toutes finies, les complexes X et Y étant bornés. Il faut ensuite vérifier que la dérivation est bien celle attendue.

$$\begin{aligned} (L_X \circ L_Y(F))_k &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} F_m(Y_{m-n} \otimes_{RG} X_{n-k}) \\ &\cong \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} F_m\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (Y_{m-n} \otimes_{RG} X_{n-k})\right) \\ &= \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} F_m((Y \otimes_{RG} X)_{m-k}). \end{aligned}$$

5.7. Equivalences dérivées entre catégories de foncteurs de Mackey cohomologiques

Soit $m, n \in \mathbb{Z}^2$, la dérivation en $F_m(Y_{m-n} \otimes X_{n-k})$ est :

$$F_m((-1)^m d_{m-n+1}^Y \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes d_{n-k+1}^X) + \eta_m(Y_{m-n} \otimes X_{n-k}),$$

donc la dérivation en $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F_m(Y_{m-n} \otimes X_{n-k})$ est :

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (F_m((-1)^m d_{m-n+1}^Y \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes d_{n-k+1}^X) + \eta_m(Y_{m-n} \otimes X_{n-k})) = \\ & (-1)^m (F_m(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} d_{m-n+1}^Y \otimes 1) \bigoplus F_m(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{m-n} 1 \otimes d_{n-k+1}^X)) + \eta_m(Y \otimes X)_{m-k} \\ & = (-1)^m F_m(D_{m-k+1}) + \eta_m((X \otimes X^*)_{m-k}). \end{aligned}$$

puisque :

$$\begin{aligned} D_{m-k+1} &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} d_{m-n+1}^Y \otimes 1 + \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{m-n+1} 1 \otimes d_{n-k}^X \\ &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} d_{m-n+1}^Y \otimes 1 + \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{m-n} 1 \otimes d_{n-k+1}^X. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que cet isomorphisme est fonctoriel en F . \square

On va appliquer les lemmes 5.7.2, 5.7.3 et 5.7.4 à la situation suivante : soient RGb et RHc deux blocs d'algèbres de groupes qui sont dérivés équivalents. D'après les résultats standards sur les équivalences dérivées entre blocs d'algèbres de groupes, on peut supposer que l'équivalence dérivée est donnée par le produit tensoriel avec un complexe bilatère endo-scindé X_\bullet (ou complexe de Rickard), et on peut supposer que l'équivalence quasi-inverse est donnée par le produit tensoriel par le dual R -linéaire X_\bullet^* .

Théorème 5.7.5. *Soient G et H deux groupes finis et b un bloc de RG . Soit c un bloc de RH . supposons que :*

1. *Il y a un complexe bilatère X_\bullet de RH - RG -bimodules, tel que $X \otimes_{RH} X^* \cong RGb$ et $X^* \otimes_{RG} X \cong RHc$ dans les catégories homotopiques de bimodules correspondantes.*
2. *Si V est un RGb -module de p -permutation, alors $X_i \otimes_{RGb} V$ est un RHc -module de p -permutation pour tout $i \in \mathbb{Z}$.*
3. *Si W est un RHc -module de p -permutation, alors $X_i^* \otimes_{RHc} W$ est un RGb -module de p -permutation pour tout $i \in \mathbb{Z}$.*

Alors le foncteur L_X induit une équivalence de catégorie triangulée

$$L_X : D^-(Comack_R(c)) \cong D^-(Comack_R(b)).$$

Démonstration. On démontre que $D^-(Fun_k^+(b)) \cong D^-(Fun_k^+(c))$.
Grâce au lemme 5.7.2, on a deux foncteurs triangulés :

$$L_X : D^-(Fun_R^+(c)) \rightarrow D^-(Fun_R^+(b))$$

et

$$L_{X^*} : D^-(Fun_R^+(b)) \rightarrow D^-(Fun_R^+(c)).$$

Grâce au lemme 5.7.4, on a $L_{X^*} \circ L_X \cong L_{X \otimes X^*}$.

Par hypothèse, l'équivalence $X \otimes X^* \cong RGb$ a lieu dans la catégorie homotopique, donc $X \otimes X^* = RGb \oplus C$ où C est un complexe contractile. Grâce au lemme 5.7.3,

$$L_{X^*} \circ L_X \cong L_{X \otimes X^*} = L_{RGb \oplus C} \cong L_{RGb} \oplus L_C$$

Il est clair que $L_{RGb} \cong Id_{D^-(Fun_R^+(b))}$ et $L_C \cong 0$.

Inversement on a, $L_X L_{X^*} \cong Id_{D^-(Fun_R^+(c))}$. □

On a comme corollaire immédiat :

Corollaire 5.7.6. *Soient b un bloc de RG et c un bloc de RH tel que RGb et RHc sont splendidement dérivés équivalents, alors*

$$D^b(\text{co}\mu_R(b)\text{-Mod}) \cong D^b(\text{co}\mu_R(c)\text{-Mod}).$$

5.8 Application aux blocs nilpotents.

Les algèbres de Mackey cohomologiques ont une grosse différence avec les algèbres de Mackey p -locales. Les matrices de Cartan des algèbres de Mackey p -locales sont symétriques et non dégénérées, par contre les matrices de Cartan des algèbres cohomologiques sont, elles, en général dégénérées. Il est donc naturel de se demander s'il est possible de caractériser les groupes, ou les blocs, ayant une matrice de Cartan cohomologique non dégénérée. Cela a été fait par Serge Bouc dans [9]. Il démontre dans ce papier le théorème suivant :

Théorème 5.8.1 (Bouc). *Soit G un groupe fini et b un bloc de kG . Alors le déterminant de la matrice de Cartan de $\text{co}\mu_k(b)$ est non nul si et seulement si le bloc b est nilpotent à défaut cyclique.*

La démonstration, qui est loin d'être triviale, se fait en deux étapes, la première est de trouver une formule explicite pour le déterminant de cette matrice, puis la seconde est d'étudier cette formule dans le cas où elle est

5.8. Application aux blocs nilpotents.

nulle. C'est donc une approche combinatoire et le résultat peut paraître surprenant. Cependant, en utilisant les résultats de la section précédente, on va voir que ce résultat est similaire au résultat d' Alexander Zimmermann et Raphaël Rouquier sur les blocs nilpotents :

Théorème 5.8.2 ([43]). *Soit G un groupe fini et b un bloc de kG . Soit P un p -groupe. Le bloc b est nilpotent si et seulement si kGb est dérivé équivalent à kP (l'équivalence dérivée étant isomorphe à une équivalence de Morita).*

Soit $B = kGb$ un bloc nilpotent d'un groupe fini G . D'après un théorème de Puig ([24] ou [18]), on a $B \cong \text{Mat}(m, kP)$ où $m \in \mathbb{N}$ et P est un groupe de défaut du bloc B . Ce résultat n'est plus vrai pour les algèbres de Mackey p -locales où cohomologiques (pour plus de détails sur les équivalences entre $\mu_k^1(b)$ et $\mu_k(P)$, voir le chapitre 7). Le résultat de Puig entraîne en particulier l'existence d'une équivalence de Morita entre $B\text{-Mod}$ et $kP\text{-Mod}$. On sait relever une équivalence de Morita entre algèbres de groupes en une équivalence de Morita entre algèbres de Mackey cohomologiques correspondantes à condition que cette équivalence ait une propriété supplémentaire. Cependant, même dans le cas des équivalences entre blocs nilpotents, cette propriété n'est pas toujours présente :

Exemple 5.8.3. $G := Q_8 \rtimes C_3$ voir l'exemple 4.5.

Cependant l'équivalence $B\text{-Mod} \rightarrow kP\text{-Mod}$ est donnée par un bimodule d'endo-permutation. Donc le procédé de Jeremy Rickard s'applique et on peut relever le bimodule qui donne l'équivalence $B\text{-Mod} \rightarrow kP\text{-Mod}$ en une équivalence dérivée splendide. Plus généralement, Nadia Mazza a démontré, en s'appuyant sur les travaux (voir [37] pour une synthèse) de Bouc, Carlson, Dade, Rickard et Thévenaz, dans la section 6 de [22] le théorème suivant :

Théorème 5.8.4. *Soit P un p -groupe, alors les seuls RP -modules d'endo-permutation indécomposables qui n'ont pas de résolution endo-scindée sont les RP -modules "exceptionnels" (de dimension $\frac{|P|}{2} \pm 1$) dans le cas où $p = 2$ et P est un groupe de quaternions généralisé.*

Donc, en assemblant tous ces résultats, on a :

Corollaire 5.8.5. *Soit $B = kGb$ un bloc nilpotent de défaut P , qui ne possède pas de groupe de type quaternionien dans sa base génétique, alors*

$$D^b(\text{co}\mu_k(b)) \cong D^b(\text{co}\mu_k(P)).$$

Comme le déterminant de Cartan est un invariant de la catégorie dérivée, si b est un bloc nilpotent de défaut P , alors le déterminant de la matrice de Cartan de $\text{co}\mu_k(b)$ est le déterminant de la matrice de Cartan de $\text{co}\mu_k(P)$.

Lemme 5.8.6. *Soit P un p -groupe. La matrice de Cartan de $\text{co}\mu_k(P)$ est indexée par les sous-groupes de P . Soient Q et R deux sous-groupes de P , alors*

$$C_{Q,R} = \text{Card}([Q \setminus P/R]).$$

où $\text{Card}([Q \setminus P/R])$ est le nombre de doubles classes de P modulo Q et R .

Démonstration. Les RP -modules de p -permutation indécomposables sont les kP/Q pour $Q \leq P$. Donc les foncteurs de Mackey cohomologiques projectifs indécomposables sont les $FP_{kP/Q}$. Or si Q et R sont des sous-groupes de P , on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Comack}_k(P)}(FP_{kP/Q}, FP_{kP/R}) &\cong \text{Hom}_{kG}(kP/Q, kP/R) \\ &= \text{Hom}_{kG}(\text{Ind}_Q^P k, \text{Ind}_R^P k) \\ &\cong \text{Hom}_{kQ}(k, \text{Res}_Q^P \text{Ind}_R^P k) \\ &\cong \bigoplus_{g \in [Q \setminus P/R]} \text{Hom}_{kQ}(k, \text{Ind}_{Q \cap {}_g R}^Q k) \\ &\cong \bigoplus_{g \in [Q \setminus P/R]} \text{Hom}_{k[Q \cap {}_g R]}(k, k). \end{aligned}$$

□

Cette matrice est bien connue, elle apparaît notamment lorsque l'on s'intéresse au foncteur à bi-ensembles simple $S_{1,F}$. Le rang sur le corps F d'une matrice de ce type pour le groupe fini G est alors la dimension de $S_{1,F}(G)$ ([5]). Cette matrice a été étudiée par Jacques Thévenaz :

Théorème 5.8.7 ([36]). *Si le corps F est de caractéristique zéro. La matrice C est non dégénérée si et seulement si le groupe P est cyclique.*

La réciproque du corollaire 5.8.5, c'est-à-dire que si un bloc d'algèbre de Mackey cohomologique est dérivé équivalent à l'algèbre de Mackey cohomologique, alors le bloc b est nilpotent n'est pas connue à l'heure actuelle. Plus généralement,

Question 5.8.8. *Soient G et H des groupes finis. Soit b un bloc de RG et c un bloc de RH tels que $D^b(\text{co}\mu_R(b)) \cong D^b(\text{co}\mu_R(c))$. A-t-on une équivalence dérivée $D^b(RGb) \cong D^b(RHc)$?*

De même on peut se poser la question pour les équivalences de Morita.

Chapitre 6

Algèbres d'arbres de Brauer.

6.1 Introduction.

Dans ce chapitre on s'intéresse à la structure des algèbres de Mackey des blocs à défaut d'ordre p . Il est bien connu que sur le corps de caractéristique p , ces algèbres sont des algèbres d'arbres de Brauer. La première partie de ce chapitre contient des rappels sur les algèbres d'arbres de Brauer ainsi que sur la marche de Green. On suit la thèse de Markus Linckelmann [20] dans cette première section afin d'exhiber l'existence d'un marche de Green pour ce type d'algèbre. A la fin de cette section, on rappelle le théorème de Jacques Thévenaz et Peter Webb, qui affirme que les algèbres de Mackey de ce type de bloc sont des algèbres d'arbres de Brauer. La connaissance des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables pour les groupes ayant un p -sous-groupe de Sylow normal, permet de simplifier légèrement la démonstration originale. Dans la seconde partie de ce chapitre, on démontre que sur l'anneau des entiers p -adiques, ces algèbres sont des ordres de Green. Pour plus de facilité de lecture, on donne les résultats principaux sur ces ordres avec démonstration dans le cadre où l'anneau de base est un anneau de valuation discrète complet. On propose aussi une démonstration d'un résultat de Roggenkamp laissé sans démonstration dans le paragraphe 3 de [31].

6.2 Algèbre d'arbre de Brauer.

6.2.1 Définitions.

Soit k un corps commutatif.

Définitions 6.2.1. • Un *graphe fini* est un couple de deux ensembles E et V , où E est un sous-ensemble des couples d'éléments de l'ensemble

fini V . Les éléments de E s'appellent les arêtes du graphe et les éléments de V sont les sommets du graphe. Si v et w sont des sommets, on note (v, w) l'arête entre ces deux sommets.

- Un graphe est *connexe* si pour tout couple $(v, w) \in V \times V$, il existe une suite d'éléments v_1, v_2, \dots, v_n de V tel que $v_1 = v$ et $v_n = w$ avec $(v_i, v_{i+1}) \in E$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$.
- Un graphe fini connexe est un *arbre* si pour toute arête $e \in E$, le graphe $(E \setminus \{e\}, V)$ n'est pas connexe.
- Soit v un sommet, une arête de la forme (v, w) est dite *adjacente* au sommet v . Inversement, le sommet v est *adjacent* à l'arête (v, w) .
- Un sommet qui ne possède qu'une arête adjacente est une *feuille* du graphe.

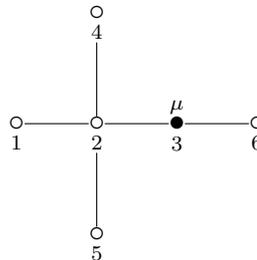
Un arbre est dit *plongé dans le plan* si pour chaque sommet v , on a choisi un ordre cyclique sur les arêtes qui sortent du sommet v .

Définition 6.2.2. Un *arbre de Brauer* est un arbre plongé dans le plan. Un arbre de Brauer avec *multiplicité exceptionnelle* $\mu \in \mathbb{N}^*$ est un arbre de Brauer sur lequel on a marqué un sommet. L'entier μ est associé au sommet marqué.

Remarque 6.2.3. On utilise la convention suivante : à chaque sommet v on associe la multiplicité $\mu(v)$. Si le sommet v n'est pas exceptionnel alors $\mu(v) = 1$ et si v est exceptionnel, $\mu(v)$ est la multiplicité μ de v . Dans le cas où l'arbre n'a pas de sommet exceptionnel, on peut considérer qu'il possède un sommet exceptionnel de multiplicité 1.

La donnée d'un ordre cyclique sur les arêtes sortant de chaque sommet permet de dessiner l'arbre dans le plan \mathbb{R}^2 . On utilise la convention suivante : les arêtes sont représentées par des segments $-$, les sommets sont représentés par des cercles \circ et le sommet exceptionnel de multiplicité μ est représenté par \bullet . Pour l'ordre cyclique, on utilise le sens trigonométrique.

Exemple 6.2.4.



L'ordre cyclique autour du sommet 2 est $(2, 3) \rightarrow (2, 4) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 5) \rightarrow (2, 3)$. Celui autour du sommet 4 est $(4, 2) \rightarrow (4, 2)$ et celui autour du sommet 3 est $(3, 6) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 6)$.

6.2. Algèbre d'arbre de Brauer.

Définition 6.2.5. Soit T un arbre de Brauer. La k -algèbre symétrique A de dimension finie, est une *algèbre d'arbre de Brauer* T si :

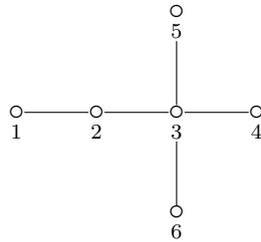
1. Les classes d'isomorphisme des A -modules projectifs indécomposables sont indexées par les arêtes de T .
2. Soit $v_1 \xrightarrow{e} v_2$ une arête de T et P_e un module projectif indécomposable correspondant à e , on a $Rad(P_e)/Soc(P_e) \cong U_{v_1}(e) \oplus U_{v_2}(e)$ pour deux A -modules unisériels $U_{v_1}(e)$ et $U_{v_2}(e)$ (possiblement nuls).
3. Si v n'est pas un sommet exceptionnel et si v est une feuille de l'arbre, alors $U_v(e) = 0$.
4. Si v est adjacent à l'arête e , alors la longueur de composition de $U_v(e)$ est $\mu(v) \cdot s(v) - 1$, où $s(v)$ est le nombre d'arêtes adjacentes à v et $\mu(v)$ est la multiplicité de v .
5. Si v est adjacent à e et si v n'est pas une feuille de l'arbre, alors la série de composition de $U_v(e)$ est donnée par les conditions :

$$Rad^{i-1}(U_v(e))/Rad^i(U_v(e)) \cong P_{\sigma_v^i(e)}/Rad(P_{\sigma_v^i(e)}),$$

pour $i \leq l(U_v(e))$ et $\sigma_v^i(e)$ est la i -ème arête après e dans l'ordre cyclique autour du sommet v .

Cette définition est légèrement technique et peut paraître compliquée. En réalité elle ne l'est pas, et la combinatoire détaillée ci-dessus, permet de comprendre extrêmement facilement les modules projectifs indécomposables.

Exemple 6.2.6. Considérons l'arbre T :



Soit A une algèbre d'arbre de Brauer T . On note $P_{i,j}$ le A -module projectif indécomposable qui correspond à l'arête (i,j) et $S_{i,j}$ la tête de ce module. Alors les structures de Loewy des projectifs indécomposables sont lisibles

dans l'arbre. Par exemple :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & S_{1,2} & & & & S_{2,3} \\
 & & & & & & \\
 P_{1,2} = & & S_{2,3} & & P_{2,3} = & & S_{3,6} \\
 & & & & & & \\
 & & S_{1,2} & & S_{3,4} & & S_{1,2} \\
 & & & & & & \\
 & & & & S_{3,5} & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & S_{2,3}
 \end{array}$$

La définition des algèbres d'arbres de Brauer pose la question de l'existence de ce type d'algèbres. On va voir que non seulement ce type d'algèbre existe, mais apparaît très naturellement en théorie des représentations.

Exemple 6.2.7. Soit N_n^{en+1} l'algèbre de Nakayama symétrique d'indices $(en + 1, n)$, c'est-à-dire l'algèbre de carquois Γ , où Γ est un cycle de n flèches, quotientée par les relations qui annulent les chemins de longueur au moins $en + 1$. L'algèbre N_n^{en+1} est une algèbre d'arbre de Brauer dont l'arbre est une étoile à $en + 1$ branches avec un sommet exceptionnel de multiplicité e placé en son centre.

6.2.2 Algèbre stablement équivalente à une algèbre unisérielle.

Dans cette section, on va voir que les algèbres d'arbres de Brauer sont des objets extrêmement naturels. Ce sont des algèbres qui sont stablement équivalentes à une algèbre symétrique unisérielle. On suit, sans donner les démonstrations, la thèse de Markus Linckelmann [20] ainsi que le livre à paraître d'Alexander Zimmermann [43].

Notations 6.2.8. Soit A une k -algèbre symétrique non simple et indécomposable et B une algèbre de Nakayama symétrique N_n^{en+1} avec $e \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note T_1, T_2, \dots, T_m des représentants des classes d'isomorphisme des B -modules simples. On note Q_i une couverture projective de T_i , pour $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Soient S_1, S_2, \dots, S_n des représentants des classes d'isomorphisme de A -modules simples et P_1, P_2, \dots, P_n leurs couvertures projectives respectives. On note Ω le translaté d'Heller à la fois dans $A\text{-Mod}$ et dans $B\text{-Mod}$.

6.2. Algèbre d'arbre de Brauer.

On suppose qu'il existe un foncteur exact $F : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$ et un foncteur exact $G : B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ tels que les foncteurs induits entre les catégories stables soient des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre (une équivalence stable à la Morita possède cette propriété).

Remarque 6.2.9. Quitte à remplacer le couple (F, G) par des foncteurs naturellement isomorphes, on peut supposer que les foncteurs F et G envoient les modules indécomposables sur des modules indécomposables.

L'existence d'une équivalence stable entre A et B implique de très fortes propriétés sur l'algèbre A . La première de ces propriétés est le type de représentation de A :

Proposition 6.2.10. *La k -algèbre A est de type de représentation fini.*

Démonstration. Cela vient du fait que B est de type de représentation fini et que si M est un objet indécomposable de $A\text{-mod}$ alors $F(M)$ est indécomposable. \square

Le fait que l'algèbre B soit unisérielle permet de définir des applications de l'ensemble des classes d'isomorphisme de A -modules simples dans les classes d'isomorphisme de B -modules simples :

Proposition 6.2.11. *On définit γ et $\delta : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ par :*

- $T_{\gamma(i)} \cong \text{Soc}(F(S_i))$.
- $T_{\delta(i)} \cong F(S_i)/\text{Rad}(F(S_i))$.

Les applications γ et δ sont des bijections.

Démonstration. Proposition 5.6 de [20]. \square

De même l'uniserialité et la symétrie de l'algèbre B entraîne :

Lemme 6.2.12. *Il existe $\sigma \in S_m$ défini par $T_{\sigma(i)} = \text{Rad}(Q_i)/\text{Rad}^2(Q_i)$. La permutation σ est un cycle transitif de longueur m .*

Proposition 6.2.13. *Pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ il y a des A -modules unisériels U_i et V_i définis par $U_i \cong GT_{\delta(i)}$ et $V_i = G\Omega T_{\gamma(i)}$ tels que :*

1. $U_i + V_i = \text{Rad}(P_i)$.
2. $U_i \cap V_i = \text{Soc}(P_i)$.
3. $U_i/(U_i \cap V_i)$ et $V_i/(U_i \cap V_i)$ n'ont pas de facteur de composition en commun.

Démonstration. Théorème 5.9 de [20]. \square

Théorème 6.2.14. *Soit $\rho = \gamma^{-1} \circ \delta$ et $\tau = \delta^{-1} \circ \sigma \circ \gamma$, alors*

1. $U_i/\text{Rad}(U_i) \cong S_{\rho(i)}$ et $V_i/\text{Rad}(V_i) \cong S_{\tau(i)}$.
2. $\tau \circ \rho \in S_n$ est un cycle transitif.
3. Si pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $G\Omega T_i \cong \Omega GT_i$ et $G\Omega^{-1}T_i \cong \Omega^{-1}GT_i$, alors pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, il y a des suites exactes :

$$0 \longrightarrow U_i \longrightarrow P_i \longrightarrow V_{\tau^{-1}(i)} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow V_i \longrightarrow P_i \longrightarrow U_{\rho^{-1}(i)} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Théorème 5.10 de [20]. □

Comme $\tau \circ \rho$ est un cycle transitif, on peut modifier la numérotation des modules simples de telle façon que $\tau \circ \rho(i) = i + 1$ modulo n . On a alors $(\tau \circ \rho)^{-1}(i) = \rho^{-1} \circ \tau^{-1}(i) = i - 1$. On a donc des suites exactes

$$0 \longrightarrow U_i \longrightarrow P_i \longrightarrow V_{\tau^{-1}(i)} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow V_{\tau^{-1}(i)} \longrightarrow P_{\tau^{-1}(i)} \longrightarrow U_{i-1} \longrightarrow 0,$$

Donc chaque module U_i ou V_i possède une résolution projective périodique de période $2n$. Chaque module projectif apparaît exactement deux fois par période.

Corollaire 6.2.15. *Supposons que $G\Omega T \cong \Omega GT$ et $G\Omega^{-1}T \cong \Omega^{-1}GT$ pour tout B -module simple T , alors*

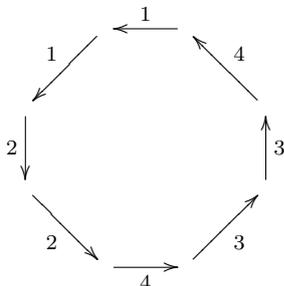
1. Les facteurs de composition de U_i sont $S_{\rho(i)}, S_{\rho^2(i)}, \dots, S_{\rho^a(i)}$ où $a = l(U_i)$.
2. Les facteurs de composition de V_i sont les $S_{\tau(i)}, S_{\tau^2(i)}, \dots, S_{\tau^b(i)}$, où $b = l(V_i)$.
3. Pour tout i , $l(U_i) = l(U_{\rho(i)})$ et $l(V_i) = l(V_{\tau(i)})$.
4. $\{\rho^l(i) ; l \in \mathbb{N}\} \cap \{\tau^l(i) ; l \in \mathbb{N}\} = \{i\}$.

Démonstration. Corollaire 5.11 de [20]. □

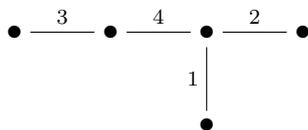
Le lemme suivant, est annoncé sans démonstration dans [15]. La démonstration présentée ici est tirée du livre d'Alexander Zimmermann [43]. On dessine un carquois cyclique fermé à $2n$ flèches, dans le même sens, et on étiquette les arêtes successives de la façon suivante $1, \tau(1), 2, \tau(2), \dots, n, \tau(n)$. Chaque entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ apparaît exactement deux fois. La seconde fois que l'on rencontre un entier i , on inverse la flèche, "so that the directions cancel out" ([15]).

6.2. Algèbre d'arbre de Brauer.

Exemple 6.2.16. Prenons $n = 4$ et $\tau = (1, 2, 4)$. Alors on a la construction suivante :



Lorsque l'on applique l'algorithme, on a :



Lemme 6.2.17. *Le résultat de cet algorithme est un arbre.*

Démonstration. On va démontrer ce résultat par récurrence sur le nombre de classes d'isomorphisme de A -modules simples. Plus précisément, on démontre que pour une algèbre de type de représentation fini qui possède les propriétés du théorème 6.2.14, le graphe Γ formé à l'aide de la permutation τ est un arbre.

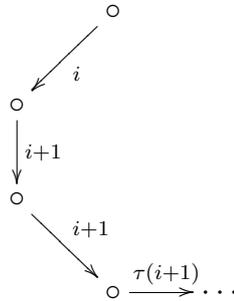
S'il n'y a qu'une seule classe d'isomorphisme, alors il n'y a rien à démontrer. S'il y a $n > 1$ classes d'isomorphisme de A -modules simples, alors comme A est de type de représentation fini, il existe un A -module projectif indécomposable P_i qui est unisériel. Le module étant unisériel, on a $\tau(i) = i + 1$ ou $\tau(i) = i$. En effet, les conditions de la proposition 6.2.13 imposent que $U_i = \text{Soc}(P_i)$ ou $V_i = \text{Soc}(P_i)$. Les suites exactes du théorème 6.2.14 imposent alors $\tau(i) = i + 1$ ou $\tau(i) = i$. En effet on a les suites exactes :

$$0 \longrightarrow U_{\tau(i)} \longrightarrow P_{\tau(i)} \longrightarrow V_i \longrightarrow 0$$

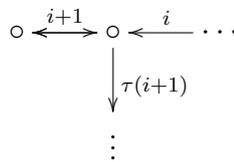
$$0 \longrightarrow V_{\rho(i)} \longrightarrow P_{\rho(i)} \longrightarrow U_i \longrightarrow 0,$$

Donc si V_i est simple, alors la première suite exacte nous donne $\tau(i) = i$. Si le module U_i est simple, la seconde suite exacte nous donne que $\rho(i) = i$, donc $\tau(i) = \tau\rho(i) = i + 1$.

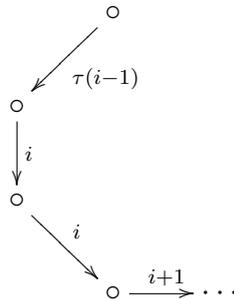
Donc, si $\tau(i) = i + 1$, le graphe de A est :



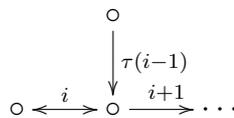
Le graphe, après avoir appliqué l'algorithme, est



Si $\tau(i) = i$, alors



Après avoir appliqué l'algorithme, on a



Si $\tau(i) = i + 1$, considérons l'idempotent e de A qui correspond au A -module projectif $\bigoplus_{j \neq i+1} P_j$. Si $\tau(i) = i$, on considère l'idempotent e qui correspond à $\bigoplus_{j \neq i} P_j$. Alors l'algèbre eAe est une algèbre de type de représentation fini qui possède $n - 1$ classes d'isomorphisme de modules simples. De plus la structure de Loewy du eAe -module projectif indécomposable Q se construit comme suit. On prend la structure de Loewy du A -module projectif P tel que $ePe = Q$ et on "efface" de cette structure les modules simples S tels que $eS = 0$. Donc l'algèbre eAe vérifie les conditions du théorème

6.2. Algèbre d'arbre de Brauer.

6.2.14. Par hypothèse de récurrence, le graphe Γ_{eAe} est un arbre. Considérons l'idempotent f qui correspond aux modules projectifs qui apparaissent sur des arêtes adjacentes à $i + 1$ (resp i). Alors fAf est une algèbre symétrique unisérielle de type de représentation fini, donc d'après la classification de ce type d'algèbre, l'algèbre fAf est Morita équivalente à une algèbre de Nakayama symétrique. Le graphe Γ_{fAf} est une étoile. Donc le graphe Γ_A est l'arbre Γ_{eAe} auquel on a ajouté exactement une arête entre les arêtes i et $\tau(i + 1)$ (resp. $\tau(i - 1)$ et $i + 1$). Le résultat de cette dernière opération est toujours un arbre. \square

Remarque 6.2.18. On peut utiliser la permutation ρ à la place de τ . Pour le module unisériel P_i , la condition sur $\tau : \tau(i) = i + 1$ (resp $\tau(i) = i$) devient $\rho(i) = i$ (resp. $\rho(i - 1) = i$)

Théorème 6.2.19 (Gabriel-Riedtmann). *Soit A une k -algèbre stablement équivalente à une algèbre de Nakayama symétrique B par un foncteur $F : A\text{-mod} \rightarrow B\text{-mod}$ tel que $F\Omega^{-1}T \cong \Omega^{-1}FT$ et $F\Omega T \cong \Omega FT$ pour tout A -module simple T . Alors A est une algèbre d'arbre de Brauer.*

Démonstration. On a montré que A est une algèbre d'arbre de Brauer Γ_A qui possède éventuellement plusieurs sommets exceptionnels. S'il existe plus d'un sommet exceptionnel, on peut alors montrer que l'algèbre A est de type de représentation infini, ce qui est impossible. \square

6.2.3 Equivalences entre algèbres d'arbre de Brauer.

On a vu dans le paragraphe précédent qu'une algèbre qui est stablement équivalente à une algèbre unisérielle symétrique possède une très riche combinatoire qui est encodée dans un arbre. Grâce à cette combinatoire, il est aisé de comprendre quand deux algèbres d'arbres de Brauer sont Morita ou dérivées équivalentes.

Proposition 6.2.20. *Soient A et B deux algèbres d'arbre de Brauer sur un même corps k . Les algèbres A et B sont Morita équivalentes si et seulement si les arbres de A et B sont isomorphes avec même multiplicité du sommet exceptionnel. L'isomorphisme doit être un isomorphisme d'arbres pointés, c'est-à-dire envoyer le sommet exceptionnel sur le sommet exceptionnel.*

Il existe une version de cette proposition pour les équivalences dérivées :

Théorème 6.2.21 (Rickard). *Soient A et B deux algèbres d'arbre de Brauer sur un même corps k . Les algèbres A et B sont dérivées équivalentes si et seulement si les arbres de A et B possèdent le même nombre de sommets ainsi que des sommets exceptionnels de même multiplicité.*

Démonstration. Théorème 4.2 de [27]. □

Remarque 6.2.22. Une algèbre d'arbre de Brauer est donc dérivée équivalente à une algèbre de Nakayama symétrique. D'après le théorème (ref) une équivalence dérivée entre deux algèbres symétriques entraîne l'existence d'une équivalence stable à la Morita. Donc une k -algèbre symétrique A est une algèbre d'arbre de Brauer si et seulement si A est stablement équivalent à la Morita, à une algèbre de Nakayama symétrique. On particulier une algèbre qui est Morita, ou dérivée, équivalente à une algèbre d'arbre de Brauer est une algèbre d'arbre de Brauer.

Donc, tout algèbre d'arbre de Brauer possède deux permutations ρ et τ avec les propriétés du théorème 6.2.14.

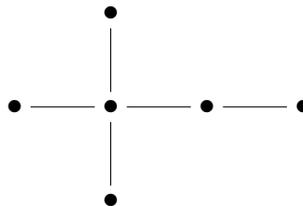
Définition 6.2.23. La permutation τ s'appelle marche de Green.

La donnée de l'arbre de Brauer, ainsi qu'un sommet de départ permet de reconstruire la permutation τ : soit Γ un arbre avec e arêtes.

1. Choisir une arête e de l'arbre et un sommet v de cette arête. L'arête reçoit le numéro 0.
2. Soit f l'arête suivant e dans l'ordre cyclique du sommet v . Et soit w l'autre sommet de f . Alors l'arête reçoit le numéro $\tau(0)$.
3. L'arête suivant f dans l'ordre cyclique de w reçoit le numéro 1.
4. Pour trouver $\tau(1)$ on procède comme en 2.
5. On arrête l'algorithme quand on a donné un valeur à $\tau(e - 1)$.

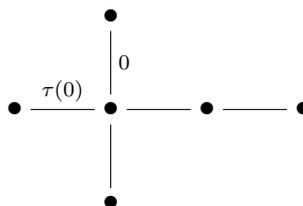
La procédure paraît compliquée, mais en réalité elle ne l'est pas :

Exemple 6.2.24. Considérons l'arbre suivant.



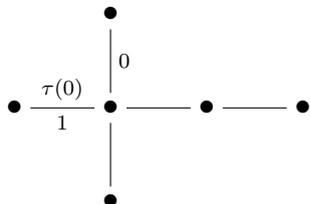
Si l'on choisit le sommet central ainsi que l'arête la plus haute pour débiter, le résultat de l'algorithme est le suivant :

après la seconde étape le résultat est :

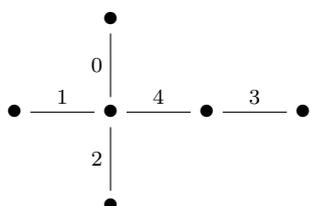


6.2. Algèbre d'arbre de Brauer.

L'étape suivante va assigner le numéro 1 à une arête :



Donc $\tau(0) = 1$. Le résultat final de l'algorithme est :



la permutation est $\tau = (0, 1, 2, 4)$.

Exemple 6.2.25. Dans le cas où l'arbre Γ est une étoile à e arêtes, on peut construire la marche de Green définie de la façon suivante : on commence l'algorithme par le sommet central et la première arête dans l'ordre cyclique de ce sommet. Alors $\tau = (0, 1, 2, \dots, e - 1)$.

6.2.4 Exemples d'algèbres d'arbre de Brauer.

Les algèbres d'arbres de Brauer sont importantes parce qu'elles apparaissent très naturellement. Ce sont les algèbres qui sont stablement, à la Morita, équivalentes à une algèbre symétrique unisérielle. Cependant, historiquement ces algèbres sont apparues plus tôt dans les travaux de Dade, Green et Janusz sur les représentations des blocs d'algèbres de groupe à défaut cyclique.

Théorème 6.2.26 (Dade). *Soient G un groupe fini et k un corps de caractéristique $p > 0$ "assez gros" pour G . Soit B un bloc de kG de défaut cyclique D . Alors B est une algèbre d'arbre de Brauer avec e classes d'isomorphisme de modules simples et un vortex exceptionnel de multiplicité $\mu = \frac{|D|-1}{e}$.*

6.2.5 Application aux algèbres de Mackey p -locales.

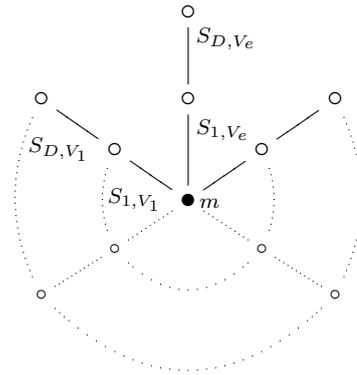
Soit G un groupe fini tel que $p \mid |G|$, et soit D un sous-groupe de G d'ordre p . Soit (K, \mathcal{O}, k) un système p -modulaire assez gros pour G et $N_G(D)$.

Soit b un bloc de kG de défaut D et b' le correspondant de Brauer de b dans $N_G(D)$.

Les algèbres de Mackey des blocs à défaut cyclique ne sont pas symétriques en générales donc ne peuvent-êre des algèbres d'arbres de Brauer. Cependant dans le cas des blocs à défaut (cyclique) d'ordre p , les algèbres de Mackey p -locales sont symétriques. Dans ce paragraphe, suivant la démonstration de Thévenaz et Webb, on montre que les algèbres de Mackey p -locales sont des algèbres d'arbre de Brauer.

On suppose qu'il y a e modules simples dans le bloc kGb et que la multiplicité du sommet exceptionnel est m . Il est bien connu que l'arbre de $kN_G(D)b'$ est une étoile avec en son centre le sommet exceptionnel.

Théorème 6.2.27. *L'algèbre $\mu_k^1(b')$ est une algèbre d'arbre de Brauer dont l'arbre est une étoile avec des bras sont de longueur 2. Le nombre de bras est le nombre de $kN_G(D)$ -modules simples dans le bloc b' .*



Démonstration. La démonstration se trouve dans la section 20 de [38]. On propose ici une démonstration légèrement différente, puisque l'on connaît les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables de ce bloc. Il y a $2e$ classes d'isomorphisme de foncteurs de Mackey projectifs indécomposables dans $\mu_k^1(b')$. En effet il y a e foncteurs de Mackey projectifs indécomposables de vortex 1, qui sont les couvertures projectives des $S_{1,V}$, où V est un $kN_G(D)b'$ -module simple. De plus il y a e foncteurs de Mackey projectifs indécomposables de vortex C_p qui sont les couvertures projectives de $S_{D,W}$ où W est un $kN_G(D)/D$ -module simple tel que $b'W \neq 0$.

Comme D est normal dans $N_G(D)$, l'action de D sur les $kN_G(D)b'$ -modules simples est triviale, et donc chaque $kN_G(D)$ -module simple est aussi un $k\overline{N}_G(D)$ -module simple. Il y a donc e tels modules simples. De plus, le défaut de b' étant D , les modules sont des $k\overline{N}_G(D)$ -modules projectifs indécomposables. Donc les e modules de p -permutation indécomposables

6.2. Algèbre d'arbre de Brauer.

de vortex D de $kN_G(D)b'$ sont $\text{Inf}_{\overline{N_G(D)}}^{N_G(D)}(S) = S$, où S parcourt les $kN_G(D)$ -modules simples.

On note V_1, \dots, V_e un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des $kN_G(D)b'$ -modules simples et P_1, \dots, P_e leur couverture projective.

1. Les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables de vortex 1 sont les FP_{P_i} .
2. Les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables de vortex D sont les $B_{N_G(D)/D} \otimes_{k\overline{N_G(D)}} V_i$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \dim_k \text{Hom}_{\text{Mack}_k(N_G(D),1)}(FP_{P_i}, FP_{P_j}) &= \dim_k \text{Hom}_{kN_G(D)}(P_i, P_j) \\ &= \begin{cases} m & \text{si } i \neq j \\ m + 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dim_k \text{Hom}_{\text{Mack}_k(N_G(D),1)}(FP_{P_i}, B_{N_G(D)/D} \otimes V_j) &= \dim_k \text{Hom}_{kN_G(D)}(P_i, V_j) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

De même en utilisant le lemme 4.3.4,

$$\begin{aligned} &\dim_k \text{Hom}_{\text{Mack}_k(N_G(D),1)}(B_{N_G(D)/D} \otimes V_i, B_{N_G(D)/D} \otimes V_j) \\ &= \dim_k \text{Hom}_{kN_G(D)/D} \text{Hom}(V_i, B_{N_G(D)/D}(N_G(D)/D) \otimes V_j) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Le fait que l'algèbre de Mackey est auto-adjointe implique que la structure de Loewy de $B_{N_G(D)/D} \otimes V_i$ est :

$$S_{D,V_i}$$

$$S_{1,V_i}$$

$$S_{D,V_i}$$

De plus les facteurs de composition de FP_{P_i} sont S_{1,V_i} qui apparaît $m + 1$ fois, pour $i \neq j$, le foncteur S_{1,V_j} apparaît m fois, et S_{D,V_i} apparaît 1 fois. D'après la structure de Loewy de $B_{N_G(D)/D} \otimes V_i$, on sait que $\text{Ext}^1(S_{D,V_i}, S_{1,V_j})$

est de dimension zéro si $i \neq j$ et de dimension 1 si $i = j$. De même pour $Ext^1(S_{1,V_i}, S_{D,V_j})$. De plus $Ext^1(S_{D,V_i}, S_{D,V_j}) = 0$ et $Ext^1(S_{1,V_i}, S_{1,V_j})$ est de dimension zéro si $i \neq j - 1$ et de dimension inférieure à 1 si $i = j - 1$. Comme l'algèbre est auto-duale, la seule possibilité est :

$$\begin{array}{ccc}
 & & S_{1,V_i} \\
 & & \\
 & & \\
 FP_{P_i} : & S_{1,V_{i+1}} & \\
 & \vdots & S_{D,V_i} \\
 & & \\
 & S_{1,V_{i-1}} & \\
 & & \\
 & & S_{1,V_i}
 \end{array}$$

□

Corollaire 6.2.28. *Soit b un bloc de défaut $D \cong C_p$, alors $\mu_k^1(b)$ est une algèbre d'arbre de Brauer. De plus, le nombre d'arêtes est $2e$ où e est le nombre d'arêtes de l'arbre du bloc kGb et la multiplicité exceptionnelle est la même que celle du bloc kGb .*

Démonstration. • Comme pour les blocs d'algèbres de groupes, la correspondance de Green induit une équivalence stable entre $\mu_k^1(b)$ et $\mu_k^1(b')$. Donc le théorème de Gabriel-Riedtmann implique que $\mu_k^1(b)$ est une algèbre d'arbre de Brauer.

- Les résultats de [27] et [29] impliquent que deux algèbres d'arbres de Brauer qui sont stablement équivalentes sont en réalité dérivées équivalentes (et donc stablement à la Morita équivalentes). Or deux algèbres d'arbres de Brauer sur le même corps sont dérivées équivalentes si et seulement si elles ont le même nombre de sommets ainsi que la même multiplicité exceptionnelle. Le résultat suit donc de la connaissance de ces données dans le cas du défaut normal.

□

Le résultat original de Thévenaz et Webb est plus précis. Ils ont démontré que, comme pour le cas des algèbres de groupes, on peut indexer les sommets de l'arbre par les foncteurs simples en caractéristiques zéro. Le résultat est énoncé pour des blocs de groupes ayant un p -sous-groupe de Sylow

6.2. Algèbre d'arbre de Brauer.

d'ordre p , mais est valable pour les blocs de défaut d'ordre p quelconques. La démonstration de ce résultat est assez fine et la connaissance des foncteurs projectifs ne semble pas vraiment la faciliter.

Théorème 6.2.29. *Soit T_{Mack} l'arbre de Brauer de $\mu_k^1(b)$ et T_{Mod} l'arbre de Brauer de kGb . Les sommets v de T_{Mack} peuvent être étiquetés par les foncteurs de Mackey simples $S_{H,V}^K$ de $\mu_K^1(b)$ sur le corps K de caractéristique zéro, de telle façon que les foncteurs de Mackey simples de $\mu_k^1(b)$ qui apparaissent dans la décomposition de $S_{H,V}^K$ soient les foncteurs simples qui apparaissent sur les arêtes voisines du sommet v .*

1. Les arêtes et les sommets indexés par les foncteurs de vortex 1 forment un sous-arbre de T_{Mack} isomorphe à T_{Mod} .
2. Si e est le nombre d'arêtes de T_{Mod} , alors il y a $2e + 1$ sommets dans T_{Mack} .
3. Les sommets indexés par les simples de vortex D sont des feuilles.
4. Le sommet exceptionnel de T_{Mack} est indexé par les $S_{1,U}^K$ où les modules U indexent le sommet exceptionnel de T_{Mod} .

Exemple 6.2.30. Reprenons l'exemple 4.5, soit b le bloc de kG qui contient le module simple W . Il est facile de vérifier que l'arbre de $\mu_k^1(b)$ est :

$$\circ \xrightarrow{S_{C_3, k\epsilon}} \overset{2}{\bullet} \xrightarrow{S_{1,W}} \circ$$

Et l'arbre de Brauer de $\mu_k(C_3)$ est :

$$\circ \xrightarrow{S_{C_3, k}} \circ \xrightarrow{S_{C_3, k}} \overset{2}{\bullet}$$

On voit donc que les arbres ne sont pas isomorphes, ce qui explique qu'il n'y a pas d'équivalence de Morita entre $\mu_k^1(b)$ et $\mu_k(C_3)$, par contre le nombre de sommets, ainsi que la multiplicité du sommet exceptionnel sont les mêmes, ce qui explique qu'il existe une équivalence dérivée.

Corollaire 6.2.31. *Soient G un groupe fini et $R = \mathcal{O}$ ou k . Soit b un bloc de RG de défaut D , alors l'algèbre $\mu_k^1(b)$ est symétrique si et seulement si $|D| \leq p$.*

Démonstration. Dans la section 19 de [38], il est démontré, modulo l'adaptation pour les blocs, que $\mu_k^1(b)$ est auto-duale si et seulement si $|D| \leq p$. Donc il suffit de vérifier que si $D = 1$ ou $D = C_p$, alors $\mu_k^1(b)$ est une algèbre symétrique. Si $D = 1$, alors $\mu_k^1(b)$ est une algèbre de matrices. Si $D = C_p$, alors l'algèbre $\mu_k^1(b)$ est une algèbre d'arbre de Brauer, donc en particulier une algèbre symétrique. \square

6.3 Ordre de Green

Dans cette section on s'intéresse à la structure des algèbres de Mackey p -locales d'un bloc de défaut d'ordre p sur l'anneau des entiers p -adiques, en utilisant la notion d'ordre de Green. Cette notion a été introduite par Roggenkamp ([31]) dans le but de généraliser et d'axiomatiser le comportement des blocs d'algèbres de groupes à défaut cyclique sur l'anneau des entiers. Cette notion d'ordre de Green est la version p -adique de la notion d'algèbre d'arbre de Brauer. Comme pour les algèbres d'arbres de Brauer, il est facile, mais plus technique, de dire quand deux ordres de Green sont dérivés équivalents. Pour plus de facilité de lecture, cette section est divisé en deux parties. La première contient des rappels, avec démonstrations, sur les ordres de Green et la seconde sera consacrée à l'algèbre de Mackey p -locale des blocs à défaut cyclique d'ordre p sur l'anneau des entiers.

La plupart des résultats de cette section proviennent de [17]. Soit G un groupe fini possédant un p -sous groupe D d'ordre p . Soit (K, \mathcal{O}, k) un triplet p -modulaire assez gros pour G et $N_G(D)$. Soit b un bloc de $\mathcal{O}G$ ayant un défaut D cyclique d'ordre p^d . La structure de $\mathcal{O}Gb$ a été explicitée par Green dans [15].

Définition 6.3.1. Un \mathcal{O} -ordre Λ dans la K -algèbre A est un sous-anneau Λ de A , qui possède la même unité et tel que Λ est un sous-réseau complet de A . C'est-à-dire Λ est un \mathcal{O} -module de type fini tel que $K \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda = A$.

Exemples 6.3.2.

- $M_n(\mathcal{O})$ est un \mathcal{O} -ordre dans $M_n(K)$.
- $\mathcal{O}G$ est un \mathcal{O} -ordre dans KG . De même $\mu_{\mathcal{O}}(G)$ (resp. $\mu_{\mathcal{O}}^1(G)$) est un \mathcal{O} -ordre dans $\mu_K(G)$ (resp. $\mu_K^1(G)$).

Le résultat suivant va être intensivement utilisé dans la suite du chapitre.

Lemme 6.3.3. Soit Λ un \mathcal{O} -ordre dans la K -algèbre A . Soient e et f des idempotents centraux de A tels que $e + f = 1$, alors Λ s'inscrit dans le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \longrightarrow & \Lambda e \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda f & \longrightarrow & \mathcal{A} \end{array} \tag{6.1}$$

où $\mathcal{A} = \Lambda e / (\Lambda \cap \Lambda e) \cong \Lambda f / (\Lambda \cap \Lambda f)$.

Démonstration. On a un morphisme surjectif $\phi_e : \Lambda \rightarrow \Lambda e$ défini par $\phi_e(l) = le$ pour $l \in \Lambda$. Le noyau de ce morphisme est $\Lambda \cap \Lambda f$. Donc $\Lambda e \cong \Lambda / (\Lambda \cap \Lambda f)$.

6.3. Ordre de Green

De là on déduit que $\Lambda e/(\Lambda \cap \Lambda e) \cong \Lambda/(\Lambda \cap \Lambda e + \Lambda \cap \Lambda f) \cong \Lambda f/(\Lambda \cap \Lambda f)$. Le diagramme (6.1) est isomorphe au diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \longrightarrow & \Lambda/(\Lambda \cap \Lambda f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda/(\Lambda \cap \Lambda e) & \longrightarrow & \Lambda/(\Lambda \cap \Lambda e \oplus \Lambda \cap \Lambda f) \end{array}$$

qui est cartésien. □

Dans les cas où les blocs d'algèbres de groupes ou les blocs d'algèbres de Mackey sont des algèbres d'arbres de Brauer, il y a une forte combinatoire qui lie les idempotents centraux en caractéristique zéro (les modules simples) et les idempotents primitifs en caractéristique p (les modules projectifs indécomposables). Cette combinatoire est encodée dans un arbre. En utilisant le lemme 6.3.3, on va voir que cette combinatoire s'étend à l'anneau des entiers p -adiques. La structure du bloc est entièrement déterminée par un arbre et des données locales. Plus précisément, pour les blocs d'algèbres de groupes :

Théorème 6.3.4 (Green). *Soit G un groupe fini. Soient B un bloc de $\mathcal{O}G$ de défaut cyclique D d'ordre quelconque et Γ l'arbre de Brauer de $k \otimes_{\mathcal{O}} B$. On suppose que l'arbre Γ possède $e + 1$ sommets et e arêtes. Soit $(W_i)_{i \in \{0, \dots, e-1\}}$ une ensemble complet de B -modules projectifs indécomposables. Alors*

1. *Il existe une famille $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de $\mathcal{O}G$ -réseaux et une permutation δ de $I := \{0, \dots, e-1\}$ tels que l'on ait des suites exactes*

$$\begin{aligned} E_{2i} &: 0 \rightarrow A_{2i+1} \rightarrow W_{\delta(i)} \rightarrow A_{2i} \rightarrow 0 \\ E_{2i+1} &: 0 \rightarrow A_{2i+2} \rightarrow W_{i+1} \rightarrow A_{2i+1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

avec la convention $W_i \cong W_{i+e}$ et $A_i \cong A_{i+2e}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

2. *Les $\mathcal{O}G$ -réseaux $A_0, A_1, \dots, A_{2e-1}$ sont deux à deux non isomorphes.*
3. *$K \otimes_{\mathcal{O}} A_i$ est un sommet de Γ .*

Définition 6.3.5 (Roggenkamp). Soit R un anneau de Dedekind avec corps de fractions K . Un R -ordre Λ dans une K -algèbre A est un *ordre de Green* si il y a un arbre fini avec sommets $\{v_i\}_{i=0}^n$ et des arêtes $\{e_k\}_{k=0}^{n-1}$ tels que :

1. Les sommets correspondent à des idempotents centraux η_i de A , tels que $\sum_{i=0}^n \eta_i = 1$.
2. Les arêtes sont en bijection avec un ensemble complet de représentants des Λ -modules projectifs indécomposables $\{P_k\}$.

3. L'arbre et un sommet de départ déterminent une permutation δ de $I := \{0, \dots, e-1\}$. Il y a un ensemble de Λ -réseaux $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tels que
- $K \otimes_R A_i = A\eta_i$
 - Il y a des suites exactes :

$$E_{2i} : 0 \rightarrow A_{2i+1} \rightarrow P_{\delta(i)} \xrightarrow{\eta_{\delta(i)}} A_{2i} \rightarrow 0$$

$$E_{2i+1} : 0 \rightarrow A_{2i+2} \rightarrow P_{i+1} \xrightarrow{\eta_{i+1}} A_{2i+1} \rightarrow 0$$

avec la convention $P_i \cong P_{i+e}$ et $A_i \cong A_{i+2e}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Un premier intérêt de cette généralisation est qu'il existe des algèbres qui ne sont pas des blocs d'algèbres de groupes et qui possèdent ces propriétés. De plus Roggenkamp a décrit la structure des ordres de Green à équivalence de Morita près. Pour simplifier légèrement les choses, dans la suite on suppose $R = \mathcal{O}$.

Lemme 6.3.6. *Soient Λ et Γ des \mathcal{O} -ordres tels que $\Lambda\text{-Mod} \cong \Gamma\text{-Mod}$. Si Λ est un ordre de Green, alors Γ est un ordre de Green.*

Démonstration. Soit F un foncteur qui donne l'équivalence entre les catégories $\Lambda\text{-Mod}$ et $\Gamma\text{-Mod}$. On applique le foncteur F aux suites exactes E_{2i} et E_{2i+1} , comme le foncteur est une équivalence de catégories abéliennes, c'est un foncteur exact, on obtient les suites requises pour que Γ soit un ordre de Green. \square

Définition 6.3.7. Un ordre quasi-générique Λ est la donnée suivante :

- Un arbre Γ .
- Une \mathcal{O} -algèbre de \mathcal{O} -torsion $\bar{\Omega}$ qui est de type fini comme \mathcal{O} -module.
- A un sommet v est associé (Ω_v, f_v) , où Ω_v est un \mathcal{O} -ordre local dans une algèbre semi-simple A_v et f_v est un morphisme d'anneaux surjectif $f_v : \Omega_v \rightarrow \bar{\Omega}$.
- Si v est un sommet, alors n_v est le nombre d'arêtes adjacentes à v . A ce sommet v est associé un \mathcal{O} -ordre

$$\Lambda_v := \begin{pmatrix} \Omega_v & \Omega_v & \cdots & \Omega_v \\ (a_v) & \Omega_v & & \Omega_v \\ \vdots & & \Omega_v & \vdots \\ (a_v) & \cdots & (a_v) & \Omega_v \end{pmatrix}_{n_v \times n_v}$$

- $\Lambda = \bigoplus_{v \in \Gamma} \Lambda_v$.

6.3. Ordre de Green

Soient v et w des sommets de Γ . Soient (Ω_v, f_v) et (Ω_w, f_w) les données locales. On utilise la notation suivante pour le produit fibré (pullback) :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_v & \xrightarrow{\quad} & \Omega_w \\ \downarrow & & \downarrow f_v \\ \Omega_w & \xrightarrow{f_w} & \overline{\Omega} \end{array} \quad (6.2)$$

On utilise les notations suivantes : si v est un sommet de Γ attaché à l'arête e , alors $\nu_e(v)$ est le second sommet de e et $\alpha_v(e)$ est l'arête suivant e dans l'ordre cyclique de v . On note $\alpha_v^i(e)$ la i -ème itération de $\alpha_v(e)$.

Pour définir un ordre de Green générique, on utilise l'algorithme suivant :

1. On fixe une feuille v de l'arbre Γ . L'arête qui quitte v est e et $\nu_e(v) = w$. On forme alors le produit fibré 6.2 entre Ω_v et $(\Lambda_w)_{1,1}$. le sous-anneau de Λ donné par ce produit fibré est à nouveau appelé Λ .
2. Pour $i = 2, \dots, n_w$ on forme le sous-anneau de Λ en faisant le produit fibré entre $(\Lambda_w)_{i,i}$ et $(\Lambda_{\nu_{\alpha_w^{i-1}(e)}(w)})_{1,1}$. Ce sous-anneau est à nouveau appelé Λ . Le sommet w est alors saturé et les sommets $\nu_{\alpha_w^{i-1}(e)}(w)$ sont touchés.
3. Si tous les sommets sont saturés, on arrête l'algorithme.
4. Si il y a un sommet v non saturé, mais touché, l'anneau Λ contient le produit fibré entre $(\Lambda_v)_{1,1}$ et Ω_w pour un autre sommet w . Soit e l'arête (v, w) . On procède comme dans 2.

Remarque 6.3.8. Le résultat de l'algorithme dépend uniquement du choix de de la feuille de départ. Cependant sa classe d'isomorphisme est indépendante du choix de la feuille ([17]).

Définition 6.3.9. Le résultat de cet algorithme est l'ordre de Green générique d'arbre Γ et de données locales $(\Omega_v, f_v)_v$.

Le nom de générique vient du théorème de Roggenkamp :

Théorème 6.3.10 ([31]). *Soit Λ un ordre de Green d'arbre Γ . Alors Λ est Morita équivalent à un ordre de Green générique d'arbre Γ .*

D'après le lemme 6.3.6, il suffit de démontrer le résultat pour les ordres basiques. La démonstration de ce théorème se fait en deux grandes étapes. La première consiste à expliciter la notion d'ordre isotypique. La seconde étape consiste à démontrer que la décomposition du lemme 6.3.3 fait intervenir des ordres isotypiques.

Définition 6.3.11. Un \mathcal{O} -ordre Λ dans une K -algèbre A est isotypique si il y a un idéal bilatère J tel que

1. $K.J = A$.
2. J est un Λ -module projectif.
3. Λ/J est un produit d'algèbres locales.
4. $J \leqslant \text{Rad}(\Lambda)$.

Théorème 6.3.12 ([31]). *Soit Λ un \mathcal{O} -ordre basique isotypique d'idéal J . Supposons que Λ est indécomposable en tant qu'anneau. Il existe un \mathcal{O} -ordre Ω , un élément régulier $a \in \Omega$ (i-e $K.a\Omega = K.\Omega$) tel que $(a) := \Omega a = a\Omega$ et $\Omega/a\Omega$ est une algèbre locale, et un entier n tels que*

$$\Lambda \cong \Lambda_0 := \begin{pmatrix} \Omega & \Omega & \cdots & \Omega \\ (a) & \Omega & & \vdots \\ \vdots & (a) & \ddots & \Omega \\ (a) & \cdots & (a) & \Omega \end{pmatrix}$$

Inversement, un tel ordre est isotypique.

Démonstration. Le première partie de la démonstration consiste à démontrer qu'un tel ordre est isotypique. Pour cela, on considère l'idéal J engendré par

$$\omega := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Comme l'élément a est régulier, on a $K.J = A$ où A est la K -algèbre $M_n(K.\Omega)$. De plus l'idéal J est principal engendré par un élément régulier, donc est libre comme Λ_0 -module.

On a $\Lambda_0/J = \prod_{i=1}^n \Omega/(a)$ et finalement comme a n'est pas une unité et que Ω est locale, on a $J \leqslant \text{Rad}(\Lambda_0)$.

Inversement, on doit démontrer que tout ordre isotypique est isomorphe à un tel ordre. Soit P_1, \dots, P_n un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des Λ -modules projectifs. Comme J est projectif comme Λ -module, on a que $J \otimes_{\Lambda} P_i$ est projectif pour tout i . On considère l'ensemble suivant :

$$\mathcal{P}_i := \{ \text{classes d'isomorphisme des } J^j \otimes_{\Lambda} P_i ; j \in \mathbb{N} \}$$

Cet ensemble est constitué de modules projectifs. On note $k(i)$ le cardinal de cet ensemble.

6.3. Ordre de Green

Lemme 6.3.13. *On a $k(1) = n$ et \mathcal{P}_1 est un ensemble de représentants des Λ -projectifs indécomposables. De plus $J^{k(1)} \otimes_{\Lambda} P_1 \cong P_1$.*

Démonstration. Comme $K \otimes_R J = A$, on a $K \otimes_R J \otimes_{\Lambda} P_1 \cong K \otimes_R P_1$ comme K -espace vectoriels, pour tout i , on a $\text{rang}_R(P_1) = \text{rang}_R(J^i \otimes P_1)$. On choisit alors d'ordonner les éléments de \mathcal{P}_1 de la façon suivante :

$$J^j \otimes P_1 \cong P_{1+j}.$$

Soit Q un Λ -module projectif indécomposable arbitraire. Comme Λ est indécomposable, il existe un morphisme non nul $\phi \in \text{Hom}_{\Lambda}(Q, P_{1+j})$ pour un j . Pour $m \in \mathbb{N}$ assez grand, dans le diagramme

$$Q \xrightarrow{\phi} P_{1+j} \longrightarrow P_{1+j}/\mathfrak{p}^m P_{1+j}$$

la composée est non nulle. Comme $J \leq \text{Rad}(\Lambda)$, il existe un entier l tel que $J^l \leq \mathfrak{p}^m \Lambda$. Mais par hypothèse, le Λ/J -module J^k/J^{k+1} est projectif. Comme Λ/J est un produit d'algèbres locales, le Λ/J -module $J^k P_{1+i}/J^{k+1} P_{1+i}$ est local, et donc ses facteurs de composition sont tous isomorphes à $P_{1+j}/\text{Rad}(P_{1+j})$. Ce qui démontre que les seuls facteurs de composition de $P_{1+j}/\mathfrak{p}^m P_{1+j}$ sont les $P_k/\text{Rad}(P_k)$ pour $k \in 1..k(1)$. Maintenant la tête de Q est l'un de ces simples. Ceci démontre que Q est dans \mathcal{P}_1 . En particulier, $k(1) = n$.

Il reste à vérifier que $J^n \otimes_{\Lambda} P_1 \cong P_1$. Si $J^n \otimes_{\Lambda} P_1 \cong P_k$, on considère l'ensemble \mathcal{P}_k à la place de \mathcal{P}_1 et P_1 n'est pas isomorphe à l'un des modules de \mathcal{P}_k . L'argument précédent, s'applique dans le cas de \mathcal{P}_k et entraîne que \mathcal{P}_k est une famille complète de représentants des Λ -modules projectifs indécomposables. Ce qui est une contradiction. \square

Comme Λ est basique, par le théorème de Morita, on a

$$\Lambda \cong \text{End}_{\Lambda}\left(\bigoplus_{i=1}^n P_i\right).$$

Lemme 6.3.14. *$\text{End}_{\Lambda}\left(\bigoplus_{i=1}^n P_i\right) \cong \Lambda_0$ pour $\Omega := \text{End}_{\Lambda}(P_1)$ et $(a) := \text{Hom}_{\Lambda}(P_1, J^n \otimes_{\Lambda} P_1)$.*

Démonstration. Par construction $K \otimes_{\mathcal{O}} P_1$ est simple, donc

$$\text{End}_{K \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda}(K \otimes_{\mathcal{O}} P_1) = D,$$

où D est un corps gauche de dimension finie sur K . D'après le théorème 12.8 de ([26]), il existe un unique \mathcal{O} -ordre maximal $\Delta \subseteq D$ contenant $\text{End}_{\Lambda}(P_1)$.

L'isomorphisme $P_1 \rightarrow J^n \otimes_{\Lambda} P_1$ est donné par multiplication par un élément régulier a , on a

$$\text{Hom}_{\Lambda}(P_1, J^n \otimes P_1) = \Omega a.$$

De plus $\text{End}_{\Lambda}(P_1) \subset \text{End}_{\Lambda}(J \otimes P_1)$. On a donc :

$$\Omega = \text{End}_{\Lambda}(P_1) \subset \text{End}_{\Lambda}(J \otimes P_1) \subset \cdots \subset \text{End}_{\Lambda}(J^n \otimes_{\Lambda} P_1) = a\Omega a^{-1}.$$

On a donc

$$\begin{array}{ccccccccccc} \Omega & \subset & a\Omega a^{-1} & \subset & a^2\Omega a^{-2} & \subset & \cdots & \subset & a^i\Omega a^{-i} & \subset & \cdots \\ \cap & & \cap & & \cap & & & & \cap & & \\ \Delta & \longleftarrow & \Delta_2 & \longleftarrow & \Delta_3 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \Delta_i & \longleftarrow & \cdots, \end{array}$$

les ordres maximaux étant égaux d'après le théorème 12.8 de [26]. Donc par noethérianité de Δ il existe i tel que $a^i\Omega a^{-i} = a^{i+1}\Omega a^{-i-1}$. Donc

$$\Omega = a^{-1}\Omega a.$$

On a donc que les anneaux d'endomorphismes des projectifs sont tous isomorphes à $\Omega := \text{End}_{\Lambda}(P_1)$.

Les $K \otimes P_i$ sont tous simples et isomorphes, donc un morphisme non nul $\phi : P_i \rightarrow P_{i+j}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1 - i, \dots, n - i$, et ϕ est nécessairement injectif. L'argument sur les têtes des modules $P_i/J^k P_i$ du lemme précédent nous donne donc :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\Lambda}(P_i, P_j) &= \Omega \text{ si } j \leq i. \\ \text{Hom}_{\Lambda}(P_i, P_j) &= \Omega a \text{ si } j > i. \end{aligned}$$

□

□

On peut maintenant démontrer le théorème 6.3.10. On procède en deux étapes. La première consiste à démontrer quelques lemmes nécessaires à la mise en place d'une récurrence.

Lemme 6.3.15. *Soit Λ un ordre de Green basique d'arbre Γ . Soit v une feuille de l'arbre et e une arête qui joint le sommet v au sommet w . Soit P_0 le Λ -module projectif indécomposable qui correspond à e . Alors $\text{End}_{\Lambda}(\Lambda/P_0)$ est un ordre de Green d'arbre Γ' tel que :*

- Les sommets de Γ' sont les sommets de Γ sans le sommet v .
- Les arêtes de Γ' sont celles de Γ à l'exception de e .

6.3. Ordre de Green

Démonstration. On peut supposer que $A_0 = \Lambda\eta_0$. On pose $P := \Lambda/P_0$. Le foncteur $F := \text{Hom}_\Lambda(P, -)$ est exact puisque P est un module projectif. On applique ce foncteur aux suites E_i pour $i = 0, \dots, 2n - 1$. Le seul A_i pour lequel $F(A_i) = 0$ est A_0 . Les suites

- $F(E_{2i})$ pour $i = 1, \dots, n$
- $F(E_{2i+1})$ pour $i = 0, \dots, n - 1$

sont les suites exactes recherchées. \square

Lemme 6.3.16. *Soit Λ un \mathcal{O} -ordre basique dans une K -algèbre séparable A . Soit e un idempotent central de A . Soit P un facteur direct de Λ tel que $P.e = 0$. Soit $\Lambda_0 := \text{End}_\Lambda(\Lambda/P)$ vu comme sous anneau de $\Lambda = \text{End}_\Lambda(\Lambda)$. Alors*

1. $\Lambda.e = \Lambda_0e$.
2. $\Lambda.e \cap \Lambda = \Lambda_0e \cap \Lambda_0$.

Démonstration. Pour la première partie :

$$\begin{aligned} \Lambda e &= e.\Lambda e \\ &= e.\text{End}_\Lambda(\Lambda/P \oplus P)e \\ &= e.\text{End}_\Lambda(\Lambda/P)e \\ &= \Lambda_0e. \end{aligned}$$

Pour la seconde partie,

$$\begin{aligned} \Lambda \cap \Lambda e &= \text{End}_\Lambda(\Lambda/P \oplus P) \cap e\text{End}_\Lambda(\Lambda/P)e \\ &= \text{End}_\Lambda(\Lambda/P) \cap e\text{End}_\Lambda(\Lambda/P)e \\ &= \Lambda_0 \cap \Lambda_0e. \end{aligned}$$

\square

Lemme 6.3.17. *Soit Λ un ordre de Green basique d'arbre Γ . Soit η un idempotent correspondant à un sommet v . Alors l'anneau $\Lambda/(\Lambda \cap \Lambda\eta)$ est un produit direct d'algèbres locales.*

Démonstration. Le résultat se démontre par récurrence sur le nombre de sommets de l'arbre.

1. Si l'arbre possède uniquement deux sommets. Alors Λ possède un seul projectif indécomposable P . Et $\Lambda \cong \text{End}_\Lambda(P)$ est une algèbre locale. Donc $\Lambda/(\Lambda \cap \Lambda\eta)$ est locale.
2. Si l'arbre possède $n > 2$ sommets. Soient v une feuille de l'arbre et e une arête qui joint la feuille v au reste de l'arbre. Soit w l'autre extrémité

de e . Soit P_0 le module projectif indécomposable qui correspond à e . Alors en posant $P = \Lambda/P_0$ et $\Lambda_0 = \text{End}_\Lambda(P)$, on obtient un ordre de Green qui possède $n - 1$ sommets. Par récurrence, le résultat est vrai pour tous les sommets de ce nouvel arbre à l'exception du sommet w .

Soient η_v l'idempotent qui correspond à v et η_w celui qui correspond à w . On pose $\epsilon = 1 - \eta_v - \eta_w$ alors d'après le lemme 6.3.3 on a un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \longrightarrow & \Lambda(\epsilon + \eta_v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda\eta_w & \longrightarrow & \Lambda(\epsilon + \eta_v)/(\Lambda(\epsilon + \eta_v) \cap \Lambda) \end{array}$$

Comme $\Lambda(\epsilon + \eta_v) = \Lambda\epsilon \oplus \Lambda\eta_v$, on a

$$\Lambda(\epsilon + \eta_v)/(\Lambda(\epsilon + \eta_v) \cap \Lambda) \cong (\Lambda\epsilon/(\Lambda \cap \Lambda\epsilon)) \oplus (\Lambda\eta_v/(\Lambda \cap \Lambda\eta_v))$$

D'après le lemme 6.3.16, on a $\Lambda\epsilon/(\Lambda \cap \Lambda\epsilon) = \Lambda_0\epsilon/(\Lambda_0 \cap \Lambda_0\epsilon)$. Comme ϵ est un idempotent central de $K \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda_0$, il donne naissance à un diagramme cartésien avec un $\Lambda_0.e$ pour un autre idempotent central e de Λ_0 . En particulier, on a $\Lambda_0\epsilon/(\Lambda_0 \cap \Lambda_0\epsilon) \cong \Lambda_0e/(\Lambda_0 \cap \Lambda_0e)$. Par récurrence, l'anneau $\Lambda_0\epsilon/(\Lambda_0 \cap \Lambda_0\epsilon)$ est produit direct d'anneaux locaux.

Maintenant v est une feuille, alors $\Lambda.\eta_v$ est local. En effet si ce n'est pas un anneau local, il y a deux modules simples non isomorphes qui donnent deux Λ -modules simples non isomorphes après inflation le long de $\Lambda \rightarrow \Lambda.\eta_v$. Ces deux simples ne sont pas annulés par $\text{Hom}_\Lambda(P_0, -)$ par construction. Cependant ce foncteur annule tous les simples sauf $P_0/\text{Rad}(P_0)$. On a donc une contradiction et $\Lambda\eta_v$ est local. \square

Lemme 6.3.18. *Soit Λ un ordre de Green basique d'arbre Γ . Soit v un sommet de Γ dont l'idempotent central correspondant est η_v . Alors $\Lambda \cap \Lambda\eta_v$ est un $\Lambda\eta_v$ -module libre.*

Démonstration. On procède de nouveau par récurrence sur le nombre de sommets.

1. Si l'arbre ne possède que deux sommets, alors par définition il y a deux suites exactes :

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{\eta_v} A_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{1-\eta_v} A_1 \longrightarrow 0$$

Donc $A_0 \cong \Lambda\eta_v \cong \Lambda/A_1$ et $A_1 \cong \Lambda(1 - \eta_v)$. D'où

$$\Lambda\eta_v \cong \Lambda/\Lambda(1 - \eta_v) \cong \Lambda \cap \Lambda\eta_v.$$

6.3. Ordre de Green

2. Si l'arbre possède plus de trois sommets. Soit v un feuille de l'arbre d'idempotent central η_v . Soient e l'arête qui relie v au reste de l'arbre et w l'autre extrémité de e . On note η l'idempotent central correspondant. Alors par définition de la marche de Green, il existe un Λ -module projectif indécomposable P_0 tel que on ait deux suites exactes.

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\eta_w} A_{-1} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{1-\eta_v} A_1 \longrightarrow 0$$

Alors comme v est une feuille $\eta_v P_0 = \eta_v \Lambda$. Pour la même raison que $\eta_v \Lambda$ est local. De plus $\eta_w P_0 = (1 - \eta_v) P_0$ parce que les autres idempotents centraux qui apparaissent ici annulent P_0 . On a donc :

$$\Lambda \eta_v \cap \Lambda = \eta_v P_0 \cap P_0 \cong P_0 / (P_0(1 - \eta_v)) \cong P_0 / P_0 \eta_w \cong A_0 \cong \eta_v P_0 = \Lambda \eta_v.$$

Donc $\Lambda \eta_v \cap \Lambda$ est bien un $\Lambda \eta_v$ module libre.

Si v_2 est un sommet de l'arbre qui n'est ni v ni w alors en utilisant les lemmes 6.3.15 et 6.3.16, on a le résultat par récurrence.

Intéressons-nous maintenant au cas de w . On note $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ les arêtes adjacentes à w et $(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ les modules projectifs correspondants. On considère $\Delta = \text{End}_\Lambda(\bigoplus_{i=0}^{n-1} P_i)$, on a $\Lambda \eta_w = \Delta \eta_w$ et

$$\Delta \eta_w \cap \Delta = \Lambda \eta_w \cap \Lambda.$$

Donc il est suffisant de démontrer le résultat dans le cas où l'arbre Γ est une étoile centrée en w . Les arêtes sont supposées être numérotés selon l'ordre cyclique. Dans ce cas la marche de Green est très facile à calculer (voir exemple 6.2.25), c'est le cycle $\delta = (0, 2, \dots, n-1)$. Les sommets extérieurs de l'étoile sont les $\delta(i)$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$ et le sommet intérieur est étiqueté

par $0, 1, 2, \dots, n-1$. On a donc des suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\eta_1} A_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A_2 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\eta} A_1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A_3 \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\eta_2} A_2 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A_4 \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\eta} A_3 \longrightarrow 0$$

⋮

$$0 \longrightarrow A_{2n-1} \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\eta_0} A_{2n-2} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\eta} A_{2n-1} \longrightarrow 0$$

Donc $\Lambda\eta \cap \Lambda$ est la somme directe des suites exactes dans lesquelles η apparaît :

$$\Lambda\eta \cap \Lambda \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} A_{2i} \cong \eta \bigoplus_{i=0}^{n-1} P_i,$$

qui est un pro-générateur de $\Lambda\eta\text{-Mod}$, mais comme l'ordre est basique $\Lambda\eta \cap \Lambda$ est libre. □

On peut maintenant démontrer le théorème de Roggenkamp :

Démonstration du théorème 6.3.10. Il suffit de rassembler les informations de tous les lemmes précédents : à chaque sommet v , on a un ordre Λ_v qui est isotypique d'idéal $J_v := \Lambda\eta_v \cap \Lambda$. En effet :

- On a $K \otimes_{\mathcal{O}} (\Lambda\eta_v \cap \Lambda) = K \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda\eta_v$.
- J_v est un $\Lambda\eta_v$ -module libre.
- Le quotient $\Lambda\eta_v / (\Lambda\eta_v \cap \Lambda)$ est un produit d'algèbres locales.
- Le module J_v est inclus dans le radical de Λ_v . Soit S un Λ_v -module simple, il suffit de montrer que J_v l'annule. Comme on a un épimorphisme $\Lambda \rightarrow \Lambda\eta_v$, le module S est inflaté le long de ce morphisme en un Λ -module simple. Cependant il y a exactement n -modules simples. Et on peut construire n -modules simples à partir des algèbres locales $\Lambda\eta_w / J_w$. Donc le module S est l'un deux et il est annulé par J_v .

6.3. Ordre de Green

Donc d'après le théorème de structure des ordres isotypiques, les ordres $\Lambda\eta_v$ sont caractérisés par une algèbre locale Ω_v . Dans le cas des ordres de Green, ces données sont les suivantes : $\Omega_v = \eta_v P \eta_v$ où P est le projectif indécomposable qui correspond à une arête adjacente à v . On conclut en utilisant le lemme 6.3.3. L'ordre Λ est le produit fibré itéré des $\Lambda\eta_v$. Il faut vérifier que ce produit fibré itéré correspond bien à la construction donnée au début de ce chapitre. \square

Une fois cette construction terminée il est très facile de visualiser les Λ -modules projectifs ainsi que les endomorphismes de ces projectifs à l'aide de l'arbre. L'anneau des endomorphismes d'un module projectif qui correspond à une arête e est donné par le produit fibré correspondant.

Exemple 6.3.19. Si l'on considère l'arbre suivant :

$$\circ \xrightarrow{0} \circ \xrightarrow{1} \circ$$

L'ordre de Green générique est la donnée des trois ordres isotypiques chacun avec des données $(\Omega_i, (a_i))$ pour $i = 0, 1, 2$. Alors l'anneau des endomorphismes du projectif correspondant à l'arête 0 est le produit fibré $\Omega_0 \text{---} \Omega_1$. De même le projectif est donné par le produit fibré : $\Omega_0 \text{---} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ (a_1) \end{pmatrix}$.

Le théorème important sur les ordres de Green est le suivant. Il est dû à Roggenkamp et Zimmermann, puis dans d'autres versions à König et Zimmermann et finalement dans une version bilatère à Zimmermann.

Théorème 6.3.20. *Deux ordres de Green génériques d'arbres Γ et Γ' sur le même anneau \mathcal{O} sont dérivés équivalents si et seulement si ils ont les mêmes données locales, c'est-à-dire si :*

- *Le nombre de sommets est le même.*
- *Il y a une bijection τ entre les ensembles Γ_{sommet} et Γ'_{sommet} tel que $(\Omega_{\tau(i)}, \omega_{\tau(i)}) = (\Omega_i, \omega_i)$.*
- *Les applications $f_i : \Omega_i \rightarrow \bar{\Omega}$ et $f_{\tau(i)} : \Omega_{\tau(i)} \rightarrow \bar{\Omega}$ coïncident.*

Remarque 6.3.21. Dans la démonstration de ce théorème, il est démontré qu'un ordre de Green est dérivé équivalent à un ordre de Green avec les mêmes données locales dont l'arbre est une étoile avec au centre le sommet exceptionnel. Une équivalence dérivée qui fait intervenir un complexe basculant à deux termes conserve les données locales, mais il n'est pas clair que toute équivalence dérivée préserve ces données.

Remarque 6.3.22. Ce théorème est l'une des façons de démontrer que la conjecture de Broué pour les blocs d'algèbres de groupes à défaut cyclique est

valable sur l'anneau des entiers. Ce n'est pas la plus directe puisque l'on sait que dans ce cas, sur k , les équivalences sont splendides et donc se relèvent sur \mathcal{O} . Cependant ce résultat est plus ancien que celui de Rickard et le cadre est plus général que celui des blocs d'algèbres de groupes.

6.3.1 Application aux algèbres de Mackey

Soit G un groupe fini, soit (K, \mathcal{O}, k) -un triplet p -modulaire assez gros pour l'algèbre de Mackey $\mu_{\mathcal{O}}^1(G)$. Soit b un bloc de $\mathcal{O}G$ de défaut cyclique d'ordre p . Alors d'après le théorème (6.2.29) l'algèbre de Mackey du bloc b , noté $\mu_k^1(b)$ est une algèbre d'arbre de Brauer. Sur l'anneau des entiers, c'est un ordre de Green.

Proposition 6.3.23. *Soit b un bloc de $\mathcal{O}G$ de défaut d'ordre p , alors l'algèbre de Mackey p -locale du bloc $\mu_{\mathcal{O}}^1(b)$ est un ordre de Green.*

Démonstration. L'algèbre de Mackey $\mu_k^1(b)$ est une algèbre d'arbre de Brauer. Sur cet arbre il y a une marche de Green, que l'on peut relever sur l'anneau des entiers exactement comme l'a fait Green dans [15]. La seule chose à vérifier est que le relèvement de cette marche de Green donne des $\mu_{\mathcal{O}}^1(G)$ -réseaux. Mais c'est automatique puisque l'algèbre de Mackey étant dans ce cas symétrique, elle est isomorphe à son dual. \square

Lemme 6.3.24. *Soit b un bloc de $\mathcal{O}G$ de défaut cyclique d'ordre p . Alors $\mu_{\mathcal{O}}^1(b)$ est un ordre de Green et les données locales de l'ordre de Green générique sont de deux types :*

- Si v_i n'est pas un sommet exceptionnel alors $\Omega_{v_i} = \mathcal{O}$.
- Si v_e est un sommet exceptionnel alors c'est un ordre noté Ω_e , qui ne dépend que de la multiplicité de v_e .

Démonstration. L'arbre de $\mu_{\mathcal{O}}^1(b)$ possède au moins 3 sommets, puisque d'après le théorème 6.2.29 l'arbre d'un bloc d'algèbre de Mackey a deux fois plus de branches que l'arbre du bloc de l'algèbre de groupe correspondant.

- Considérons dans un premier temps que l'arbre possède un sous-arbre de la forme

$$\circ_{\Omega_1} \xrightarrow{P_1} \circ_{\Omega_2} \xrightarrow{P_2} \bullet_{\Omega_e}^m$$

Si le dernier sommet n'est pas un sommet exceptionnel, alors $m = 1$. On a $\text{Hom}(P_1, P_2) = \Omega_2$. Si l'on tensorise ceci par k , on a

$$k \otimes_{\mathcal{O}} \text{Hom}_{\mu_{\mathcal{O}}^1(b)}(P_1, P_2) \cong \text{Hom}_{\mu_k^1(b)}(k \otimes_{\mathcal{O}} P_1, k \otimes_{\mathcal{O}} P_2) = k \otimes_{\mathcal{O}} \Omega_2$$

6.3. Ordre de Green

or $\mu_k^1(b)$ est une algèbre d'arbre de Brauer, donc

$$\dim_k \text{Hom}_{\mu_k^1(b)}(k \otimes_{\mathcal{O}} P_1, k \otimes_{\mathcal{O}} P_2) = 1.$$

Comme Ω_2 est un module \mathcal{O} -libre, la seule possibilité est alors que $\Omega_2 = \mathcal{O}$. L'ordre de Green est dérivé équivalent à un ordre de Green dont l'arbre possède un sous-arbre de la forme :

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{m} & \circ & \xrightarrow{\quad} & \circ \\ \Omega_2 & & \Omega_1 & & \Omega_2 \end{array}$$

Et l'on passe de l'un à l'autre à l'aide de deux complexes basculants à deux termes, donc les ordres de Green possèdent les mêmes données locales. L'argument précédent montre que $\Omega_1 = \mathcal{O}$.

- Si l'arbre est quelconque, on se ramène par équivalences dérivées successives, au cas où l'arbre est une étoile avec le sommet exceptionnel placé en son centre et dont les bras sont de longueur deux. Les complexes basculants qui apparaissent sont des complexes à deux termes et les ordres que l'on obtient lors des équivalences dérivées successives sont des ordres de Green avec les mêmes données locales. Ce qui démontre que tous les ordres qui apparaissent à un sommet non exceptionnel sont \mathcal{O} . L'ordre qui apparaît au sommet exceptionnel est isomorphe à l'ordre qui apparaît au sommet exceptionnel de l'ordre de l'étoile. Il ne dépend donc que de la multiplicité du sommet exceptionnel. □

Remarque 6.3.25. La structure des données locales du sommet exceptionnel semble plus difficile à comprendre.

Chapitre 7

Equivalences entre blocs d'algèbres de Mackey p -locales.

7.1 Introduction.

Dans ce chapitre, on présente quelques exemples généraux d'équivalences entre blocs d'algèbres de Mackey p -locales. Ces résultats vont généraliser les exemples du chapitre (4), à l'exception des blocs non principaux des groupes p -nilpotents. La première partie du chapitre est dédiée aux blocs principaux des groupes p -nilpotents. La seconde est consacrée aux blocs de défaut d'ordre p .

Remarque 7.1.1. Dans le chapitre précédent, on a démontré qu'une équivalence de Morita (resp. dérivée) splendide entre blocs d'algèbres de groupes induit une équivalence de Morita (resp. dérivée) entre les blocs d'algèbres de Mackey cohomologiques correspondants. On s'intéresse ici à des équivalences entre blocs d'algèbres de Mackey p -locales, or il existe un foncteur $M \mapsto M^{coh}$ entre les catégories de foncteurs de Mackey p -locaux et de foncteurs de Mackey cohomologiques. Ce foncteur préserve les foncteurs simples et envoie les foncteurs de Mackey projectifs sur les foncteurs de Mackey cohomologiques projectifs. On pourrait penser qu'une équivalence entre blocs d'algèbres de Mackey p -locales induit une équivalence entre les blocs d'algèbres de Mackey cohomologiques correspondantes. Cependant ça n'est pas le cas :

Exemple 7.1.2. Soit k un corps de caractéristique 2 et $G = C_2 = \{1, x\}$ le groupe cyclique d'ordre 2. Une base de $\mu_k(C_2)$ est donnée par : $t_{C_2}^{C_2}$, $t_1^{C_2} r_1^{C_2}$, $t_1^{C_2}$, $r_1^{C_2}$, t_1^1 et $t_1^1 x$ où $t_1^1 x$ représente $t_1^1 c_{1,x}$. Il y a un automorphisme ϕ de $\mu_k(C_2)$ où ϕ est défini sur les éléments de la base par : $\phi(t_{C_2}^{C_2}) = t_1^1$, $\phi(t_1^{C_2} r_1^{C_2}) = t_1^1 + t_1^1 x$, $\phi(t_1^{C_2}) = r_1^{C_2}$, $\phi(r_1^{C_2}) = t_1^{C_2}$, $\phi(t_1^1) = t_{C_2}^{C_2}$ et $\phi(t_1^1 x) = t_{C_2}^{C_2} + t_1^{C_2} r_1^{C_2}$. Ceci donne un automorphisme unitaire de $\mu_k(C_2)$. D'après les

résultats généraux sur les équivalences de Morita, le bimodule ${}_1\mu_k(C_2)_\phi$ induit une auto-équivalence de Morita de $\mu_k(C_2)$.

Les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables pour le groupe C_2 sont $B_{C_2/1}$ et B_{C_2/C_2} . En tant que module sur l'algèbre de Mackey, $B_{C_2/1}$ possède la base : $t_1^{C_2}$, t_1^1 et t_1^1x , de même, B_{C_2/C_2} a comme base : $t_{C_2}^{C_2}$, $t_1^{C_2}r_1^{C_2}$ et $r_1^{C_2}$. Donc l'équivalence de Morita induite par ϕ échange les deux projectifs $B_{C_2/1}$ et B_{C_2/C_2} .

Comme la matrice de Cartan de $co\mu_k(C_2)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, il n'y a pas d'auto-équivalence de Morita qui échange les deux foncteurs de Mackey projectifs indécomposables.

7.2 Blocs principaux des groupes p -nilpotents.

Commençons par un résultat général sur les isomorphismes entre foncteurs de Mackey projectifs. Soit G un groupe fini et (K, \mathcal{O}, k) un système p -modulaire. Soit $R = \mathcal{O}$ ou k .

Lemme 7.2.1. *Soit M et M' deux foncteurs de Mackey projectifs de $Mack_R(G, 1)$, et $f : M \rightarrow M'$ un morphisme de foncteurs de Mackey. Le morphisme f est un isomorphisme si et seulement si $f(1) : M(1) \rightarrow M'(1)$ est un isomorphisme de kG -modules.*

Démonstration. Lemme 6.2 de [7] pour le résultat sur le corps. Sur l'anneau de valuation, on utilise le fait que $M \cong M'$ si et seulement si

$$k \otimes_{\mathcal{O}} M \cong k \otimes_{\mathcal{O}} M'.$$

□

Dans la suite de ce paragraphe on considère $G = N \rtimes P$ où P est un p -sous-groupe de Sylow de G et N est un p' -groupe. Soit (K, \mathcal{O}, k) un système p -modulaire assez gros pour les groupes $N_G(Q)/Q$ où Q parcourt les p -sous-groupes de G . On note b_0 le bloc principal de $\mathcal{O}G$. Le résultat suivant est bien connu :

Proposition 7.2.2. • $b_0 = \frac{1}{|N|} \sum_{n \in N} n$.
 • Pour $R = \mathcal{O}$ où k , on a $RGb_0 \cong RP$.
 • Le foncteur de restriction $Res_P^G : RGb\text{-Mod} \rightarrow RP\text{-Mod}$ est une équivalence de catégories. L'équivalence quasi-inverse étant $b_0 \text{Ind}_P^G$.

7.2. Blocs principaux des groupes p -nilpotents.

Théorème 7.2.3. *Soit $G = N \rtimes P$ un groupe p -nilpotent où P est un p -sous-groupe de Sylow de G . Soit b_0 le bloc principal de RG . Alors $\mu_R^1(b_0)\text{-Mod}$ est Morita équivalent à $\mu_R(P)\text{-Mod}$.*

Remarque 7.2.4. [4.4] Si b est un bloc nilpotent, il existe un $m \in \mathbb{N}$, tel que l'on ait un isomorphisme $kGb \cong \text{Mat}(m, kP)$, où P est le groupe de défaut du bloc b . Ceci n'est pas le cas pour les algèbres de Mackey p -locales. Par exemple, si $G = S_3$ et k est un corps de caractéristique 2. Soit b le bloc principal de kS_3 , alors $\dim_k(\mu_k(C_2)) = 6$ et $\dim_k(\mu_k^1(b)) = 56$.

Démonstration. On travaille avec les catégories de foncteurs au sens de Dress, puisque les foncteurs de restriction et d'induction sont les plus naturels dans ce formalisme. Cependant l'action des blocs est plus facile à comprendre au sens de Green, donc on notera $M(1)$ l'évaluation en le groupe trivial de M , c'est-à-dire $M(G/1)$, au sens de Dress. On a deux foncteurs

$$\text{Res}_P^G : \text{Mack}_k(b_0) \rightarrow \text{Mack}_k(P),$$

et

$$\text{Ind}_P^G : \text{Mack}_k(P) \rightarrow \text{Mack}_k(G).$$

En appliquant l'action de l'idempotent b_0^μ , on a un foncteur :

$$b_0^\mu \text{Ind}_P^G : \text{Mack}_k(P) \rightarrow \text{Mack}_k(b_0).$$

1. Le foncteur Res_P^G est adjoint à gauche et à droite du foncteur $b_0 \text{Ind}_P^G$, puisque c'est le cas pour Ind_P^G et Res_P^G . Les unités et co-unités de ces adjonctions sont données par :

$$N_M : M \rightarrow b_0 \text{Ind}_P^G \text{Res}_P^G M \text{ est définie par } N_M = (b_0 M)^*(\epsilon_-)$$

$$E'_M : b_0 \text{Ind}_P^G \text{Res}_P^G(M) \rightarrow M \text{ est définie par } E'_M = (b_0 M)_*(\epsilon_-)$$

$$N'_{M'} : M' \rightarrow \text{Res}_P^G b_0 \text{Ind}_P^G M' \text{ est définie par } N'_{M'} = M'_*(\eta_-)$$

$$E_{M'} : \text{Res}_P^G b_0 \text{Ind}_P^G M' \rightarrow M' \text{ est définie par } E_{M'} = M'^*(\eta_-).$$

Où ϵ et η sont les unités et co-unités de l'adjonction classique $(\text{Ind}_P^G, \text{Res}_P^G)$ pour $\text{Res}_P^G : G\text{-ens} \rightarrow P\text{-ens}$ et $\text{Ind}_P^G : P\text{-set} \rightarrow G\text{-ens}$.

2. Soit M un foncteur de Mackey projectif de $\text{Mack}_R(b_0)$, et soit M' un foncteur de Mackey projectif de $\text{Mack}_R(P)$. On doit vérifier que N_M et E'_M sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. De même, on doit vérifier que $E_{M'}$ and $N'_{M'}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

D'après le lemme 7.2.1 il est suffisant de vérifier que c'est vrai après évaluation en 1. Mais on a des isomorphismes naturels de kG -modules

$$(\text{Ind}_P^G M)(1) \cong \text{Ind}_P^G(M(1)),$$

donc

$$\begin{aligned}
 N_M(1) &: M(1) \rightarrow (b_0 \text{Ind}_P^G \text{Res}_P^G(M))(1) \cong b_0 \text{Ind}_P^G \text{Res}_P^G(M(1)) \\
 E'_M(1) &: (b_0 \text{Ind}_P^G \text{Res}_P^G(M))(1) \cong b_0 \text{Ind}_P^G \text{Res}_P^G(M(1)) \rightarrow M(1) \\
 N'_{M'}(1) &: M'(1) \rightarrow (\text{Res}_P^G b_0 \text{Ind}_P^G M')(1) \cong \text{Res}_P^G b_0 \text{Ind}_P^G M'(1). \\
 E_{M'}(1) &: (\text{Res}_P^G b_0 \text{Ind}_P^G M')(1) \cong \text{Res}_P^G b_0 \text{Ind}_P^G M'(1) \rightarrow M'(1)
 \end{aligned}$$

sont les unités et co-unités des adjonctions $(b_0 \text{Ind}_P^G, \text{Res}_P^G)$ pour les modules sur les algèbres de groupes. D'après la proposition 7.2.2, on a les isomorphismes cherchés.

3. Si $M \in \text{Mack}_R(b_0)$, soit P_\bullet une résolution projective de M dans $\text{Mack}_R(b_0)$, alors le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow N_{P_1} & & \downarrow N_{P_0} & & \downarrow N_M \\
 \cdots & \longrightarrow & b_0 \text{Ind}_P^G \text{Res}_P^G(P_1) & \longrightarrow & b_0 \text{Ind}_P^G \text{Res}_P^G(P_0) & \longrightarrow & b_0 \text{Ind}_P^G \text{Res}_P^G(M) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Comme les N_{P_i} pour $i \geq 0$ sont des isomorphismes, il s'ensuit que N_M est un isomorphisme. De la même façon, on démontre que si $M' \in \text{Mack}_R(P)$, alors $E_{M'}$ est un isomorphisme. \square

Corollaire 7.2.5. *Il y a un isomorphisme d'algèbres : $\mu_R^1(b_0) \cong RB(X^2)$ où X est le P -ensemble $\text{Iso}_{G/N}^P \text{Def}_{G/N}^G \Omega_G$, et $B(X^2)$ est l'évaluation du foncteur de Burnside en X^2 .*

Démonstration. D'après le théorème 7.2.3, on a une équivalence de catégories $\mu_R^1(b_0)\text{-Mod} \cong \mu_R(P)\text{-Mod}$, donc d'après le théorème de Morita, il y a un isomorphisme d'algèbres $\mu_R^1(b_0) \cong \text{End}_{\mu_R(P)}(T)$, où T est le module $\text{Res}_P^G(\mu_R^1(b_0))$. On note B_0 le foncteur de Mackey, au sens de Dress, qui correspond au $\mu_R^1(b_0)$ -module libre de rang 1. Comme les foncteurs de Mackey projectifs de $\text{Mack}_R(P)$ sont exactement les B_X où X est un P -ensemble, on a :

$$\text{Res}_P^G(B_0) \cong B_X,$$

pour un P -ensemble X . En particulier, $RX \cong \text{Res}_P^G(B_0)(1)$.

Mais $\text{Res}_P^G(B_0(1)) = b_0 t_1^1 \mu_R^1(G)$. Un base de $\mu_R^1(G)$ est donnée par $t_B^A x r_{B^x}^C$, où A et C sont des sous-groupes de G , les éléments $x \in [A \backslash G / C]$ et B est un p -sous-groupe de $A \cap {}^x C$ à $A \cap {}^x C$ -conjugaison près. Donc une base de $B_0(1) = t_1^1 \mu_R^1(G)$ est l'ensemble des $t_1^1 x r_1^H$ pour $x \in G$ et $H \leq G$. Soit $\gamma_{H,x} = t_1^1 b_0 x r_1^H$. On a $\gamma_{H,nx} = \gamma_{H,x}$ et $\gamma_{H,xh} = \gamma_{H,x}$ pour $x \in G$, $n \in N$ et $h \in H$. L'ensemble $\{\gamma_{H,x} ; H \leq G, x \in G/NH\}$ est une $\mu_R(P)$ -base de

7.2. Blocs principaux des groupes p -nilpotents.

$t_1^1 \mu_R^1(b_0)$. L'action de $y \in P$ sur un élément $\gamma_{H,x}$ est donnée par $y \cdot \gamma_{H,x} = \gamma_{H,yx}$.
Donc,

$$RX \cong \bigoplus_{H \leq G} Res_P^G(RG/NH),$$

Mais pour un p -groupe P , deux RP -modules de permutation sont isomorphes si et seulement si les P -ensembles correspondants sont isomorphes, d'après [12]. Donc,

$$\begin{aligned} X &\cong \sqcup_{H \leq G} Res_P^G(G/NH) \\ &\cong \sqcup_{H \leq G} Res_P^G Ind_{G/N}^G Def_{G/N}^G(G/H) \\ &\cong Res_P^G(Inf_{G/N}^G Def_{G/N}^G(\Omega_G)) \\ &\cong Iso_{G/N}^P Def_{G/N}^G(\Omega_G). \end{aligned}$$

Finalement, $Res_P^G(B_0) \cong B_X$, où $X = Iso_{G/N}^P Def_{G/N}^G(\Omega_G)$, et

$$\mu_R^1(b_0) \cong End_{Mack_R(P)}(B_X) \cong B(X^2),$$

par propriété d'adjonction de B_X . \square

Les B_X sont les foncteurs de Mackey qui généralisent les algèbres de matrices. Le corollaire 7.2.5 peut donc être vu comme un analogue de de l'isomorphisme d'algèbres $kGb \cong Mat(n, kP)$ pour les blocs nilpotents. De plus, c'est un cas particulier de la proposition suivante :

Proposition 7.2.6. *Soit b un bloc de RG et P un p -groupe, alors il y a une équivalence de catégories $\mu_R^1(b)\text{-Mod} \cong \mu_k(P)\text{-Mod}$ si et seulement si il y a un isomorphisme d'algèbres*

$$\mu_R^1(b) \cong B(X^2),$$

où X est un P -ensemble tel que B_X soit un progénérateur de $\mu_k(P)$.

Démonstration. C'est un corollaire du théorème de Morita :

$\mu_R^1(b)\text{-Mod} \cong \mu_k(P)\text{-Mod}$ si et seulement si $\mu_R^1(b) \cong End_{\mu_k(P)}(Q)$ où Q est un progénérateur de $\mu_k(P)$. Or pour un p -groupe, les foncteurs de Mackey projectifs sont exactement les B_X . \square

Les progénérateurs de $\mu_k(P)$ ont été déterminés par Serge Bouc dans [6].

Définition 7.2.7. Deux G -ensembles X et Y ont les mêmes stabilisateurs si

$$X \cong \bigsqcup_{H \leq G} n_H G/H \quad Y \cong \bigsqcup_{H \leq G} m_H G/H$$

alors $n_H \neq 0$ si et seulement si $m_H \neq 0$.

Corollaire 7.2.8. *Soit b un bloc de RG . Alors $\mu_R^1(b)\text{-Mod} \cong \mu_R(P)\text{-Mod}$ si et seulement si $\mu_R^1(b) \cong B(X^2)$ où X est un P -ensemble possédant les mêmes stabilisateurs que $\Omega'_P = \sqcup_{Q \in [s_p(P)]} P/Q$.*

Démonstration. Si X est un G -ensemble qui possède les mêmes stabilisateurs que Ω'_P , alors B_X est un pro-générateur de $\mu_k(P)$. Inversement si X est un P -ensemble tel que B_X est un pro-générateur, alors pour tout foncteur de Mackey simple $S_{H,k}$, on a :

$$0 \neq \text{Hom}_{\text{Mack}_k(P)}(B_X, S_{H,k}) \cong S_{H,k}(X).$$

Or $S_{H,k}(X) = 0$ si H n'est pas conjugué à un stabilisateur de X , donc les pro-générateurs de $\text{Mack}_k(P)$ sont exactement les B_X avec X est un P -ensemble qui possède les mêmes stabilisateurs que Ω'_P . \square

Remarque 7.2.9. De la même façon, $D^b(\mu_R^1(b)) \cong D^b(\mu_R(P))$ si et seulement si $\mu_R^1(b) \cong \text{End}_{D^b(\mu_R(P))}(T)$ où T est un complexe basculant de $\mu_R(P)$ -modules. C'est-à-dire T est un complexe borné dont les termes sont des B_X où X est un P -ensemble.

7.3 Bloc de défaut d'ordre p .

Dans ce paragraphe, on utilise le chapitre 6 pour répondre à la question 4.8.1 dans le cas des blocs à défaut d'ordre p .

Théorème 7.3.1. *Soit G et H deux groupes finis. Soit b un bloc de kG de défaut d'ordre p , et c un bloc de kH de défaut d'ordre p . Alors,*

$$D^b(kGb) \cong D^b(kHc) \Leftrightarrow D^b(\mu_k^1(b)) \cong D^b(\mu_k^1(c)).$$

Démonstration. D'après le théorème 6.2.29, dans cette situation, les blocs d'algèbres de Mackey p -locales sont des algèbres d'arbre de Brauer. Soit T_{Mack} l'arbre de cette algèbre et soit T_{Mod} l'arbre du bloc d'algèbre de groupe correspondant. L'arbre T_{Mod} est isomorphe à un sous-arbre de T_{Mack} , que l'on note à nouveau T_{Mod} . De nombreuses informations sur l'arbre T_{Mack} sont déterminées par la connaissance de l'arbre T_{Mod} . Si e est le nombre d'arêtes de l'arbre T_{Mod} , alors le nombre d'arêtes de T_{Mack} est $2e$. Le sommet exceptionnel de T_{Mack} est le même que le sommet exceptionnel de l'arbre T_{Mod} , et la multiplicité est la même. D'après le théorème 6.2.21, deux algèbres d'arbres de Brauer sur le même corps, sont dérivées équivalentes si et seulement si leurs arbres ont le même nombre de sommets, ainsi qu'un sommet exceptionnel de même multiplicité. \square

7.3. Bloc de défaut d'ordre p .

Soit b un bloc de kG de défaut D d'ordre p . Même si l'arbre T_{Mack} semble déterminé par l'arbre T_{Mod} , si deux blocs d'algèbres de groupes sont Morita équivalents, il n'est pas toujours vrai que les blocs d'algèbres de Mackey correspondants sont Morita équivalents (voir exemple 4.5). L'arbre T_{Mack} de $\mu_k^1(b)$ est en réalité déterminé par la catégorie $kGb\text{-Mod}$ et par $kN_G(D)b'\text{-Mod}$, où b' est le correspondant de Brauer de b dans $N_G(D)$. Une condition suffisante pour qu'une équivalence de Morita entre blocs d'algèbres de groupes induise une équivalence de Morita entre blocs d'algèbres de Mackey correspondants, est que cette équivalence de Morita soit splendide.

Proposition 7.3.2. *Soit G et H deux groupes finis avec un p -sous-groupe C d'ordre p en commun. Soit b (resp. c) un bloc de kG (resp. kH) de défaut C . Si $kGb\text{-Mod} \cong kHc\text{-Mod}$ par un bimodule splendide M , alors*

$$\mu_k^1(e)\text{-Mod} \cong \mu_k^1(c)\text{-Mod}.$$

Démonstration. D'après le théorème 7.3.1, les blocs $\mu_k^1(e)$ et $\mu_k^1(f)$ sont des algèbres dérivées équivalentes. Comme deux telles algèbres sont Morita équivalentes si et seulement si elles ont des arbres isomorphes avec même multiplicité exceptionnelle, il est suffisant de démontrer qu'elles ont même matrice de Cartan. On montre que les matrices de décomposition de $\mu_{\mathcal{O}}^1(b)$ et $\mu_{\mathcal{O}}^1(c)$ sont identiques. D'après la proposition 4.2.2, la matrice de décomposition de $\mu_{\mathcal{O}}^1(b)$ peut-être calculée grâce à la connaissance du p -bloc $\mathcal{O}Gb$ et du correspondant de Brauer de b dans $\mathcal{O}\overline{N}_G(C)$. La matrice de décomposition de $\mu_k^1(b)$ est

$$\begin{pmatrix} & 0_{e \times e} \\ D(\text{co}\mu_{\mathcal{O}}(b)) & \\ & Id_{e \times e} \end{pmatrix}$$

Où $D(\text{co}\mu_{\mathcal{O}}(b))$ est la matrice de décomposition de $\text{co}\mu_{\mathcal{O}}(b)$.

Donc si deux blocs kGb et kHc , avec un défaut cyclique d'ordre p sont splendidement Morita équivalents, les blocs $\mathcal{O}Gb$ et $\mathcal{O}Hc$ sont splendidement Morita équivalents, d'après les résultats de la section 5 de [30]. Les résultats du chapitre (5) entraînent que les blocs des algèbres de Mackey cohomologiques $\text{co}\mu_{\mathcal{O}}(b)$ et $\text{co}\mu_{\mathcal{O}}(c)$ sont Morita équivalents, donc les matrices de Cartan de $\mu_k^1(b)$ et $\mu_k^1(c)$ sont les mêmes. \square

En utilisant les résultats sur les ordres de Green, on peut relever à l'anneau de valuation les deux théorèmes précédents :

Théorème 7.3.3. *Soit G et H deux groupes finis avec un p -sous-groupe C d'ordre p en commun. Soit b (resp. c) un bloc de $\mathcal{O}G$ (resp. $\mathcal{O}H$) de défaut C . Alors*

1. $D^b(\mu_{\mathcal{O}}^1(b)) \cong D^b(\mu_{\mathcal{O}}^1(c))$ si et seulement si $D^b(\mathcal{O}Gb) \cong D^b(\mathcal{O}Hc)$.
2. Si $\mathcal{O}Gb\text{-Mod} \cong \mathcal{O}Hc\text{-Mod}$ par un bimodule splendide M (ou qui possède la propriété \mathcal{P}), alors $\mu_{\mathcal{O}}^1(b)\text{-Mod} \cong \mu_{\mathcal{O}}^1(c)\text{-Mod}$.

Démonstration. La première assertion vient du fait que deux ordres de Green avec les mêmes données locales sont dérivés équivalents si et seulement si leurs arbres possèdent le même nombre de sommets, ainsi qu'une même multiplicité exceptionnelle. La seconde vient du fait que deux ordres de Green avec mêmes données locales sont Morita équivalents si leurs arbres sont isomorphes, ainsi il est suffisant de démontrer que les matrices de décomposition de $\mu_{\mathcal{O}}^1(b)$ et $\mu_{\mathcal{O}}^1(c)$ sont les mêmes. Ce qui a été démontré dans (7.3.2). \square

Quelques questions.

Soient G et H deux groupes finis. Soit (K, \mathcal{O}, k) un triplet p -modulaire assez gros pour $\mu_k^1(G)$ et $\mu_k^1(H)$. Soit $R = \mathcal{O}$ ou k . Soient b un bloc de RG et c un bloc de RH .

On a vu qu'une équivalence splendide (ou qui possède la propriété \mathcal{P}) entre RGb et RHc induit une équivalence entre les blocs d'algèbres de Mackey cohomologiques correspondantes. On peut se poser la question de la réciproque :

Question 7.3.4. *Si les catégories $co\mu_R(b)\text{-Mod} \cong co\mu_R(c)\text{-Mod}$ sont équivalentes, a-t-on une équivalence de Morita $RGb\text{-Mod} \cong RHc\text{-Mod}$?*

Bien sur cette question est aussi valable pour les équivalences dérivées. De même, on a mis en évidence dans le chapitre 4 et dans de nombreux autres cas à l'aide de GAP, que si deux blocs d'algèbres de groupes sont splendidement dérivés équivalents, alors les matrices de Cartan des algèbres de Mackey p -locales correspondantes ont même diviseurs élémentaires. On a démontré, dans quelques cas, que ceci est une conséquence de l'existence d'une équivalence dérivée. Dans le cas général la question reste ouverte :

Question 7.3.5. *Si les algèbres RGb et RHc sont splendidement dérivées équivalentes, as-t-on :*

$$D^b(\mu_R^1(b)) \cong D^b(\mu_R^1(c))?$$

En étant plus modeste, on peut se demander s'il existe une démonstration directe à la question :

Question 7.3.6. *Si les algèbres RGb et RHc sont splendidement dérivées équivalentes, est-ce que les matrices de Cartan de $\mu_k^1(b)$ et $\mu_k^1(c)$ ont les mêmes diviseurs élémentaires ?*

De plus, on a vu qu'il existe des équivalences entre blocs d'algèbres de groupes qui ne sont pas splendides mais qui induisent des équivalences entre les algèbres de Mackey cohomologiques correspondantes. La propriété \mathcal{P} est-elle suffisante pour les équivalences entre blocs d'algèbres de Mackey p -locales ?

Question 7.3.7. *Si RGb et RHc sont Morita équivalentes par un bimodule possédant la propriété \mathcal{P} est-ce que :*

1. *Les matrices de Cartan de $\mu_k^1(b)$ et $\mu_k^1(c)$ ont les mêmes diviseurs élémentaires ?*
2. *Les algèbres $\mu_k^1(b)$ et $\mu_k^1(c)$ sont Morita équivalentes ?*

Une façon de répondre à ces questions serait de réussir à construire des foncteurs entre les catégories de foncteurs de Mackey. Pour ceci, comme on ne dispose pas de théorème de Yoshida, une des idées serait de généraliser la construction des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables de 4.3. Ce qui devrait revenir à la généralisation de la construction de Dress B_X où X est un G -ensemble à une “construction de Dress” B_V où est un RG -facteur de permutation.

Question 7.3.8. *Soient G et un groupe fini, R un anneau commutatif et V un RG -facteur de permutation. Existe-t-il un endo-foncteur $M \mapsto M_V$ de $\text{Mack}_R(G)$, qui généralise la construction de Dress ?*

Dans le cas de la construction de Dress en un G -ensemble X , on a la propriété suivante : soit M un foncteur de Mackey sur un anneau R , pour un groupe G et soit X un G -ensemble fini, alors

$$M_X \cong B_X \otimes M,$$

où \otimes est le produit tensoriel des foncteurs de Mackey (voir [6]). Donc si cette généralisation est “bien faite”, il est suffisant de définir B_V pour V un RG -facteur de permutation.

Chapitre 8

Annexe

8.1 Programmes GAP.

```
#####
# Package pour GAP4 appelé "repr.gap",
# qui contient une liste de fonctions utiles pour travailler
# avec les représentations locales des groupes, et les foncteurs de
# Mackey.
# Le programme principal permet le calcul des matrices de cartan des
# algèbres de Mackey p-locales.
#
# La première version du package était basée sur les fonctions de
# Peter Webb, celle ci s'inspire de son travail mais est indépendante.
#####
#
#
#
#####
# Une représentation est un record qui contient le groupe, les générateurs
# de ce groupe, les matrices de l'action de g sur l'espace vectoriel et le
# module au sens des fonctions MTX.
#####
Rep:=function(g,mat,field)
local gen,gl,f,n;
gen:=GeneratorsOfGroup(g);
if gen=[] then
  gen:=[One(g)];
fi;
n:=Size(mat[1][1]);
gl:=GL(n,field);
f:=GroupHomomorphismByImagesNC(g,gl,gen,mat);
return rec( group:=g, generators:=gen, hom:=f, module:=GModuleByMats(mat,field));
end;
```

```
#####
# Restriction d'une représentation. On suppose G et H différents.
#####
restriction:=function(g,h,rep)
local z,y,gl,s,f;
  gl:=GL(rep.module.dimension,rep.module.field);
f:=GroupHomomorphismByImagesNC(g,gl,rep.generators,rep.module.generators);
  s:=GeneratorsOfGroup(h);
if s=[] then s:=[One(g)];fi;
  z:=List(s,x->Image(f,x));
  y:=GroupHomomorphismByImagesNC(h,gl,s,z);
f:=List(s,x->Image(y,x));
  return rec(group:=h,generators:=s,hom:=y,
    module:=GModuleByMats(f,rep.module.field));
end;
#####
# Trace de 1 à H de la représentation r vu comme module pour  $N_{\{G\}}(H)$ 
#####
trace:=function(g,h,r)
local n,s,a,b,gl,f,ge;
n:=Normalizer(g,h);
a:=Sum(h,x->Image(r.hom,x));
s:=restriction(g,n,r);
b:=MTX.SubGModule(s.module,a);
if b=[] then
return rec(group:=n,generators:=GeneratorsOfGroup(n),
hom:=fail,module:=GModuleByMats([],0,s.module.field));
fi;
a:=MTX.InducedActionSubmodule(s.module,b);
gl:=GL(a.dimension,s.module.field);
ge:=GeneratorsOfGroup(n);
if ge=[] then ge:=[One(n)];fi;
f:=GroupHomomorphismByImagesNC(n,gl,ge,a.generators);
return rec(group:=n,generators:=GeneratorsOfGroup(n),hom:=f,module:=a);
end;
#####
# Fonction qui donne la représentation nulle d'un groupe.
#####
NullRep:=function(g,field)
local res,gen,mat,t;
gen:=GeneratorsOfGroup(g);
if gen=[] then gen:=[One(g)];fi;
mat:=[];
for t in gen do
Add(mat,NullMat(1,1,field));
od;
res:=Rep(g,mat,field);
return(res);
```

8.1. Programmes GAP.

```
end;
#####
#test représentation nulle pour éviter certain bug.
#####
testnullrep:=function(r)
local field,mat,x;
field:=r.module.field;
mat:=[[0*Z(Characteristic(field))]];
for x in r.module.generators do
  if x<>mat then
    return(false);
  fi;
od;
return(true);
end;
#####
#Somme directe de deux représentations.
#####
directsum:=function(r1,r2)
local u,v,w,gl,g,bool;
bool:=testnullrep(r1);
if bool=true then return(r2);fi;
bool:=testnullrep(r2);
if bool=true then return(r1);fi;
  g:=r1.group;
u:=MTX.Generators(r1.module);
v:=MTX.Generators(r2.module);
w:=MTX.MatrixSum(u,v);
u:=GModuleByMats(w,r1.module.field);
gl:=GL(MTX.Dimension(u),r1.module.field);
v:=GroupHomomorphismByImagesNC(g,gl,r1.generators,w);
return rec(group:=r1.group,generators:=r1.generators,hom:=v,module:=u);
end;
#####
# fonction qui permet le passage des GModules à une représentation.
#####
GModToRep:=function(g,modul)
local gen,gl,f;
gen:=GeneratorsOfGroup(g);
gl:=GL(MTX.Dimension(modul),modul.field);
if gen=[] then
gen:=[One(g)];
fi;
f:=GroupHomomorphismByImagesNC(g,gl,gen,MTX.Generators(modul));
return rec(group:=g,generators:=gen, hom:=f ,module:=modul);
end;
#####
# dimension de l'espace d'endomorphismes d'une représentation
#####
```

```

dimendo:=function(r)
local dim,calg;
calg:=FullMatrixAlgebraCentralizer(r.module.field,r.module.generators);
dim:=Dimension(calg);
return dim;
end;
#####
# Fonction qui calcule la représentation de permutation de g sur G/H.
#
#####
representation:=function(g,h,field)
local f,ind,mat,gen,gl,f2;
gen:=GeneratorsOfGroup(g);
if gen=[] then gen:=[One(g)];fi;
f:=FactorCosetAction(g,h);
ind:=Index(g,h);
gl:=GL(ind,field);
mat:=List(gen,x->PermutationMat(Image(f,x),ind,field));
f2:=GroupHomomorphismByImagesNC(g,gl,gen,mat);
return rec(group:=g,generators:=gen,hom:=f2, module:=GModuleByMats(mat,field));
end;
#####
# déflation selon le morphisme surjectif f.
#####
deflation:=function(g,h,f,r)
local gen, mat;
gen:=GeneratorsOfGroup(h);
mat:=List(gen,x->Image(r.hom,PreImagesRepresentative(f,x)));
return(Rep(h,mat,r.module.field));
end;
#####
# inflation suivant le morphisme f
#####
inflation:=function(g,h,r,f)
local z,y,gl,s;
gl:=Image(r.hom);
s:=GeneratorsOfGroup(g);
z:=List(s,x->Image(r.hom,Image(f,x)));
y:=GroupHomomorphismByImagesNC(g,gl,s,z);
return rec(group:=g,generators:=s,hom:=y,module:=GModuleByMats(z,r.module.field));
end;
#####
# Induction d'une représentation
#####
induction:=function(g,h,rep)
local c,s,f,y,x,gg,gen,m,ip,i,a,t,gl,d,j;
if h=g then
return(rep);
fi;

```

8.1. Programmes GAP.

```

d:=rep.module.dimension;
c:=RightCosets(g,h);
c:=List(c,Representative);
s:=FactorCosetAction(g,h); # l'action de permutation de g sur G/H.
y:=Index(g,h);
gg:=GeneratorsOfGroup(g);
gen:=[];
for x in gg do
  m:=NullMat(y*d,y*d,rep.module.field);
  f:=Image(s,x);
  for i in [1..y] do
    ip:=OnPoints(i,f); # g.sw=ip*w.
a:=c[i]*x*c[ip]^-1; # g.s=ip*a.
    t:=Image(rep.hom,a); # la s' ligne de la matrice par bloc est Ègale a t
for j in [1..d] do
    m[(i-1)*d+j]{[(ip-1)*d+1..ip*d]}:=t[j];
    od;
    od;
    Add(gen,m);
od;
gl:=GeneralLinearGroup(y*d,rep.module.field);
f:=GroupHomomorphismByImagesNC(g,gl,gg,gen);
return rec(group:=g,generators:=gg,
           hom:=f,module:=GModuleByMats(gen,rep.module.field));
end;
#####
# retourne le quotient de Brauer de la rep r de g
# par le sous-groupe h
# comme représentation du sous-groupe du normalisateur de h dans g
# (issue du package de Serge Bouc).
#####
brauer:=function(g,h,r)
local dim,dimh,dimk,gl,y,z,car,q,l,rq,b,bq,rh,cq,ker,rrq,mq,v,w,wh,s,n;
n:=Normalizer(g,h);
if Size(h)=1 then
return restriction(g,n,r);
fi;
q:=PrimePowersInt(Size(h));
car:=q[1];
if Length(q)<>2 or Gcd(car,Size(r.module.field))=1 then
return
rec(group:=n,generators:=GeneratorsOfGroup(n),
hom:=fail,module:=GModuleByMats([],0,r.module.field));
fi;
l:=MaximalNormalSubgroups(h);
dim:=r.module.dimension;
y:=r.hom;
ker:=[];
for q in l do

```

```

rq:=Image(y,q);
if Size(q)>1 then
rq:=GeneratorsOfGroup(rq);
else
rq:=[Identity(rq)];
fi;
rrq:=BaseFixedSpace(rq);
cq:=RightCosets(h,q);
cq:=List(cq,x->Representative(x));
mq:=Sum(cq,x->Image(y,x));
Append(ker,List(rrq,x->x*mq));
od;
    v:=FullRowSpace(r.module.field,dim);
    w:=Subspace(v,ker);
dimk:=Dimension(w);
    b:=Basis(w);
rq:=Image(y,h);
rq:=GeneratorsOfGroup(rq);
rrq:=BaseFixedSpace(rq);
wh:=Subspace(v,rrq);
s:=GeneratorsOfGroup(n);
if Dimension(wh)=dimk then
return rec(group:=n,generators:=s,hom:=fail,module:=GModuleByMats([],0,r.module.field));
fi;
rh:=NaturalHomomorphismBySubspace(wh,w);
b:=Basis(Image(rh));
    z:=List(s,x->List(b,y->Coefficients(b,
    Image(rh,Representative(PreImages(rh,y))*Image(r.hom,x)))));
rq:=GeneralLinearGroup(Length(b),Size(r.module.field));
rrq:=GroupHomomorphismByImagesNC(n,rq,s,z);
return rec(group:=n,generators:=s,hom:=rrq,module:=GModuleByMats(z,r.module.field));
end;
#####
# Caractère de Brauer d'une représentation.
#####
BrauerCara:=function(rep,x)
local mat,ord,char,t,field,zeta,cyclo,zetac,zp,res,i,mult,z;
mat:=Image(rep.hom,x);
ord:=Order(mat);
char:=Characteristic(rep.module.field);
t:=char^OrderMod(char,ord);
field:=GF(t);
zeta:=Z(t)^((t-1)/ord);
cyclo:=CyclotomicField(ord);
zetac:=E(ord);
z:=zeta;
zp:=zetac;
res:=0;
for i in [1..ord] do

```

8.1. Programmes GAP.

```

    mult:=Length(NullspaceMat(mat-z*IdentityMat(rep.module.dimension,field)));
    res:=res+mult*zp;
    z:=zeta*z;
    zp:=zetac*zp;
od;
return(res);
end;
CorpsDeDef:=function(module)
local mat,i,corps,deg,d,calc;
mat:=module.generators;
d:=[];
deg:=DegreeFFE(PrimitiveRoot(module.field));
for i in mat do
    calc:=DegreeFFE(i);
    if calc=deg then
        return(module.field);
    else
        Add(d,calc);
    fi;
od;
deg:=Maximum(d);
corps:=GF(Characteristic(module.field)^deg);
return(corps);
end;

#####
# Fonction qui trouve les modules (abs) simple d'un groupe,
# quitte à grossir le corps.
#####
AbsSimpleRep:=function(g,field)
local p,conj,c,conj,ncp,H,h,res,m,r,s,ss,sm,dm,mm,rs,reprsim,rept,ok,t,gros;
p:=Characteristic(field);
conj:=ConjugacyClasses(g);
conj:=List(conj,Representative);
conj:=Filtered(conj,x->Order(x) mod p <> 0);
ncp:=Length(conj);
H:=ConjugacyClassesSubgroups(g);
H:=List(H,Representative);
H:=Reversed(H);
res:=[];
gros:=false;
for h in H do
    r:=representation(g,h,field);
    m:=r.module;
    s:=MTX.CompositionFactors(m);
    ss:=[];
    for sm in s do
        dm:=MTX.DegreeSplittingField(sm);
    if dm>1 then

```

```

mm:=GModuleByMats(MTX.Generators(sm),GF(p^dm));
ss:=Concatenation(ss,MTX.CompositionFactors(mm));
gros:=true;
else
  Add(ss,sm);
fi;
od;
s:=ss;
for sm in s do
  ok:=true;
  for rs in res do
    if sm.field=rs.field then
      if MTX.Isomorphism(sm,rs)<>fail then
        ok:=false;
      break;
    fi;
  od;
  if ok=true then
    Add(res,sm);
  fi;
  if Length(res)=ncp then
    break;
  fi;
od;
if gros=true then
  Print("!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! \n");
  Print(" Pour obtenir des representation absolument irreductible le corps a ete modifie");
  Print("!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! \n");
fi;
Sort(res);
repsim:=List(res,x->GModToRep(g,x));
return(repsim);
end;
#####
# Matrice de décomposition d'un groupe.
#####
DecompMat1:=function(g,field)
local tb,modr,matB,cl,clp,p,test,i,m,x,irr,matZ,
compteur,c,nomb,cartan,calc,res,mat,im,B,j,calcu,k,N,ij,im1,ln,ip,I,n,bool;
LoadPackage("ctbllib");
p:=Characteristic(field);
tb:=CharacterTable(g);
cl:=ConjugacyClasses(tb);
cl:=List(cl,Representative);

```

8.1. Programmes GAP.

```
clp:=[];
compteur:=[];
for i in [1..Size(cl)] do
  test:=Order(cl[i]) mod p;
  if test<>0 then
    Add(clp,cl[i]);
    Add(compteur,i);
  fi;
od;
modr:=AbsSimpleRep(g,field);
matB:=[];
for m in modr do
  x:=[];
  for i in [1..Size(clp)] do
    c:=BrauerCara(m,clp[i]);
  Add(x,c);
  od;
  Add(matB,x);
od;
irr:=Irr(tb);
matZ:=[];
for m in irr do
  x:=[];
  for i in [1..Size(clp)] do
    Add(x,m[compteur[i]]);
  od;
  Add(matZ,x);
od;
c:=matZ*matB^-1;
c:=TransposedMat(c);
Print("##### \n");
Print("la matrice de decomposition du groupe ");
Print(StructureDescription(g)," est :","\n");
nomb:=NextPrimeInt(Maximum(Concatenation(c)));
Display(Z(nomb)^0*c);
Print("===== \n");
Print("la matrice de cartan est :\n");
cartan:=c*TransposedMat(c);
nomb:=NextPrimeInt(Maximum(Concatenation(cartan)));
Display(Z(nomb)^0*cartan);
Display(ElementaryDivisorsMat(cartan));
Print("##### \n");
mat:=c;
k:=1;
res:=[];
field:=Field(mat[1][1]);
n:=Size(mat[1]);
ln:=Size(TransposedMat(mat)[1]);
N:=NullMat(ln,n,field);
```

```

I:=[];
for k in [1..ln] do
  if mat[k]<>N[1] then
    B:=[];
    im:=[];
    ij:=[];
    for i in [1..n] do
      if mat[k][i] <> 0 then Add(im,i); fi;
    od;
    for ip in [k..ln] do
      im1:=[];
    for i in [1..n] do
      if mat[ip][i]<> 0 then
        Add(im1,i);
      fi;
    od;
    bool:=Intersection(im,im1);
    if bool <> [] then im:=Union(im,im1); Add(ij,ip); fi;
    #if bool<>[] then Add(ij,ip); fi;
    od;
    B:=mat{ij}{im};
    mat{ij}{im}:=N{ij}{im};
    Add(I,[ij,im]);
    Add(res,B);
  fi;
od;
Print("\n Il y a ",Size(res)," blocs \n");
Print(" ===== \n");
for k in [1..Size(res)] do
  Print("bloc de default : ");
  Print("il y a ", Size(I[k][1])," foncteurs simples dans ce bloc \n");
  Print("La matrice de decomposition : \n ");
  Display(Z(nomb)^0*res[k]);
  Print(" La matrice de cartan du bloc : \n");
  calcul:=res[k]*TransposedMat(res[k]);
  Display(Z(nomb)^0*calcul);
  Print(" Les diviseurs elementaires : \n");
  Print(ElementaryDivisorsMat(res[k]*TransposedMat(res[k])), "\n");
  Print("===== \n");
od;
end;
#####
#
# Fonction qui calcul les points fixes d'une representation de
# G par un sous groupe H.
#
#####
FixedPoints:=function(g,h,rep)
local gen,mat,el,c,res,n,field,v,nul;

```

8.1. Programmes GAP.

```
gen:=GeneratorsOfGroup(h);
n:=rep.module.dimension;
field:=rep.module.field;
res:=field^n;
for el in h do
  c:=Image(rep.hom,el)-IdentityMat(n,field);
  nul:=NullspaceMat(c);
  if nul=[] then
    return([]);
  fi;
  v:=VectorSpace(field,nul);
  res:=Intersection(res,v);
od;
return(Basis(res));
end;
#####
# Fonction qui donne le radical d'une représentation.
#####
radical:=function(rep)
local x,v,B,mat,matR,i,j,repR,field,m,g,gen,vc,c;
m:=rep.module;
g:=rep.group;
field:=m.field;
x:=MTX.BasisRadical(m);
if x=[] then
  repR:=Rep(g,[One(field)*[[0]]],field);
else
  v:=VectorSpace(field,x);
  B:=Basis(v,x);
  gen:=rep.generators;
  mat:=m.generators;
  matR:=[];
  for i in [1..Size(mat)] do
    matR[i]:=[];
    for j in [1..Size(x)] do
      vc:=x[j]*mat[i];
      c:=Coefficients(B,vc);
      Add(matR[i],c);
    od;
    matR[i]:=TransposedMat(matR[i]);
  od;
  repR:=Rep(g,matR,field);
fi;
return(repR);
end;
```

```
#####
#
# Fonction qui rend la liste des p-sous-groupes de G à conjugaison près.
#
#####
PSubgroup:=function(g,p)
local c, Hp, H, th, i, k;
Hp:=ConjugacyClassesSubgroups(g);
th:=Size(Hp);
H:=[Representative(Hp[1])];
k:=2;
for i in [2..th] do
    c:=Representative(Hp[i]);
    if IsPGroup(c) and PrimePGroup(c)=p then
        H[k]:=c;
        k:=k+1;
    fi;
od;
Sort(H,function(v,w) return Size(v)<Size(w);end);
return(H);
end;
#####
# Matrice de décomposition d'un groupe à partir de la table
# de caractères ordinaires.
#####
DecompMat:=function(tbl,p)
local g, modr, matB, cl, clp, field, test, i, m, x, irr, matZ,
compteur, c, nomb, cartan, calc, res, mat, im, B, j, calcul,
k, N, ij, im1, ln, ip, I, n, bool;
LoadPackage("ctbllib");
field:=GF(p);
g:=UnderlyingGroup(tbl);
cl:=List(ConjugacyClasses(tbl),Representative);
clp=[];
compteur=[];
for i in [1..Size(cl)] do
    test:=Order(cl[i]) mod p;
    if test<>0 then
        Add(clp,cl[i]);
        Add(compteur,i);
    fi;
od;
modr:=AbsSimpleRep(g,field);
matB=[];
for m in modr do
    x=[];
    for i in [1..Size(clp)] do
        c:=BrauerCara(m,clp[i]);
        Add(x,c);
    end;
end;
end;
#####
```

8.1. Programmes GAP.

```
    od;
    Add(matB,x);
od;
irr:=Irr(tbl);
matZ:=[];
for m in irr do
    x:=[];
    for i in [1..Size(clp)] do
        Add(x,m[compteur[i]]);
    od;
    Add(matZ,x);
od;
c:=matZ*matB^-1;
return(c);
end;
#####
# Fonction qui donne les caractères de Brauer projectifs d'un groupe
#####
ProjBrauerChar:=function(g,p)
local tbl, modtbl, dec,res,v;
LoadPackage("ctbllib");
tbl:=CharacterTable(g);
modtbl:=CharacterTable(g,p);
v:=Irr(tbl);
if modtbl <> fail then
dec:=DecompositionMatrix(modtbl);
else
dec:=DecompMat(tbl,p);
fi;
res:=v*dec;
return(res);
end;
```

Le programme qui suit est le programme principal, qui calcule les matrices de décomposition des algèbres de Mackey cohomologiques (de groupes pas trop gros). Le programme utilise la formule de la proposition 4.2.2. On calcule la matrice dans la base $L_{P,E}$ de $pp_k(G)$. C'est la base formée des $Ind_{N_G(P)}^G Inf_{\overline{N_G(P)}}^{N_G(P)} E$ pour E un $\overline{N_G(P)}$ -module projectif indécomposable et P parcourt les p -sous-groupes de G . Ensuite on calcule la matrice de passage de la base $L_{P,E}$ vers la base $M_{P,E}$, qui est la base de $pp_k(G)$ exhibé par Broué dans [10]. L'algorithme est basé sur la fonction *MTX.decompose* qui décompose un module en somme directe de modules indécomposables. Cette fonction est basée sur un algorithme probabiliste.

```
#####
# fonction qui calcule la matrice de passage de la base lpe vers mpe.
# fonctionne avec les fonctions du package repr.gap. Nécessite ctblib.
#
# Le résultat est la matrice de décomposition de comu(group).
# les colonnes sont indexées par les caractères ordinaires de groupe
# et les lignes par les p-perm par ordre de vortex décroissant.
#####
deccomu:=function(group,prime)
local psub,np,nbp,q,var1,var2,f,conj,conj,h,H,gros,r,field,pairqe,ss,s,
e,ni,i,dm,deg,reg,res,resp,pairqsp,ep,calc,ok,mm,fieldr,ress,lpe,mat,
taille,co,ncol,nlin,k,j,bool,resa,resb,irr,irrp,tbl,decomp,matB,modtbl,x,
matZ,m,projb,tom,perm,lat,calc1,K,c,l,vp,chi,matd,pos1,pos2,phi,par,
cch,calc2;
LoadPackage("ctblib");
LoadPackage("tomlib");
psub:=PSubgroup(group,prime);
np:=[];
nbp:=[];
conj:=[];
conj:=[];
ress:=[];
resa:=[];
tbl:=[];
irr:=[];
irrp:=[];
projb:=[];
decomp:=[];
lat:=[];
tom:=[];
pairqsp:=[]; # contient un p-sous-groupe puis les
#proj nbp et les simples nbp.
lpe:=[]; # base de ppk(group).
field:=GF(prime);
# np est le normalisateur d'un p groupe dans le groupe ambiant.
```

8.1. Programmes GAP.

```
# nbp est formé des couples np/p et de la surjection canonique.
# conj est formée des classes de conjugaisons de nbp
# conjp est formé des classes de conj des éléments pég.
# lpe est formé du vortex et de la liste
#      des indéfinis(E) ou E parcourant les npb proj.
# tbl contient les tables de caractères ordinaires des nbp.
# irrp contient les tables de Brauer des nbp.
# projb contient les caractères de Brauer projectifs des nbp.
# decomp contient les matrices de décompositions des nbp.
# tom contient les tables de marques des nbp.
for q in psub do
  var1:=Normalizer(group,q);
  f:=NaturalHomomorphismByNormalSubgroup(var1,q);
  var2:=Image(f);
  Add(np,var1);
  calc:=CharacterTable(var2);
  Add(lat,LatticeSubgroups(var2));
  #Add(tom,TableOfMarks(var2));
  Add(tbl,calc);
  calc:=ConjugacyClasses(calc);
  Add(conj,calc);
  Add(conjp,Filtered(calc,x->Order(Representative(x)) mod prime <> 0));
  Add(nbp,[var2,f]);
od;
Print("Les données préliminaires sont chargées \n");
deg:=1;
#
# on calcule les projectifs indécomposables des groupes nbp,
# ainsi que le module simple correspondant à sa tête
#
gros:=false;
for i in [1..Size(psub)] do
  Print("Modules pour ",StructureDescription(nbp[i][1]), " : \n");
  # si le groupe nbp est trivial le MTX ne fonctionne pas.
  if Size(nbp[i][1]) <> 1 then
    # en premier les simples.
    H:=Reversed(Filtered((
      List(ConjugacyClassesSubgroups(lat[i]),Representative)),
      x->Order(x) mod prime <> 0));
    ni:=Size(conjp[i]);
    res:=[];
    for h in H do
      if Length(res)=ni then
        break;
    fi;
    r:=representation(nbp[i][1],h,field);
    s:=MTX.CompositionFactors(r.module);
    ss:=[];
    for e in s do
```

```

dm:=MTX.DegreeSplittingField(e);
if dm> 1 then
  # module non absolument simple.
  mm:=GModuleByMats(MTX.Generators(e),GF(prime^dm));
  deg:=Maximum(deg,dm);
  ss:=Concatenation(ss,MTX.CompositionFactors(mm));
else
  Add(ss,e);
fi;
od;
for e in ss do
  ok:=true;
  for ep in res do
    if ep.field = e.field then
      if MTX.Isomorphism(ep,e)<> fail then
        ok:=false;
        break;
      fi;
    fi;
  od;
  if ok=true then
    Add(res,e);
  fi;
  od;
od;
Add(resa,res);
# Print("On a trouve ", Size(res), "nouveaux simples \n");
fi;
if Size(nbp[i][1])=1 then
  calc:=RegularModule(nbp[i][1],GF(prime));
  Add(resa,[calc[2]]);
fi;
od;
fielldr:=GF(prime^deg);
for i in [1..Size(resa)] do
  resb=[];
  for e in resa[i] do
    if e.field=fielldr then
      Add(resb,e);
    else
      Add(resb,GModuleByMats(e.generators,fielldr));
    fi;
  Sort(resb);
  od;
  Add(ress,resb);
od;
od;

```

8.1. Programmes GAP.

```
#####
# à ce niveau on a tous les simples ainsi que le deg du corps de rupture.
# recherche des tables de Brauer et des matrices de décomposition.
#####
for i in [1..Size(psub)] do
  modtbl:=tbl[i] mod prime;
  matB:=[];
  for m in ress[i] do
    calc:=GModToRep(nbp[i][1],m);
    x:=[];
    for j in [1..Size(conjp[i])] do
      c:=BrauerCara(calc,Representative(conjp[i][j]));
      Add(x,c);
    od;
  Add(matB,x);
  od;
  irr:=Irr(tbl[i]);
  matZ:=[];
  for m in irr do
    x:=[];
  for j in [1..Size(conjp[i])] do
    Add(x,m[Position(ConjugacyClasses(tbl[i]),conj[i][j])]);
  od;
  Add(matZ,x);
  od;
  Add(irrp,matB);
  calc:=matZ*matB^-1;
  Add(decomp,calc);
  Add(projb,irr*calc);
od;

#####
# Recherche des projectifs
#####
for i in [1..Size(psub)] do
  if Size(nbp[i][1])=1 then
    calc:=RegularModule(nbp[i][1],fieldr);
    Add(pairqsp,[psub[i],[calc[2]],[calc[2]]]);
    Add(lpe,[psub[i],[induction(group,np[i],inflation(np[i],nbp[i][1],
      GModToRep(nbp[i][1],calc[2]),nbp[i][2]))],projb[i]]);
  else
    K:=List(ConjugacyClassesSubgroups(nbp[i][1],x->Representative(x));
    K:=Filtered(K,x->Size(x) mod prime <> 0);
    Sort(K,function(v,w) return Size(v)>Size(w);end);
    ss:=[];
    ni:=Size(conjp[i]);
    for k in K do
      if Length(ss)=ni then
        break;

```

```

        fi;
        Print("Decomposition d'une representation de dimension : ");
Print(Size(nbp[i][1])/Size(k), " it may take a while...\n");
        reg:=representation(nbp[i][1],k,fieldr);
par:=MTX.HomogeneousComponents(reg.module);
for e in par do
    ok:=true;
    for ep in ss do
        if MTX.IsomorphismModules(ep.component[2],e.component[2])<> fail
        then
            ok:=false;
            break;
        fi;
    od;
    if ok=true then
        Add(ss,e);
Print("un nouveau module projectif trouve\n");
        fi;
    od;
od;
# les classes d'isomorphismes des projectifs indecomposables.
resp=[];
# les projectifs indécomposables.
# On ordonne les projectifs de telle façon que le i-ème proj
# ait pour tête le i-ème simple.
for e in ress[i] do
    for ep in ss do
        if ep.component[2].field=e.field then
            calc:=MTX.BasisModuleHomomorphisms(e,ep.component[2]);
            if calc<>[] then
                Add(resp,ep.component[2]);
            fi;
        fi;
    od;
break;
fi;
fi;
od;
od;
Add(pairqsp, [psub[i], resp, ress[i]]);
if Size(psub[i])=1 then
    Add(lpe, [psub[i], List(resp, x->GModToRep(group, x)), projb[i]]);
else
    Add(lpe, [psub[i], List(resp, x->induction(group, np[i],
        inflation(np[i], nbp[i][1], GModToRep(nbp[i][1], x), nbp[i][2]))), projb[i]]);
fi;
fi;
od;
# On a tous les projectifs indecomposables.
# construction de la matrice de passage.
Print("Debut de la construction de la matrice de passage...
it may take a while \n");

```

8.1. Programmes GAP.

```
taille:=Sum(List(conjp,x->Size(x)));
mat:=IdentityMat(taille);
ncol:=Size(conjp[1])+1;
for i in [2..Size(psub)] do # on parcourt les psub
  Print(" lpe pour p = ",StructureDescription(psub[i]),"\n");
  # Print(" i = ",i,"\n");
  for e in lpe[i][2] do # on parcourt les lpe
    nlin:=0;
    for j in [1..i-1] do # on parcourt les q < p.
      if IsSubgroup(psub[i],psub[j]) then
        calc:=MTX.HomogeneousComponents
          (deflation(np[j],nbp[j][1],nbp[j][2],
            brauer(group,psub[j],e)).module);
        for k in [1..Size(pairqsp[j][2])] do
          # on parcourt les nbq projectif
          for co in calc do
            bool:= MTX.IsomorphismModules
              (pairqsp[j][2][k],co.component[2]);
            if bool <> fail then
              mat[nlin+k][ncol]:=Size(co.images)+1;
              break;
            fi;
          od;od;
        fi;
        nlin:=nlin+Size(pairqsp[j][2]);
      od;
    od;
  ncol:=ncol+1;
  od;
od;
#####
# Matrice de décomposition dans la base lpe.
# On a besoin de la librairie ctllib.
#####
Print("Debut de la construction de la matrice de decomposition \n");
matd:=[];
#####
# chargement des positions des éléments des np.
#####
cch:=[];
for i in [1..Size(psub)] do
  cch[i]:=[];
  for h in np[i] do
    calc1:=Position(List(conj[i],x->Image(nbp[i][2],h) in x),true);
    calc2:=Position(List(conj[1],x->h^-1 in x),true);
    Add(cch[i],[h,calc2,calc1]);
  od;
od;
for chi in Irr(tbl[1]) do
  x:=[];
```

```

    for i in [1..Size(psub)] do
      pos1:=cch[i];
      for j in [1..Size(lpe[i][2])] do
        phi:=lpe[i][3][j];
        calc:=[];
        calc:=Sum([1..Size(pos1)],x->phi[pos1[x][3]]*chi[pos1[x][2]]);
        Add(x,calc/Size(np[i]));
      od;
    od;
    od;
    Add(matd,x);
  od;
#####
# Changement de base.
#####
return(TransposedMat(matd*mat^-1));
end;

```

Le dernier programme donne les matrices de Cartan des blocs de l'algèbre de Mackey cohomologique, ainsi que quelques informations utiles comme le défaut du bloc et les diviseurs élémentaires de cette matrice.

```

cartancomu:=function(g,p)
local mat,nomb,calc,mat1,n,ln,field,
k,res,I,calcu,im,B,N,i,j,ij,bool,ip,im1,irr,def,e;
mat:=deccomu(g,p);
e:=Valuation(Size(g),p);
irr:=Irr(CharacterTable(g));
Print("##### \n");
Print("la matrice de decomposition de l'algebre de Mackey
cohomologique du groupe ");
Printt(,StructureDescription(g)," est :","\n");
nomb:=NextPrimeInt(Maximum(Concatenation(mat)));
Display(Z(nomb)^0 *mat);
Print("===== \n");
Print("la matrice de cartan est :\n");
calc:=mat*TransposedMat(mat);
nomb:=NextPrimeInt(Maximum(Concatenation(calc)));
Display(Z(nomb)^0*calc);
Print("les diviseurs elementaires sont : \n");
Display(ElementaryDivisorsMat(calc));
Print("##### \n");
mat1:=MutableCopyMat(mat);
k:=1;
res:=[];
field:=Field(mat1[1][1]);
n:=Size(mat1[1]);
ln:=Size(TransposedMat(mat1)[1]);
N:=NullMat(ln,n,field);

```

8.1. Programmes GAP.

```
I:=[];
for k in [1..ln] do
  if mat1[k]<>N[1] then
    B:=[];
    im:=[];
    ij:=[];
    for i in [1..n] do
      if mat1[k][i] <> 0 then Add(im,i); fi;
    od;
    for ip in [k..ln] do
      im1:=[];
    for i in [1..n] do
      if mat1[ip][i]<> 0 then
        Add(im1,i);
      fi;
    od;
    bool:=Intersection(im,im1);
    if bool <> [] then im:=Union(im,im1); Add(ij,ip); fi;
    #if bool<>[] then Add(ij,ip); fi;
    od;
    B:=mat1{ij}{im};
    mat1{ij}{im}:=N{ij}{im};
    Add(I,[ij,im]);
    Add(res,B);
  fi;
od;
Print(" il y a ", Size(res), "blocs \n");
for k in [1..Size(res)] do
  Print(" ===== \n");
  def:=e-Minimum(List(I[k][2],x->Valuation(Degree(irr[x]),p)));
  Print("bloc de default : ",def,"\n");
  Print("il y a ", Size(I[k][1])," foncteurs simples dans ce bloc \n");
  Print("La matrice de decomposition : \n ");
  Display(Z(nomb)^0*res[k]);
  #Display(res[k]);
  Print(" La matrice de cartan du bloc : \n");
  calcul:=res[k]*TransposedMat(res[k]);
  #Display(Z(nomb)^0*calcul);
  Display(calcul);
  \Print(" Les diviseurs elementaires : \n");
  Print(ElementaryDivisorsMat(res[k]*TransposedMat(res[k])), "\n");
  Print("===== \n");
od;
return();end;
```

8.2 Un exemple.

On applique le programme précédent au groupe $X_{p^3} \rtimes C_4$ en caractéristique 2 pour différents nombres premiers. On retrouve les résultats de la section 4.6

```

StructureDescription(g);
"((C3 x C3) : C3) : C4" #p=3.
gap> cartancomu(g,2);
#####
la matrice de decomposition de l'algebre de Mackey cohomologique
du groupe ((C3 x C3) : C3): C4 est :
. . . . . 1 1 . . 1 1 . . .
. . . . . 1 . . 1 1 . . 1 . .
. . . . . . . . . . . 1 .
1 1 1 1 . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . 1
. . . . . . 1 . . 1 . .
. . . . . . . 1 1 . . .
1 1 . . . . . . . . . .
. . . . . . 1 1 . . 1 . .
. . . . . 1 . . 1 1 . . .
1 . . . . . . . . . . .
=====
la matrice de cartan est :
4 . . . . . 2 . . 3 .
. 4 . . . . 2 . . 3 . .
. . 1 . . . . . . . . .
. . . 4 . . . . 2 . . 1
. . . . . 1 . . . . . .
. 2 . . . . 2 . . 2 . .
2 . . . . . 2 . . 2 .
. . . 2 . . . . 2 . . 1
. 3 . . . . 2 . . 3 . .
3 . . . . . 2 . . 3 .
. . . 1 . . . . 1 . . 1
les diviseurs elementaires sont :
[ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2 ]
#####
=====
bloc de defaut : 2
il y a 3 foncteurs simples dans ce bloc
La matrice de decomposition :
  1 1 1 1
. . 1 1
. 1 1 1

```

8.2. Un exemple.

```
La matrice de cartan du bloc :
[ [ 4, 2, 3 ],
  [ 2, 2, 2 ],
  [ 3, 2, 3 ] ]
Les diviseurs elementaires :
[ 1, 1, 2 ]
=====
bloc de defaut : 2
il y a 3 foncteurs simples dans ce bloc
La matrice de decomposition :
  1 1 1 1
. . 1 1
. 1 1 1
La matrice de cartan du bloc :
[ [ 4, 2, 3 ],
  [ 2, 2, 2 ],
  [ 3, 2, 3 ] ]
Les diviseurs elementaires :
[ 1, 1, 2 ]
=====
bloc de defaut : 2
il y a 3 foncteurs simples dans ce bloc
La matrice de decomposition :
  1 1 1 1
  1 1 . .
  1 . . .
La matrice de cartan du bloc :
[ [ 4, 2, 1 ],
  [ 2, 2, 1 ],
  [ 1, 1, 1 ] ]
Les diviseurs elementaires :
[ 1, 1, 2 ]
=====
StructureDescription(g);
"((C5 x C5) : C5) : C4" # p=5
gap> cartancomu(g,2);
```

#####

la matrice de decomposition de l'algebre de Mackey cohomologique
du groupe ((C5 x C5) : C5) : C4 est :

```

. . . . . 1 1 . . . 1 . . . . . 1
. . . . . 1 . . 1 . . . . . 1 1 . . .
. . . . . 1 . . . . 1 . . . . 1 . . 1 . .
. . . . . 1 . . . . . 1 . 1 . . . . 1 .
. . . . . 1 . . . . . . . . . . . . .
. . . . . 1 . . . . . . . . . . . . .
. . . . . 1 . . . . . . . . . . . . .
1 1 1 1 . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . 1 . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . 1 . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . 1 . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . 1 . . . . 1 . . . . . . . . .
. . . . . . . . 1 . . 1 . . . . . . . .
. . . . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
. . . . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
. . . . . . . . 1 1 . . . . . . . . . .
1 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . 1 . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . 1 . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . 1 . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . 1 . . . . . . . . .
1 . . . . . . . . . . . . . . . . . .

```

=====
=====

la matrice de cartan est :

```

4 . . . . . . . . . . . 2 . 1 . . . . .
. 4 . . . . . . . . . . 2 . . . . . 1 .
. . 4 . . . . . . . . . 2 . . . . . 1 . .
. . . 4 . . . . . . . . 2 . . . 1 . . .
. . . . 1 . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . 1 . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . 1 . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . 4 . . . . . . 2 . . . . 1
. . . . . . . 1 . . . . . . . . . . .
. . . . . . . 1 . . . . . . . . . . .
. . . . . . . 1 . . . . . . . . . . .
. . 2 . . . . . . 2 . . . . . . 1 . .
. . 2 . . . . . . 2 . . . . . . . 1 .
. . . 2 . . . . . . . 2 . . . 1 . . .
2 . . . . . . . . . . . 2 . 1 . . . .
. . . . . 2 . . . . . . 2 . . . . 1
1 . . . . . . . . . . . 1 . 1 . . . .
. . . 1 . . . . . . . 1 . . . 1 . . .
. . 1 . . . . . . . 1 . . . . 1 . . .
. 1 . . . . . . . . 1 . . . . . 1 . .
. . . . . 1 . . . . . 1 . . . . 1

```

les diviseurs elementaires sont :

8.2. Un exemple.

```
[ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2 ]
```

```
=====
```

```
bloc de défaut : 2
```

```
il y a 3 foncteurs simples dans ce bloc
```

```
La matrice de decomposition :
```

```
  1 1 1 1
```

```
  1 1 . .
```

```
  . 1 . .
```

```
La matrice de cartan du bloc :
```

```
[ [ 4, 2, 1 ],
```

```
  [ 2, 2, 1 ],
```

```
  [ 1, 1, 1 ] ]
```

```
Les diviseurs elementaires :
```

```
[ 1, 1, 2 ]
```

```
=====
```

```
bloc de défaut : 2
```

```
il y a 3 foncteurs simples dans ce bloc
```

```
La matrice de decomposition :
```

```
  1 1 1 1
```

```
  1 1 . .
```

```
  . 1 . .
```

```
La matrice de cartan du bloc :
```

```
[ [ 4, 2, 1 ],
```

```
  [ 2, 2, 1 ],
```

```
  [ 1, 1, 1 ] ]
```

```
Les diviseurs elementaires :
```

```
[ 1, 1, 2 ]
```

```
=====
```

```
bloc de défaut : 2
```

```
il y a 3 foncteurs simples dans ce bloc
```

```
La matrice de decomposition :
```

```
  1 1 1 1
```

```
  1 1 . .
```

```
  . 1 . .
```

```
La matrice de cartan du bloc :
```

```
[ [ 4, 2, 1 ],
```

```
  [ 2, 2, 1 ],
```

```
  [ 1, 1, 1 ] ]
```

```
Les diviseurs elementaraires :
```

```
[ 1, 1, 2 ]
```

```
=====
```

```
bloc de défaut : 2
```

```
il y a 3 foncteurs simples dans ce bloc
```

```
La matrice de decomposition :
```

```
  1 1 1 1
```

```
  1 1 . .
```

```
  . 1 . .
```

```
La matrice de cartan du bloc :
```

```
[ [ 4, 2, 1 ],
```

```
[ 2, 2, 1 ],
[ 1, 1, 1 ] ]
Les diviseurs elementaires :
[ 1, 1, 2 ]
=====
bloc de defaut : 2
il y a 3 foncteurs simples dans ce bloc
La matrice de decomposition :
  1 1 1 1
  1 1 . .
  1 . . .
La matrice de cartan du bloc :
[ [ 4, 2, 1 ],
  [ 2, 2, 1 ],
  [ 1, 1, 1 ] ]
Les diviseurs elementaires :
[ 1, 1, 2 ]
=====
```

8.2. Un exemple.

```

StructureDescription(g);
"((C7 x C7) : C7) : C4" # p=7.
gap> cartancomu(g,2);
=====
la matrice de cartan est :
 4 . . . . . 2 . . . . . 3 .
. 4 . . . . . 2 . . . . . 3 .
. . 1 . . . . . . . . . . .
. . . 1 . . . . . . . . . .
. . . . 1 . . . . . . . . .
. . . . . 4 . . . . . 2 . . 3 .
. . . . . 1 . . . . . . . . .
. . . . . 1 . . . . . . . . .
. . . . . 1 . . . . . . . . .
. . . . . 1 . . . . . . . . .
. . . . . 4 . . . . . 2 . . . 3 .
. . . . . 1 . . . . . . . . .
. . . . . 4 . . . . . 2 . . . 3 .
. . . . . 1 . . . . . . . . .
. . . . . 1 . . . . . . . . .
. . . . . 4 . . . . . 2 . . . 3 .
. . . . . 1 . . . . . . . . .
. . . . . 4 . . . . . 2 . . . 3 .
. . . . . 2 . . . . . 2 . . . 2 . 1
. 2 . . . . . 2 . . . . . 2 . . 2 .
. . . . 2 . . . . . 2 . . . 2 .
. . . . . 2 . . . . . 2 . . . 2 .
. . . . . 2 . . . . . 2 . . . 2 .
2 . . . . . 2 . . . . . 2 . . . 2 .
. . . . . 2 . . . . . 2 . . . 1
. . . . 3 . . . . . 2 . . . 3 .
. . . . . 3 . . . . . 2 . . . 3 .
. . . . . 3 . . . . . 2 . . . 3 .
. 3 . . . . . 2 . . . . . 3 .
3 . . . . . 2 . . . . . 2 . . 3 .
. . . . . 1 . . . . . 1 . . . 1
les diviseurs elementaires sont :
[ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
  1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 ]
=====
bloc de defaut : 2
il y a 3 foncteurs simples dans ce bloc
La matrice de decomposition :
 1 1 1 1
. . 1 1
. 1 1 1
La matrice de cartan du bloc :

```

```

[ [ 4, 2, 3 ],
  [ 2, 2, 2 ],
  [ 3, 2, 3 ] ]
Les diviseurs elementaires :
[ 1, 1, 2 ]
=====
bloc de default : 2
il y a 3 foncteurs simples dans ce bloc
La matrice de decomposition :
  1 1 1 1
  . . 1 1
  . 1 1 1
La matrice de cartan du bloc :
[ [ 4, 2, 3 ],
  [ 2, 2, 2 ],
  [ 3, 2, 3 ] ]
Les diviseurs elementaires :
[ 1, 1, 2 ]
=====
bloc de default : 2
il y a 3 foncteurs simples dans ce bloc
La matrice de decomposition :
  1 1 1 1
  . . 1 1
  . 1 1 1
La matrice de cartan du bloc :
[ [ 4, 2, 3 ],
  [ 2, 2, 2 ],
  [ 3, 2, 3 ] ]
Les diviseurs elementaires :
[ 1, 1, 2 ]
=====
bloc de default : 2
il y a 3 foncteurs simples dans ce bloc
La matrice de decomposition :
  1 1 1 1
  . . 1 1
  . 1 1 1
La matrice de cartan du bloc :
[ [ 4, 2, 3 ],
  [ 2, 2, 2 ],
  [ 3, 2, 3 ] ]
Les diviseurs elementaires :
[ 1, 1, 2 ]
=====
bloc de default : 2
il y a 3 foncteurs simples dans ce bloc

```

8.2. Un exemple.

La matrice de decomposition :

```
1 1 1 1
. . 1 1
. 1 1 1
```

La matrice de cartan du bloc :

```
[ [ 4, 2, 3 ],
  [ 2, 2, 2 ],
  [ 3, 2, 3 ] ]
```

Les diviseurs elementaires :

```
[ 1, 1, 2 ]
```

=====

bloc de defaut : 2

il y a 3 foncteurs simples dans ce bloc

La matrice de decomposition :

```
1 1 1 1
. . 1 1
. 1 1 1
```

La matrice de cartan du bloc :

```
[ [ 4, 2, 3 ],
  [ 2, 2, 2 ],
  [ 3, 2, 3 ] ]
```

Les diviseurs elementaires :

```
[ 1, 1, 2 ]
```

=====

bloc de defaut : 2

il y a 3 foncteurs simples dans ce bloc

La matrice de decomposition :

```
1 1 1 1
1 1 . .
1 . . .
```

La matrice de cartan du bloc :

```
[ [ 4, 2, 1 ],
  [ 2, 2, 1 ],
  [ 1, 1, 1 ] ]
```

Les diviseurs elementaires :

```
[ 1, 1, 2 ]
```


Bibliographie

- [1] M. Artin, A. Grothendieck, and J. Verdier. *SGA 1963-1964. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, volume 1. Springer, 1972.
- [2] J. Bénabou. *Introduction to bicategories.*, volume 47 of *Lecture Notes in Mathematics*, chapter pages 1-77. Springer Berlin / Heidelberg, 1967.
- [3] D. Benson. *Representations and cohomology : Basic representation theory of finite groups and associative algebras*, volume I. Cambridge university press, 1995.
- [4] S. Bouc. Construction de foncteurs entre catégories de G -ensembles. *J. Algebra*, 183 :737–825, 1996.
- [5] S. Bouc. Foncteurs d'ensembles munis d'une double action. *J. Algebra*, 183(3) :664–736, 1996.
- [6] S. Bouc. *Green Functors and G -sets*, volume 1671 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1997.
- [7] S. Bouc. Résolutions de foncteurs de Mackey. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 63, *Amer. Math. Soc.*, pages 31–83, 1998.
- [8] S. Bouc. The p -blocks of the Mackey algebra. *Algebras and Representation Theory*, 6 :515–543, 2003.
- [9] S. Bouc. On the Cartan matrix of Mackey algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(8) :4383–4399, 2013.
- [10] M. Broué. On Scott modules and p -permutation modules : an approach through the Brauer morphism. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 93(3) :401–408, March 1985.
- [11] M. Broué. Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées. *Astérisque*, (181-182) :61–92, 1990.
- [12] S. B. Conlon. Decompositions induced from the Burnside algebra. *J. Algebra*, 10 :102–122, 1968.
- [13] A. Dress. *Contributions to the theory of induced representations*, volume 342 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Berlin / Heidelberg, 1973.

- [14] J. A. Green. Axiomatic representation theory for finite groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1(1) :41–77, 1971.
- [15] J. A. Green. Walking around the Brauer tree. *J. Austral. Math. Soc.*, 17 :197–213, 1974.
- [16] M. E. Harris and M. Linckelmann. Splendid derived equivalences for blocks of finite p -solvable groups. *J. London Math. Soc. (2)*, 62(1) :85–96, 2000.
- [17] S. König and A. Zimmermann. *Derived Equivalences for Group Rings*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1998.
- [18] B. Külshammer. Nilpotent blocks revisited. In *Groups, rings and group rings*, volume 248 of *Lect. Notes Pure Appl. Math.*, pages 263–274. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.
- [19] L. G. Lewis. *Algebraic Topology and Transformation Groups*, volume 1361 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Berlin / Heidelberg, 1988.
- [20] M. Linckelmann. *Seminaire sur les groupes finis*, volume IV. Publications Mathématiques de l’Université Paris 7., 1990.
- [21] H. Lindner. A remark on Mackey-functors. *Manuscripta Math.*, 18(3) :273–278, 1976.
- [22] N. Mazza. *Modules d’endo-permutation*. PhD thesis, Faculté des Sciences de l’université de Lausanne, 2003.
- [23] M. Nicollerat. *Foncteurs de Mackey Projectifs*. PhD thesis, E.P.F.L., 2008.
- [24] L. Puig. Nilpotent blocks and their source algebras. *Invent. Math.*, 93(1) :77–116, 1988.
- [25] C. W. C. I. Reiner. *Methods of Representation Theory With Applications to Finite Groups and Order*, volume II. Wiley-Interscience, 1987.
- [26] I. Reiner. *Maximal Orders*. London Mathematical Society., 2003.
- [27] J. Rickard. Derived categories and stable equivalence. *J. Pure Appl. Algebra*, 61(3) :303–317, 1989.
- [28] J. Rickard. Morita theory for derived categories. *J. London Math. Soc.*, 39 :436–456, 1989.
- [29] J. Rickard. Derived equivalences as derived functors. *J. London Math. Soc. (2)*, 43(1) :37–48, 1991.
- [30] J. Rickard. Splendid equivalences : Derived categories and permutation modules. *Proc. London Math. Soc.*, pages 331–358, 1996.

- [31] K. W. Roggenkamp. Blocks of cyclic defect and Green orders. *Comm. Algebra*, 20(6) :1715–1734, 1992.
- [32] N. Romero. Simple modules over Green biset functors. *J. Algebra*, 367 :203–221, 2012.
- [33] N. Romero. On fibred biset functors with fibres of order prime and four. *J. Algebra*, 387 :185–194, 2013.
- [34] H. Sasaki. Green correspondence and transfer theorems of Wielandt type for G -functors. *J. Algebra*, 79 :98–120, 1982.
- [35] J.-P. Serre. *Corps locaux*. Hermann, 1968.
- [36] J. Thévenaz. A characterization of cyclic groups. *Archiv der Mathematik*, 52(3) :209–211, 1989.
- [37] J. Thévenaz. Endo-permutation modules, a guided tour. In J. Thévenaz, D. M. Testerman, and M. Geck, editors, *Group representation theory*, pages 115–147. EPFL Press, 2007.
- [38] J. Thévenaz and P. Webb. The structure of Mackey functors. *Transactions of the American Mathematical Society*, 347(6) :1865–1961, 1995.
- [39] J. Thévenaz and P. J. Webb. Simple Mackey functors. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, (1990) :299–319, 1990.
- [40] J. Thévenaz and P. J. Webb. Simple Mackey functors. In *Proceedings of the Second International Group Theory Conference (Bressanone, 1989)*, 1990.
- [41] E. Yaraneri. Socles and radicals of Mackey functors. *J. Algebra*, 321(10) :2970–3025, 2009.
- [42] N. Yoneda. On Ext and exact sequences. *J. Fac. Sci. Univ Tokyo*, 7 :193–227., 1954.
- [43] A. Zimmermann. Representation Theory : A Homological Algebra Point of View. à paraître.