Der Satz von Pappus

Christoph Panhorst

15. Januar 2001

Pappus von Alexandria (ca. 320 n. Chr.) war der einzige wichtige Vorgänger von Descartes und Desargues (ca. 1650) auf dem Gebiet mathematischer Geometrie.

Satz 1 (von Pappus) *Drei Paare gegenüberliegender Seiten eines Sechsecks, dessen Ecken abwechselnd auf zwei Geraden liegen, schneiden sich auf einer Geraden.*

Vorbemerkung:

Eine zentrische Streckung mit Streckfaktor a und Streckzentrum A wird mit $\delta_{A,a}$ bezeichnet. Eine Translation, die A auf C verschiebt, wird mit $\tau_{A,C}$ bezeichnet. Es gilt:

1. $\delta_{B,r}\delta_{A,\frac{1}{r}} = \tau_{A,C}$ für ein gewisses C.

2. $\delta_{B,s}\delta A, r = \delta_{C,rs}$ für $rs \neq 1$ und ein gewisses C.

Lemma 1

1. *Eine Streckung oder Verschiebung mit einem Fixpunkt und einer Fixgerade, so dass der Fixpunkt nicht auf der Fixgeraden liegt, ist die Identität.*

2. *Falls $A \neq B$ und $a \cdot b \neq 1$, dann ist $\delta_{B,b}\delta_{A,a}$ eine Streckung mit Zentrum auf $\overleftrightarrow{AB}$.*

3. *Wenn $\delta_{R,r}\delta_{Q,q}\delta_{P,p} = id$ und r, p oder $q \neq 1$, dann sind P, Q und R kollinear.*

4. *Schneiden sich $\overleftrightarrow{AB}$ und $\overleftrightarrow{PQ}$ in L, so gilt:*

$$\delta_{A,a}(P) = \delta_{B,b}(Q) \text{ impliziert } \delta_{B,b}^{-1}\delta_{A,a} = \delta_{L,\frac{a}{b}}.$$

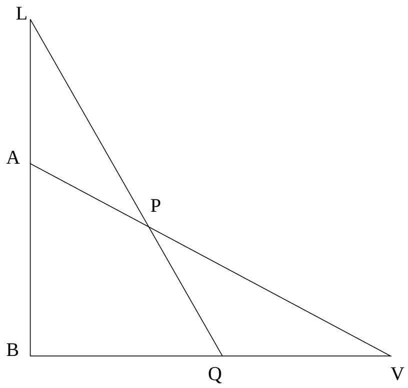
Beweis:

1. Eine Streckung oder Verschiebung mit einem Fixpunkt ist eine Streckung. Da bei einer Streckung alle Geraden durch den Fixpunkt (das Streckzentrum) Fixgeraden sind, und da der Schnittpunkt zweier Fixgeraden ein Fixpunkt ist, wird durch die beschriebene Streckung mehr als ein Punkt fixiert. Also handelt es sich um die Identität.

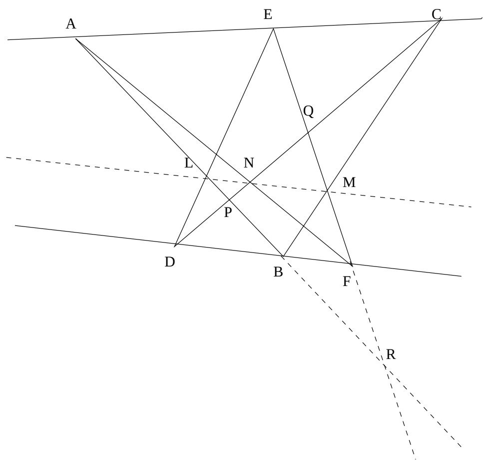
2. Für $a \cdot b \neq 1$ ist die Hintereinanderschaltung $\delta_{B,b}\delta_{A,a}$ eine nichtidentische Streckung mit Fixgerade $\overleftrightarrow{AB}$. Das Streckzentrum muss auf $\overleftrightarrow{AB}$ liegen, da sich sonst ein Widerspruch zu (1) ergibt.

3. Ist $\delta_{R,r}\delta_{Q,q}\delta_{P,p} = id$, so folgt $\delta_{Q,q}\delta_{P,p} = \delta_{R,r}^{-1}$, und mit $P \neq Q$ folgt aus $r = 1$, dass $p = q = 1$ gilt bzw. aus $r \neq 1$, dass R auf der Fixgerade $\overleftrightarrow{PQ}$ liegt (nach (2)).

4. Sei $\delta_{A,a}(P) = \delta_{B,b}(Q) = V$ und $\delta = \delta_{B,b}^{-1}\delta_{A,a}$. (Es gilt $a \neq b$ nach Strahlensatz, da sonst $\overline{AV}/\overline{AP} = \overline{BV}/\overline{BQ}$ und damit $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$). Das Zentrum von δ liegt nach (2) auf $\overleftrightarrow{AB}$ und auf $\overleftrightarrow{PQ}$ (da P auf Q abgebildet wird). Also ist L fest und damit neues Streckzentrum.■



Satz 2 (von Pappus (euklidische Formulierung)) *Seien A, B, C, D, E, F sechs Punkte, so dass A, C, E und B, D, F jeweils auf einer Geraden liegen.*
$\overleftrightarrow{AB}$ und $\overleftrightarrow{DE}$ schneiden sich in L.
$\overleftrightarrow{BC}$ und $\overleftrightarrow{EF}$ schneiden sich in M.
$\overleftrightarrow{CD}$ und $\overleftrightarrow{FA}$ schneiden sich in N.
$\overleftrightarrow{AB}$ und $\overleftrightarrow{CD}$ schneiden sich in P.
$\overleftrightarrow{CD}$ und $\overleftrightarrow{EF}$ schneiden sich in Q.
$\overleftrightarrow{AB}$ und $\overleftrightarrow{EF}$ schneiden sich in R.
Dann liegen L, M, N auf einer Geraden.



Beweis:

Seien

$$\begin{aligned}\delta_{E,e}(R) = \delta_{D,d}(P) = Q,\\ \delta_{C,c}(Q) = \delta_{B,b}(R) = P,\\ \delta_{A,a}(P) = \delta_{F,f}(Q) = R.\end{aligned}$$

Dann gilt (vgl. Lemma 1 (4)):

$$\begin{aligned}\delta_{E,e}^{-1}\delta_{D,d} = \delta_{L,\frac{d}{e}} \text{ mit } \delta_{L,\frac{d}{e}}(P) = R,\\ \delta_{C,c}^{-1}\delta_{B,b} = \delta_{M,\frac{b}{c}} \text{ mit } \delta_{M,\frac{b}{c}}(R) = Q \text{ und}\\ \delta_{A,a}^{-1}\delta_{F,f} = \delta_{N,\frac{f}{a}} \text{ mit } \delta_{N,\frac{f}{a}}(Q) = P.\end{aligned}$$

Damit gilt: $\delta_{L,\frac{d}{e}}\delta_{M,\frac{b}{c}}\delta_{N,\frac{f}{a}}$ ist Streckung mit Zentrum P und Streckfaktor $r = \frac{fbd}{ace}$. Außerdem gilt nach Lemma 1 (1)

$$\delta_{C,c}\delta_{E,e}\delta_{A,a} = id\ (P \longrightarrow P,\ \overleftrightarrow{AC} \longrightarrow \overleftrightarrow{AC},\ P \notin \overleftrightarrow{AC}) \text{ und}$$
$$\delta_{D,d}\delta_{B,b}\delta_{F,f} = id.$$

Damit folgt

$$cea = dbf = 1,$$

und somit

$$\delta_{N,\frac{f}{a}}\delta_{M,\frac{b}{c}}\delta_{L,\frac{d}{e}} = \delta_{P,\frac{fbd}{ace}} = id,$$

so dass L, M, N nach Lemma 1 (2) kollinear sind. ■

Der Satz gilt immer noch, wenn man auf P, Q, R verzichtet, da sich in der projektiven Geometrie parallele Geraden im Unendlichen schneiden.

Quellen:

George Martin: Transformation Geometry