Proseminar: Symmetrie- und Spiegelungsgruppen

Platonische Körper

Ulrike Kuhlmann

1 Einleitung

1.1 Vollkommene Körper

Der vollkommenste geometrische Körper ist zweifellos die Kugel. Sie spielt in den Bauplänen unserer Natur eine überragende Rolle. Ob wir nun an die Form von Planeten denken, an die kugelförmige Tropfenform von Flüssigkeiten oder an viele andere Phänomene: die Kugel beherrscht das Design. Da alle Naturgesetze in irgendeiner Form Extremalgesetze sind, nimmt ein Planet oder Wassertropfen notwendig die Form an, bei der die Oberflächenspannung zu einem Minimum wird. Diese Form ist aber die Kugelform.
Außerdem handelt es sich bei der Kugel um einen Körper mit enormer Symmetrie. Es gibt unendlich viele Dreh- und Spiegelachsen.
Nun könnte man sich natürlich fragen, ob es noch andere geometrische Körper gibt, die von so einfacher Bauart sind, aber trotzdem in so hohem Maße symmterisch und vollkommen.
Neben der Kugel besitzen auch die fünf Platonischen Körper eine ähnlich ausgezeichnete Natur. Diese sind zwar nicht mehr rund, aber trotzdem von einer beeindruckend einfachen Struktur. Die Oberfläche jedes dieser Körper besteht nämlich aus *einer* Art von Vielecken.

2 Eulers Polyederformel

Definition 1 (Polyeder) *Ein Polyeder ist im 3-dimensionalen Raum ein Körper, der durch ebene Vielecke begrenzt wird.*

Definition 2 (konvexer Polyeder) *Ein Polyeder heisst konvex, wenn für jede Seitenfläche S des Polyeders gilt: Lege ich eine Ebene durch S, dann liegen alle Eckpunkte des Polyeders, die nicht zu S gehören, auf einer Seite der Ebene.*

Satz 1 (Eulers Formel) *Wenn ein konvexer Polyeder e Ecken, k Kanten und f Seitenflächen enthält, dann gilt:*

$$e - k + f = 2$$

Beweis: Ich führe den Beweis von Eulers Polyederformel auf den Satz von Euler über Netze zurück, das entspricht der 2-dimensionalen Fassung, die sich nur unwesentlich von der 3-dimensionalen unterscheidet. Später werde ich begründen, warum dieser Beweis hinreichend ist.
Der Satz stellt eine zeitlose Beziehung zwischen den drei Eigenschaften dar, die jedes Netz in der Ebene besitzt. Es gilt:

$$e - k + f = 1$$

wobei e die Anzahl der Ecken (Punkte), k die Anzahl der Kanten (Linien) und f die Anzahl der eingeschlossenen Flächen im Netz darstellen.
Zum Beweis dieses Satzes betrachten wir zunächst das denkbar einfachste Netz. Nämlich das Netz, das nur aus einer einzigen Ecke (einem Punkt) besteht. Für dieses Netz gilt die Formel ganz offensichtlich, denn:

$$e - k + f = 1 - 0 + 0 = 1$$

Nun überlegen wir uns was passiert, wenn man dieses Netz erweitert. Für jede Erweiterung der einen Ecke ist eine Kante nötig. Sie kann entweder die vorhandene Ecke mit sich selbst oder mit einer neuen Ecke verbinden.
Untersuchen wir zunächst den ersten Fall: Die Ecke wird durch eine neue Kante mit sich selbst verknüpft. Man sieht leicht, dass durch das Hinzufügen einer derartigen Kante auch eine neue Fläche entsteht. Damit bleibt die Netzformel aber gewahrt, denn die neue Fläche ($+1$) wird durch die neue Kante (-1) ausgeglichen. Kommen weitere Kanten dieser Art hinzu, bleibt der Satz gültig, da mit jeder neuen Kante auch eine neue Fläche entsteht.
Gehen wir nun dazu über die ursprüngliche Ecke durch eine Kante mit einer neuen Ecke zu verbinden.Wieder bleibt Eulers Satz gültig, weil eine neue Ecke ($+1$) die neue Kante (-1) ausgleicht. Kommen auf diese Weise neue Kanten hinzu, bleibt der Satz gültig, weil

jede neue Kante mit einer neuen Ecke verbunden wird.
Damit ist der Satz bewiesen.
Nun ist nur noch zu zeigen, dass sich dieses Ergebnis leicht auf den dreidimensionalen Fall übertragen lässt, um somit auch Eulers Polyederformel zu erschlagen.
Dazu müssen wir einen kleinen Ausflug zur Stereographischen Projektion wagen:
Wir betrachten die Kugel mit "Nordpol" N und ihre Oberfläche, die 2-Sphäre

$$\mathbb{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = 1\}$$

und definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \backslash N \\ P &\longrightarrow \sigma(P) = \overline{PN} \cap \mathbb{S}^2 \end{aligned}$$

In Koordinatenschreibweise:

$$(x, y) \longrightarrow (\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2})$$

Diese Abbildung ist bijektiv. Es gilt: Wenn $\varphi = (e, k)$ Graph auf $\mathbb{S}^2 \backslash N$, dann ist $\sigma^{-1}(\varphi)$ ebener Graph. Unter σ wird also der "Oberflächengraph" der Kugel in die Ebene projeziert (vgl. Atlas: Erdkugel wird mit Längen- und Breitengeraden aufs Papier projeziert). Ausgehend davon, können wir nun leicht von der zweidimensionalen Fassung des Satzes auf die dreidimensionale Fassung schliessen, denn: jeder platonische Körper besitzt eine Umkugel, auf der alle Ecken liegen (siehe auch später in 3.2). Es existiert eine Abbildung, die die "Kantenpunkte" auf die Kugel projeziert. Nun können wir die stereographische Projektion anwenden. Sie liefert uns ein Netz und Euler sagt $e - k + f = 1$. Wollen wir nun das Netz wieder in den Körper überführen, so müssen wir noch eine Fläche hinzuzählen, denn alle Kantenpunkte um N werden unter σ auf Punkte außerhalb des Netzes abgebildet, sie bilden die Fläche um das Netz. Beim "Hochstülpen" entsteht dadurch eine neue Fläche die N enthält und wir erhalten $e - k + f = 2$. $\square$

2.1 Theatetus' Theorem

Theatetus lebte von 419 bis 369 vor Christus. Ihm haben wir das abstrakte Konzept der regulären Körper zu verdanken und eigentlich hätte man die fünf konvexen, regulären Körper nach ihm, und nicht nach seinem Schüler Plato benennen sollen, denn ihm ist es gelungen zu beweisen, dass es derer nur fünf gibt.
Sein Theorem umfasst die folgenden beiden Sätze. Der erste Satz besagt, dass es eben nur fünf reguläre Polyeder gibt, während der zweite Satz darauf eingeht, in welchem Zusammenhang die Symmetriegruppen der fünf Körper stehen.

Definition 3 (regulärer Polyeder I) *Ein Polyeder heisst regulär, wenn alle seine Oberflächen aus demselben regelmäßigen Vieleck (p-Eck) bestehen und in jeder Ecke gleich viele (q) dieser Vielecke zusammenstoßen.*

Satz 2 *Es gibt genau fünf reguläre Polyeder.*

Beweis: Sei p die Anzahl der Ecken des Vielecks, sei q die Anzahl der Vielecke, die in einer Ecke des Polyeders zusammentreffen. Es muss gelten $p > 2$, denn sonst handelt es sich nicht um ein "normales" Vieleck. Es muss gelten $q > 2$, denn in jeder Ecke des Polyeders müssen mindestens drei Vielecke zusammenstoßen um eine räumliche Ecke zu bilden. (Da der reguläre Polyeder konvex ist, muß die gesamte Winkelsumme aller p-Ecke, die in jeder Körperecke zusammenstoßen, stets echt kleiner als 360° sein)
Sei also nun $p > 2$ und $q > 2$. Wir nehmen an, uns liegt ein regulärer Polyeder mit v Ecken, e Kanten und f Seitenflächen vor. Da eine Kante immer von zwei Flächen erzeugt wird und jede Kante durch zwei Ecken begrenzt ist, muss gelten: $qe = 2k = pf$ und nach Eulers Formel folgt dann:

$$\begin{aligned}2 &= e - k + f = e - \frac{qe}{2} + \frac{qe}{p}\\ &= [2p + 2q - pq]\frac{e}{2p}\\ &= [4 - (p-2)(q-2)]\frac{e}{2p}\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$e = \frac{4p}{2p + 2q - pq}, \quad k = \frac{qe}{2}, \quad f = \frac{qe}{p} \quad \text{und} \quad (p-2)(q-2) < 4$$

Nun wissen wir also, dass e, k und f durch p und q eindeutig festgelegt sind. Damit folgt, dass p und q höchstens einen regulären Körper definieren können. Da aber nun p und q natürliche Zahlen größer als zwei sind, können wir die Ungleichung leicht auflösen und erhalten damit 5 mögliche Kombinationen von p und q, die jeweils einen regulären Körper definieren.

Platonischer Körper	p	q	e	k	f
Reguläres Tetraeder	3	3	4	6	4
Reguläres Oktaeder	3	4	6	12	8
Reguläres Ikosaeder	3	5	12	30	20
Würfel	4	3	8	12	6
Reguläres Dodekaeder	5	3	20	30	12

Nun müssen wir uns "nur noch" darüber Gedanken machen, ob es auch wirklich Polyeder gibt, die die von p und q definierten Bedingungen erfüllen. Wir könnten uns zum Beispiel die Frage stellen, ob 12 Fünfecke wirklich zusammengesetzt einen regulären Dodekaeder bilden, oder ob da vielleicht ein kleiner Fehler auftritt, der im Bild nicht erkennbar ist.

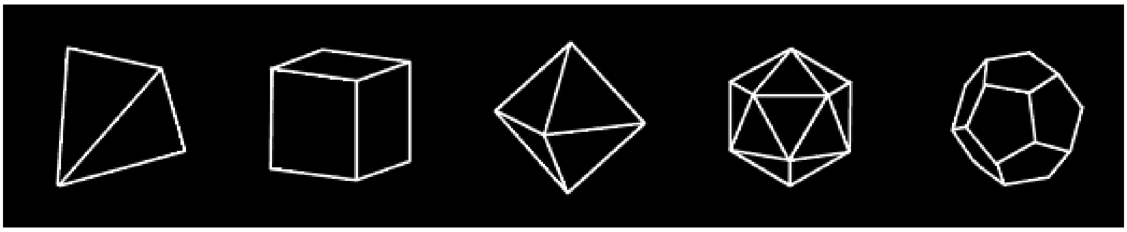

Abbildung 1: Die fünf Platonischen Körper

Genauso könnten wir uns das natürlich auch bei allen anderen regulären Polyedern fragen. Der einfachste Weg dieses Problem zu lösen besteht darin, einen geometrischen Ansatz zu wählen:
Wir betrachten die Punkte

$$(1,1,1) \quad (1,-1,-1) \quad (-1,1,-1) \quad (-1,-1,1)$$

Wir sehen, dass dies die Eckpunkte eines regulären Tetraeders mit Kantenlänge $\sqrt{2}$ sind. Die Punkte

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$$

sind die acht Eckpunkte eines Würfels. Auch für die restlichen drei möglichen Kombinationen finden wir Punkte, die einen uns bekannten regulären Körper darstellen, nämlich: Oktokaeder mit $(\pm 1,0,0)$ $(0,\pm 1,0)$ $(0,0,\pm 1)$, Dodokaeder mit $(\pm 1,0,\pm g)$ $(0,\pm g,\pm 1)$ $(\pm g,\pm 1,0)$ und Ikosaeder mit $(0,\pm 1,\pm g^2)$ $(\pm g^2,0,\pm 1)$ $(\pm 1,\pm g^2,0)$ $(\pm g,\pm g,\pm g)$ (wobei g eine positive Zahl ist mit $g^2 = g+1$). Dass dies reguläre Körper sind, kann man leicht mit der Abstandsformel nachrechnen. Mit Hilfe von Eulers Formel wussten wir schon, dass höchstens fünf reguläre Körper existieren und nun haben wir gesehen, dass es genau fünf sind, denn zu jeder Kombination von p, q, e, k und f existiert ein uns bekannter regulärer Körper. $\square$

Satz 3 *Die Symmetriegruppe eines Würfels (regulärer Hexaeder) ist gleich der Symmetriegruppe eines regulären Oktaeders. Die Symmetriegruppe eines regulären Dodekaeders ist gleich der eines regulären Ikosaeders und die Symmetriegruppe eines regulären Tetraeders ist enthalten sowohl in der Symmetriegruppe eines regulären Oktaeders, als auch in der eines regulären Ikosaeders.*

Beweis: Wie wir im Beweis des ersten Satzes sehen können, ist es möglich Punkte zu finden, die einen regulären Körper beschreiben und ausserdem die Bedingungen erfüllen, die direkt aus der Eulerschen Formel folgten. Bei der Wahl von Tetraeder und Würfel wie oben, fällt auf, dass alle Eckpunkte des Tetraeders auch Eckpunkte des Würfels sind. Ausserdem sieht man, dass jede Symmetrie des Tetraeders gleichermassen eine Symmetrie des Würfels ist. Also lässt sich schliessen, dass die Symmetriegruppe eines Würfels die Symmetriegruppe eines Tetraeders enthält.

Definition 4 (das Duale eines regulären Polyeders) *Ein Polyeder, dessen Ecken dadurch entstehen, dass man die Mittelpunkte aneinandergrenzender Flächen eines gegebenen regulären Polyeders miteinander verbindet, heisst das Duale zum gegebenen Polyeder.*

Der Oktokaeder entsteht leicht aus dem Würfel, in dem man das Duale des Würfels betrachtet. Man verbindet also alle Flächenmittelpunkte aneinanderliegender Seiten und erhält damit einen neuen Köper, dem man leicht mit der Abstandsformel nachweisen kann, dass es sich um einen regulären Oktaeder handelt.
Aber wir wissen (oder können uns das zumindest ziemlich leicht klarmachen), dass das Duale des Oktokaeders wieder ein Würfel ist. Daher folgt, dass Würfel und Oktokaeder die gleiche Symmetriegruppe haben.
Genauso verhält es sich bei Dodekaeder und Ikosaeder. Der eine Körper hat den anderen als Duales. Damit haben auch sie die gleichen Symmetriegruppen.
Auch zwischen Würfel und Dodekaeder besteht eine Beziehung: Man kann einen Würfel mit Eckpunkten $(\pm g, \pm g, \pm g)$ so in einen Dodekaeder einsetzen, dass die Eckpunkte des Würfels auch Eckpunkte des Dodekaeders sind. Allerdings muss man feststellen, dass nicht alle Symmetrien des Würfels auch automatisch Isometrien des Dodekaeders sind, deshalb besteht keine Beziehung ihrer Symmetriegruppen. Aber: In jeden Würfel kann man einen Tetraeder legen, dessen Eckpunkte Eckpunkte des Würfels und damit Eckpunkte des Dodekaeders sind, und es gilt: Die Symmetrien des Tetraeders sind Symmetrien des Dodekaeders. Damit folgt: Die Symmetriegruppe des Tetraeders ist enthalten in der Symmetriegruppe des Dodekaeders und auch in der des Ikosaeders (denn Ikosaeder und Dodekaeder besitzen ja dieselbe Symmetriegruppe). $\square$

3 Die Platonischen Körper

reguläres Polyeder	e	k	f	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d
Tetraeder	4	6	4	3	4	-	-	12
Oktaeder	6	12	8	6	4	3	-	24
Hexaeder	8	12	6	6	4	3	-	24
Ikosaeder	12	30	20	15	10	-	6	60
Dodekaeder	20	30	12	15	10	-	6	60

Im Buch XIII der Elemente des Euklid findet man bereits um 300 v. Chr. Konstruktionsbeschreibungen aller Platonischen Körper. Außerdem erbrachte er den Nachweis, daß es nur diese regulären konvexen Polyeder gibt. Diese Tatsache war immer wieder

Anlaß zu philosophischen Spekulationen und wurde weidlich in der platonischen Schule bemüht. Dieser ungenierten Einbindung in die platonische Philosophie ist es offenbar auch zuzuschreiben, daß diese Körper nach Plato benannt wurden, obwohl er sie gar nicht erfunden hatte. Vorher hießen diese Körper nach übereinstimmenden Berichten pythagoräische Körper.
Kleiner Hinweis am Rande:
Platon baute die fünf regulären Polyeder so in seine Philosophie ein, dass er jedem von ihnen ein göttliches Attribut zuordnete:
Tetraeder → Feuer,
Würfel → Erde,
Oktaeder → Luft,
Dodekaeder → himmlische Quintessenz,
Ikosaeder → Wasser

3.1 Entdeckung der Platonischen Körper

Die Entdeckung der Platonischen Körpern liegt weitgehend im Dunkeln. Während Tetraeder, Würfel und Oktaeder sicher schon früh bekannt waren, wird die allgemeine Theorie der platonischen Körper und ihrer Gesetzmäßigkeiten erst den Pythagoräern zugeschrieben. Diese wußten auch schon, daß es nur diese fünf regelmäßigen Körper gibt, d.h., daß man aus Dreiecken, Vierecken und Fünfecken wirklich nur diese fünf platonischen Körper gewinnen kann, und daß die Verwendung von Sechsecken usw. zu keinem räumlichen Körper führt.

3.2 Besondere Eigenschaften Platonischer Körper

Die Winkel zwischen benachbarten Vielecken sind gleich. Darüber hinaus sind sämtliche Platonische Körper in dreifacher Weise Mittelpunktskörper: Alle Ecken liegen auf der Umkugel, alle Flächenmittelpunkte auf der Innenkugel und ausserdem gibt es noch eine Kugel (Kantenkugel), die alle Kanten des platonischen Körpers genau in der Mitte berührt. Damit stehen unter allen anderen geometrischen Körpern die platonischen Körper der Kugel am nächsten. Sie führen darüber hinaus durch Projektion aus dem Mittelpunkt zu den vollkommensten Aufteilungen der Kugeloberfläche.
Die Eigenschaft, dass jeder Platonische Körper eine Innenkugel besitzt, auf der die Mittelpunkte sämtlicher Flächen des Körpers liegen, und eine Aussenkugel, auf der sämtliche Körperecken liegen wusste Johhannes Kepler auszunutzen:
In seinem Jugendwerk "Mysterium Cosmographicum" gelang es ihm damit die Abstände der damals sechs bekannten Planeten des Sonnessystems zu erklären. Alle Planeten beschrieben danach Kreisbahnen auf Kugelschalen. Zwischen diese sechs Kugelschalen passte Kepler die Platonischen Körper so ein, dass jeweils eine Kugel Innenkugel des Körpers und die folgende Kugel Aussenkugel des Körpers war. Danach lag das Oktaeder

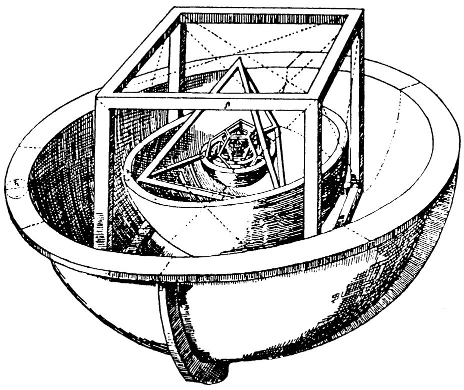

Abbildung 2: Kepler und die fünf Platonischen Körper

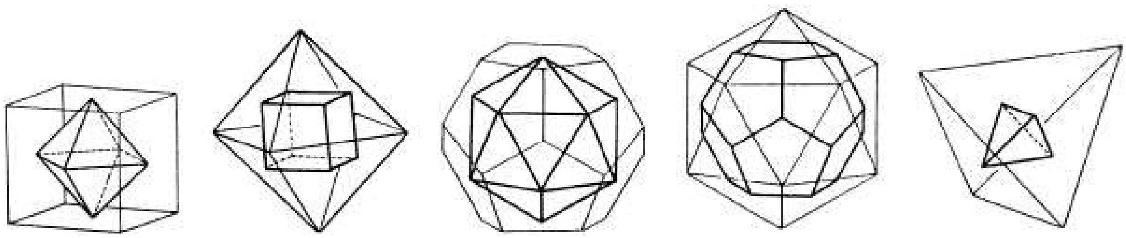

Abbildung 3: Dualitäten der fünf Platonischen Körper

zwischen Merkur und Venus, das Ikosaeder zwischen Venus und Erde, das Dodekaeder zwischen Erde und Mars, das Tetraeder zwischen Mars und Jupiter und der Würfel zwischen Jupiter und Saturn. (siehe Abbildung 2)

3.2.1 Dualitäten

Wie schon gesehen gibt es eine ganz besondere Beziehung unter den Platonischen Körpern: die Dualitätsbeziehung (oder auch polare Beziehung genannt): Aus einem Paar dualer Körper muss der eine genau so viele Ecken besitzen wie der andere Flächen hat. Die Ecken des einen Körpers liegen genau auf den Flächenmittelpunkten des anderen, und die Kanten der beiden Körper laufen immer rechtwinklig übereinander.
Bei den platonischen Körpern lassen sich fünf Dualitätsbeziehungen feststellen. So ist der Würfel dual zum Oktokaeder, sowie der Oktokaeder dual zum Würfel, es ist der Ikosaeder dual zum Dodekaeder und der Dodekaeder dual zum Ikosaeder und ausserdem ist der Tetraeder dual zu sich selbst. (siehe Abbildung 3)

3.2.2 Symmetrien

In unserem Zusammenhang interessieren uns an den Platonischen Körpern vor allem ihre Symmetrien. Unter einer Symmetrie verstehen wir eine Isometrie, d.h. eine abstandserhaltende Abbildung $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, die einen beliebigen Körper in sich abbildet.
An dieser Stelle interessieren uns aber insbesondere die Symmetriegruppen der platonischen Körper. Dass sie so schön regelmäßig sind, äußert sich darin, dass es viele Kongruenzabbildungen gibt, die den jeweiligen Körper mit sich selbst zur Deckung bringen. Darunter können offensichtlich keine Translationen oder Gleitspiegelungen sein, denn der Mittelpunkt muss immer auf den Mittelpunkt kommen. Eine Gruppe aus Isometrien, die sämtlich einen Punkt unverändert lassen, heisst Punktgruppe. Die Symmetriegruppen der platonischen Körper sind also Punktgruppen.
Nehmen wir als Beispiel die Symmetriegruppe des Dodekaeders. Man steche eine Achse durch den Mittelpunkt eine Fläche und den der gegenüberliegenden Fläche. Dann kann man um diese Achse ein, zwei, drei ... Fünftel des Vollwinkels rotieren (fünfzählig). Eine Achse, durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte gestochen, ist dreizählig, und eine durch zwei gegenüberliegende Kantenmittelpunkte ist zweizählig. Man wähle eine Fläche aus, halbiere sie durch eine Gerade von Ecke zu Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante und nehme die Ebene, die durch diese Gerade und den Mittelpunkt des Körpers geht. Spiegelung an dieser Ebene ist eine Symmetrie des Körpers. Von diesen Ebenen gibt es 15 Stück. Diese Abbildung und ihre Verknüpfungen bilden die Symmetriegruppe des Dodekaeders.
Bezeichnen wir die Gruppe der orientierungserhaltenen Isometrien des Tetraeders mit T, die des Oktaeders mit O und die des Ikosaeders mit I. Dann können wir folgenden Satz formulieren:

Satz 4 *T hat die Ordnung 12, O hat die Ordnung 24 und I die Ordnung 60.*

Beweis: Wir wollen den Satz an dieser Stelle nicht vollständig formal beweisen; es soll eine kleine Beweisskizze genügen:
Seien V_1 und V_2 zwei benachbarte Ecken eines platonischen Körpers. Wenn wir die Bilder von V_1 und V_2 kennen, kennen wir die Bilder aller Ecken, da wir nur orientierungserhaltende Bewegungen (Drehungen) betrachten, die zwei aneinandergrenzende Ecken immer beibehält.
Eine Rotation oder die Identität können dazu führen, dass eine Ecke V_1 auf jede beliebige der anderen e Ecken abgebildet wird. Wie auch immer, V_2 muss dann auf eine der q angrenzenden Ecken zu V_1 abgebildet werden und auch das kann man durch eine Rotation oder die Identität erreichen. Da die Bilder von V_1 und V_2 die Bilder aller Ecken bestimmen lässt sich schliessen, dass die Gruppe aller orientierungserhaltenden Isometrien, die den Körper in sich überführt die Ordnung eq hat. □

3.2.3 Beispiel: Der Würfel

Wir wollen uns in diesem Abschnitt, die Symmetriegruppe des Würfels (und damit auch des Oktaeders) noch einmal genauer ansehen. Es werden nur Drehsymmetrien untersucht.
Insbesondere werden wir beweisen, dass es einen Isomorphismus gibt zwischen der (Dreh-)Symmetriegruppe des Würfels und der S_4, der Gruppe der Permutationen einer vierelementigen Menge.
Dazu überlegen wir uns das Folgende: Hier geht es um Drehsymmetrien, also um orientierungserhaltende Abbildungen, die den Würfel wieder in sich selbst überführen. Insbesondere reicht es deshalb - und das schafft eine enorme Erleichterung - all die Abbildungen zu untersuchen, die die vier Raumdiagonalen auf sich selbst abbilden.
Im folgenden stützen wir uns auf die Abbildung "Drehsymmetrien des Würfels", die während des Vortrages ausgeteilt wurde.
Sei also N_k die Raumdiagonale von k zu k' mit $1 \leq k \leq 4$
Nun untersuchen wir wie die einzelnen Abbildungen r, s und t auf unsere vier Raumdiadonalen wirken:

$$\begin{aligned} r : N_1 &\longrightarrow N_2 \\ N_2 &\longrightarrow N_3 \\ N_3 &\longrightarrow N_4 \\ N_4 &\longrightarrow N_1 \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Zykel (1234)

$$\begin{aligned} s : N_1 &\longrightarrow N_4 \\ N_2 &\longrightarrow N_2 \\ N_3 &\longrightarrow N_1 \\ N_4 &\longrightarrow N_3 \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Zykel (143)

$$\begin{aligned} t : N_1 &\longrightarrow N_2 \\ N_2 &\longrightarrow N_1 \\ N_3 &\longrightarrow N_3 \\ N_4 &\longrightarrow N_4 \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Zykel (12)

Betrachte nun $\varphi : Sym(W) \longrightarrow S_4$.
φ ist linear, denn die Hintereinanderschaltung zweier Drehungen ist gleich der Hintereinanderschaltung zweier Permutationen.

zu zeigen bleibt also: φ ist bijektiv.
Wir wissen, dass wenn eine Abbildung zwischen zwei endlichen Mengen mit gleich vielen Elementen surjektiv ist, sie gleichzeitig auch injektiv und damit bijektiv ist. Zeigen wir also nun, dass φ surjektiv ist.
(1234) und (12) liegen im Bild von $Sym(W)$, also in $\varphi(Sym(W))$, denn das haben wir oben gesehen. $\varphi(Sym(W))$ ist Untergruppe von S_4 (LA I+II). Also ist $\varphi(Sym(W))$ unter der Multiplikation abgeschlossen und das impliziert, dass alle möglichen Hintereinnderschaltungen von (1234) und (12) in $\varphi(Sym(W))$ liegen müssen.
(1234) und (12) erzeugen S_4, denn:
$(1234)(12)(1234) = (23)$ und
$(1234)(23)(1234) = (34)$
Und es gilt (aus Vorlesung): $(12), (23)$ und (34) erzeugen S_4. Damit folgt $\varphi(Sym(W)) = S_4$, also φ surjektiv, also bijektiv und damit haben wir bewiesen, dass $Sym(W)$ und S_4 isomorph sind.