Der Satz von Desargues

Gerhard-Swen Weinhold-Markus

Einführungslemma

Eine Streckung δ_A fixiert alle Geraden durch ihren Fixpunkt A.

Lemma:

i) Eine Streckung mit einer festen Geraden, und einem nicht auf der Geraden liegenden Punkt, ist die Identität.

ii) Die Hintereinanderschaltung von zwei Streckungen $\delta_{B,b}\delta_{A,a}$ mit $A \neq B$ und $ab \neq 1$ ist wieder eine Streckung mit Zentrum auf der Geraden $\overleftrightarrow{AB}$.

iii) Wenn $\delta_{R,r}\delta_{Q,q}\delta_{P,p} = id$ und einer der Faktoren r, q oder $p \neq 1$, dann sind die Punkte R, Q, P kollinear .

iv) Wenn sich zwei Geraden $\overleftrightarrow{AB}$ und $\overleftrightarrow{PQ}$ im Punkt L schneiden, dann gilt $\delta_{A,a}(P) = \delta_{B,b}(Q) \Longrightarrow \delta_{B,b}^{-1}\delta_{A,a} = \delta_{L,a/b}$.

Beweis:

i) Folgt aus den Eigenschaften einer Streckung.

ii) $\overleftrightarrow{AB}$ ist eine Fixgerade. Aus $ab \neq 1 \Longrightarrow \delta_{B,b}\delta_{A,a} \neq id$, wegen (i) folgt, dass der Fixpunkt auf $\overleftrightarrow{AB}$ liegt.

iii) Gilt $\delta_{R,r}\delta_{Q,q}\delta_{P,p} = id$, dann folgt $\delta_{Q,q}\delta_{P,p} = \delta_{R,r}^{-1}$. Wenn $r = 1$ so folgt wegen (ii) $p = q = 1$. Betrachte also $r \neq 1$: Aus (ii) folgt, dass R auf $\overleftrightarrow{QP}$ liegt.

iv) Sei $\delta_{A,a}(P) = \delta_{B,b}(Q) = V$ und $\delta = \delta_{B,b}^{-1}\delta_{A,a}$.
Dann gilt $a \neq b$, weil ansonsten die Streckenverhältnisse $\underline{AV}/\underline{AP}$ zu $\underline{BV}/\underline{BQ}$ gleich sind und dann nach dem Strahlensatz $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{PQ}$.
Es folgt $a/b \neq 1$ und wegen (ii) liegt dann das Streckzentrum von δ, auf $\overleftrightarrow{AB}$ und wegen der Definition einer Streckung auf $\overleftrightarrow{PQ}$. $\square$

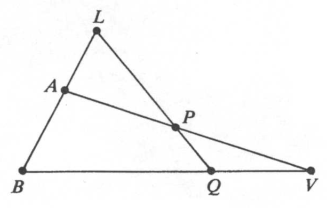

Abbildung 1

Vorbemerkungen:
Man bezeichnet zwei Dreiecke $\triangle$ und $\triangle^{'}$ als *kopolar*, wenn eine Nummerierung der Eckpunkte A, B, C und A', B', C' existiert, so dass sich die Geraden durch die zugehörigen Ecken, also $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}$ *und* $\overleftrightarrow{CC'}$, in einem Punkt schneiden.

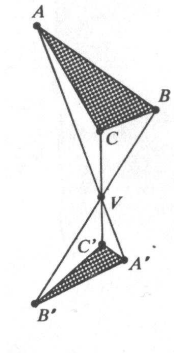

Abbildung 1: Kopolare Dreiecke

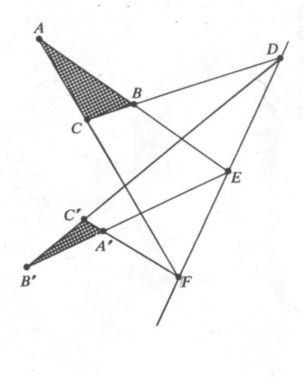

Abbildung 2: Koaxiale Dreiecke

Man bezeichnet zwei Dreiecke $\triangle$ und $\triangle^{'}$ als *koaxial*, wenn eine Nummerierung der Eckpunkte A, B, C und A', B', C' existiert, so dass sich die Geraden durch die zugehörigen Seiten in drei kollinearen Punkten schneiden. Also $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{E\}, \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{F\}, \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{D\}$ und D, E und F sind kollinear.

Theorem 1:
Gegeben sind zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ und die Punkte D, E, F und V, so dass $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{D\}$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{E\}$, $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{F\}$ und $\overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'} = \{V\}$.
Dann gilt:
Die Geraden $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ und $\overleftrightarrow{CC'}$ schneiden sich genau dann in V, wenn D, E und F kollinear sind.
Oder: die beiden Dreiecke sind genau dann kopolar, wenn sie auch koaxial sind.

Beweis :
„ $\Longrightarrow$ “
Wir nehmen an, die Geraden $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ und $\overleftrightarrow{CC'}$ schneiden sich in V. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass $\delta_{A,a}(A') = \delta_{B,b}(B') = \delta_{C,c}(C') = V$ gilt.
Vermöge Einführungslemma (iv) gilt $\delta_{B,b}^{-1}\delta_{A,a} = \delta_{F,a/b}$, $\delta_{C,c}^{-1}\delta_{B,b} = \delta_{D,b/c}$ und $\delta_{A,a}^{-1}\delta_{C,c} = \delta_{E,c/a}$.
Daraus folgt $\delta_{E,c/a}\delta_{D,b/c}\delta_{F,a/b} = \delta_{A,a}^{-1}\delta_{C,c}\delta_{C,c}^{-1}\delta_{B,b}\delta_{B,b}^{-1}\delta_{A,a} = id$ und, da nach Voraussetzung $a \neq 1$, sind wegen Einführungslemma (iii) die Punkte D, E und F kollinear.
„ $\Longleftarrow$ “
Seien D, E und F kollinear. Dann sind die Dreiecke $\triangle AEA'$ und $\triangle BDB'$ kopolar mit F als Schnittpunkt, weil sich die Geraden $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{ED}$ und $\overleftrightarrow{A'B'}$ in F schneiden. Also sind die beiden Dreiecke aufgrund der Hinrichtung koaxial. Dement-

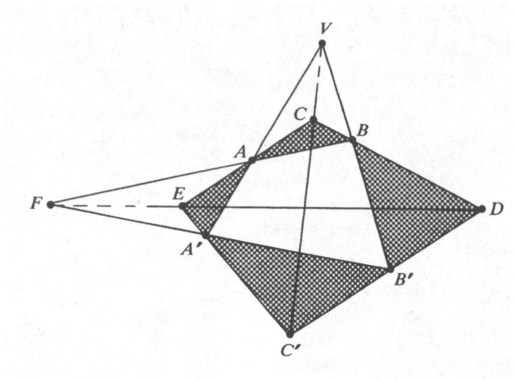

Abbildung 3

sprechend müssen die Punkte C', V und C kollinear sein, d.h. V liegt auf der Geraden $\overleftrightarrow{CC'}$.
Das heisst, die Geraden $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ und $\overleftrightarrow{CC'}$ schneiden sich in V. □

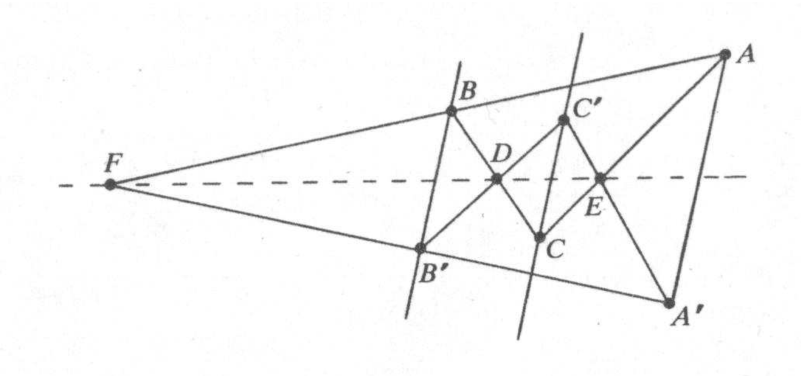

Abbildung 4

Theorem 2:
Gegeben sind dieselben Punkte und Dreiecke wie in Theorem 1, die Geraden $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ und $\overleftrightarrow{CC'}$ seien hier jedoch parallel.
Behauptung:
Die Schnittpunkte der zugehörigen Dreiecksseiten D, E und F sind auch hier kollinear.

Beweis:
Für den Beweis braucht man drei Streckungen.
Da A, B und F kollinear sind, sei f so gewählt, dass $\delta_{F,f}(A) = B$ ist. Wegen des Strahlensatzes gilt $\delta_{F,f}(A') = B'$. Die Punkte B, C und D sind auch kollinear. Sei d so gewählt, dass $\delta_{D,d}(B) = C$ ist, und $\delta_{D,d}(B') = C'$. Die Punkte A, C und E sind ebenfalls kollinear, woraus mit entsprechend gewähltem e folgt, dass $\delta_{E,e}(C) = A$ und $\delta_{E,e}(C') = A'$.
Die Streckung $\delta_{E,e}\delta_{D,d}\delta_{F,f}$ fixiert sowohl A wie auch A'. Das heisst, die Hintereinanderschaltung der drei Streckungen ist, nach Einführungslemma (i), die Iden-

tität. Somit sind aufgrund des Einführungslemmas D, E und F kollinear und damit ist die Behauptung gezeigt. □

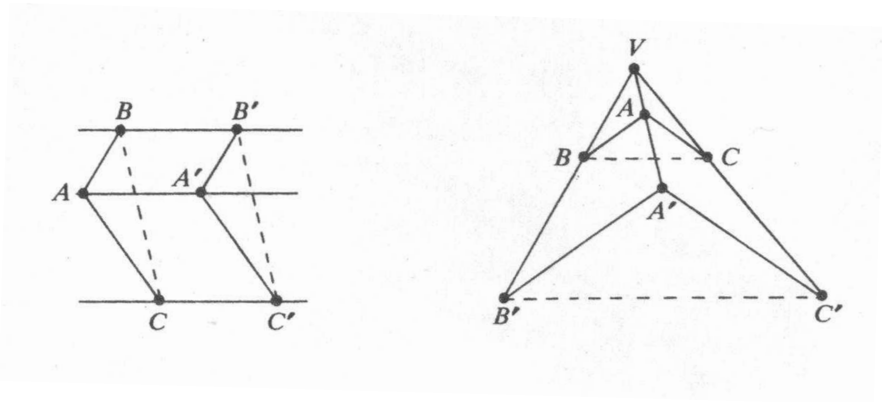

Abbildung 5

Theorem 3:
Wenn die Geraden $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ und $\overleftrightarrow{CC'}$ sich entweder schneiden oder parallel zueinander sind und $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{A'B'}$ und $\overleftrightarrow{AC} \| \overleftrightarrow{A'C'}$, dann gilt auch $\overleftrightarrow{BC} \| \overleftrightarrow{B'C'}$.