Die Orthogonale Gruppe

Julia Dresler

04.11.2000

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Die Lineare Gruppe

Die Menge aller invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen bildet bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe. Dies ist leicht einzusehen:

- es gilt Assoziativität, da die Matrizenmultiplikation assoziativ ist;
- I_n ist Einselement;

- Das Produkt invertierbaren Matrizen ist invertierbar ($\Rightarrow$ Abgeschlossenheit unter Produkten). Das Inverse zu AB ist $B^{-1}A^{-1}$.

Diese Gruppe wird mit GL_n (*General Linear Group*, Lineare Gruppe) bezeichnet. Jede Matrix A in dieser Gruppe bestimmt eine invertierbare lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die definiert wird durch Linksmultiplikation mit A, also $f_A(x) = Ax$ für alle Vektoren $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$.
Die Verknüpfung linearer Abbildung $f_A f_B$ wird bestimmt durch die Produktmatrix AB, da gilt:

$$f_{AB}(x) = (AB)x = A(Bx) = f_A(f_B(x)) = f_A f_B(x).$$

Es gilt ebenso: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung und ist A die Matrix, die diese Abbildung bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ darstellt, so ist A invertierbar, also $A \in GL_n$ und $f = f_A$.

Die Gruppe GL_n ist nicht abelsch für $n \geq 2$, da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist. Die Gruppe GL_1 ist isomorph zu der Gruppe der reellen Zahlen ohne Null ($\mathbb{R}\backslash 0$) (jede Matrix hat nur einen Eintrag $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, Matrizenmultiplikation entspricht der "normalen" Multiplikation von reellen Zahlen).
Um zu betonen, daß es sich um Matrizen mit reellen bzw. komplexen Koeffizienten handelt, schreibt man auch $GL_n(\mathbb{R})$ bzw. $GL_n(\mathbb{C})$.

Ist $A \in GL_n$, so gehört die $(n+1) \times (n+1)$-Matrix $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ zu GL_{n+1}.
Die Abbildung $f_{\widetilde{A}} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ ist definiert durch $f_{\widetilde{A}}(x, z) = (f_A(x), z)$, die letzte Koordinate bleibt also unter der Abbildung fest. Die so gebildeten Matrizen bilden eine Untergruppe von GL_{n+1}, die isomorph zu GL_n ist.

1.2 Die Spezielle Lineare Gruppe

Eine wichtige Untergruppe der linearen Gruppe GL_n ist die *spezielle lineare Gruppe* SL_n. Sie besteht aus allen invertierbaren Matrizen, deren Determinante 1 ist:

$$SL_n = \{A \in GL_n | \det A = 1\}.$$

1.3 Die Orthogonale Gruppe

Eine weitere wichtige Untergruppe der linearen Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ ist O_n, die *orthogonale Gruppe*. Dies ist die Menge der orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen.

Eine $(n \times n)$-Matrix heißt *orthogonal*, wenn gilt $A^{-1} = A^t$. Also $A^t A = I_n$, daraus folgt wenn man die einzelnen Einträge der Produktmatrix betrachtet:

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \ldots + a_{ni}a_{nj} = \langle\ i\text{-te Spalte von } A,\ j\text{-te Spalte von } A\rangle = \begin{cases} 1 \text{ für } j = i \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$$

Die Spalten von A haben also die Länge 1 und sind orthogonal zueinander.
Sie bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.
Das gleiche gilt natürlich für die Zeilen von A.

Die Determinante einer orthogonalen Matrix hat den Betrag 1, da gilt:

$$\det I_n = \det A^t A = \det A^2 = 1.$$

Eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe O_n ist die *spezielle orthogonale Gruppe* SO_n, die aus der Menge der orthogonalen Matrizen mit Determinante $+1$ besteht:

$$O_n = \{A \in GL_n | A^t A = I_n\};$$

$$SO_n = \{A \in O_n | \det A = 1\}.$$

Für einen durch eine Matrix $A \in O_n$ repräsentierten Endomorphismus $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\langle f_A(x), f_A(y) \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = (Ax)^t Ay = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y \rangle.$$

Orthogonale Endomorphismen erhalten

- Orthogonalität: $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f_A(x), f_A(y) \rangle = 0$.
- Längen: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\langle f_A(x), f_A(x) \rangle} = \|f_A(x)\|$.
- Entfernungen zwischen zwei beliebigen Punkten:

$$\|f_A(x) - f_A(y)\| = \|f_A(x - y)\| = \|x - y\|.$$

Ebenso gilt: Betrachten wir eine normerhaltende lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so erhält f Abstände zwischen zwei beliebigen Punkten, da gilt: $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| = \|x - y\|$ und f erhält rechte Winkel, da $\langle f(x), f(y) \rangle = \frac{1}{2}(\|f(x)\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2 + \|f(y)\|^2) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 - \|x - y\|^2 + \|y\|^2) = \langle x, y \rangle$.
Also bildet f die kanonische Basis also auf eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ ab. Da die Spalten der darstellenden Matrix A die Bilder der Basisvektoren (kanonische) sind, sind die Spalten der Matrix diese Orthonormalbasis, A ist also orthogonal.
Es gilt $f = f_A$ wobei $A \in O_n$.
Die Gruppe O_n läßt sich also auch definieren als Gruppe der orthogonalen Endomorphismen.

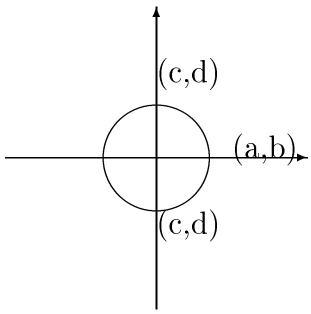
Da jedes $A \in O_n$ abstandserhaltend ist, ist es eine Isometrie und zwar eine, die den Ursprung fest läßt (also $O_n \subset B_n$).

Ist $\det A = 1$, so nennt man A *orientierungserhaltend*. Ist $\det A = -1$, so nennt man A *orientierungsumkehrend*.

2 O_2 und O_3

2.1 O_2

Ist $A \in O_2$, so wissen wir, daß die Spalten von A Einheitsvektoren und orthogonal zueinander sind.
Sei $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.
Der Punkt (a, b) liegt auf dem Einheitskreis, es gilt also $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$.
Die Werte a und b lassen sich also darstellen als $a = \cos\theta, b = \sin\theta$ für ein passendes $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Da (c, d) ebenso auf dem Einheitskreis liegt und senkrecht zu (a, b) ist, gilt $c = \cos\varphi, d = \sin\varphi$, wobei entweder $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$ oder $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$.



Im 1. Fall ($\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$) erhält man eine Matrix $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.
Diese Matrix liegt in SO_2, da

$$det \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Die durch diese Matrix definierte Abbildung ist also orientierungserhaltend und stellt eine Drehung um θ gegen den Uhrzeigersinn dar.
Im 2. Fall ($\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$) erhält man eine Matrix $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.
Diese Matrix hat die Determinante -1, da

$$\det \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1.$$

Sie liegt also in $O_2 \setminus SO_2$ und stellt eine Spiegelung an einer Geraden im Winkel $\frac{\theta}{2}$ zur positiven x-Achse dar.

Daraus folgt:
Jede Matrix $A \in O_2$ stellt entweder eine Drehung der Ebene um den Ursprung, oder eine Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung dar. Die zugehörige Matrix hat genau dann die Determinante +1, wenn es sich um eine Drehung handelt.

Die Elemente von SO_2 sind also die Drehungen der Ebene um den Ursprung. Die Elemente von O_2 erhält man, indem man zu den Elementen von SO_2 noch alle ihre Produkte mit einer Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung hinzunimmt.

Betrachte nun die komplexe Ebene. Jeder Punkt auf dem Einheitskreis ist von der Form $e^{i\theta}$ mit $0 \leq \theta < 2\pi$.
(Erinnerung: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$)
Die Zuordnung

$$e^{i\theta} \to \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C} \to SO_2$. Dies läßt sich leicht verifizieren.

2.2 O_3

Sei $A \in SO_3$. Das charakteristische Polynom $\det(A - TI)$ ist vom Grad 3, hat also mindestens eine reelle Nullstelle (folgt aus Fundamentalsatz der Algebra), also hat A mindestens einen reellen Eigenwert. Die Eigenwerte einer orthogonalen Matrix sind ± 1, da gilt:
Ist w Eigenvektor zum Eigenwert λ: $\|w\| = \|Aw\| = \|\lambda w\| = |\lambda|\|w\|$. Da die Determinante das Produkt von Eigenwerten einer Matrix ist, sehen wir, daß $+1$ ein Eigenwert von A ist (sind alle Eigenwerte reell, so muß mindestens einer $+1$ sein, sind zwei der Eigenwerte komplex, so sind sie konjugiert zueinander und ihr Produkt ist ein positiver reeller Wert). Sei v der zugehörige Eigenvektor zum Eigenwert 1, dann bleibt die Gerade durch den Ursprung, die von v erzeugt wird unverändert unter f_A.
Da der orthogonale Endomorphismus f_A rechte Winkel erhält, muß er die Ebene, die senkrecht zu v ist und die den Ursprung erhält auf sich selbst abbilden.
Bilde nun eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ mit $\frac{v}{\|v\|}$ als ersten Vektor. Die darstellende Matrix von f_A bzgl. dieser Basis ist ein Element von SO_3 von folgender Form: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, wobei $B \in SO_2$. Also ist f_A eine Drehung um die durch v bestimmte Achse.

Daraus folgt:
Jede Matrix $A \in SO_3$ repräsentiert eine Drehung des $\mathbb{R}^3$ um eine Gerade durch den Ursprung. Ebenso gilt: Jede Drehung des $\mathbb{R}^3$ um eine Achse durch den Ursprung wird durch eine Matrix aus SO_3 dargestellt.

Liegt A in $O_3 \setminus SO_3$, bilde das Produkt mit der Matrix $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, die eine Spiegelung and der (x, y)-Ebene beschreibt.

Da $detAU = 1$, folgt $AU \in SO_3$.
Schreibe $A = (AU)U$ und erhalte $f_A = f_{AU} f_U$. Wie eben beschrieben ist f_{AU} eine Drehung, da $AU \in SO_3$, f_U ist eine Spiegelung.
Es folgt, daß f_A eine Spiegelung an der (x, y)-Ebene gefolgt von einer Drehung ist.

3 Endliche Untergruppen von O_2 und SO_3

3.1 Endliche Untergruppen von O_2

SATZ 1: Eine endliche Untergruppe von O_2 ist zyklisch oder Diedergruppe.

Beweis: Sei G endliche Untergruppe von O_2.

1.Fall: Sei $G \subset SO_2$. Daraus folgt, daß jedes Element von G eine Drehung der Ebene ist.
Sei $A_\theta \in G$ Drehung um θ gegen den Uhrzeigersinn, $0 \leq \theta < 2\pi$.
Sei $A_\varphi \in G$ mit $\varphi > 0$ und so klein wie möglich. Teile nun θ durch φ und erhalte $\theta = k\varphi + \psi$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \psi < \varphi$.
Es gilt also $\Rightarrow$ $A_\theta = (A_\varphi)^k A_\psi$, dies ist äquivalent zu $A_\psi = (A_\varphi)^{-k} A_\theta$.
Da A_θ, $A_\varphi \in G$ folgt, daß $A_\psi \in G$. Es ist also $\psi = 0$ sonst existiert ein Widerspruch zu φ minimal.
Das Element A_φ erzeugt G, G ist also zyklisch.

2.Fall: Die Untergruppe G liegt nicht vollständig in SO_2.
Setze $H = G \cap SO_2$, H ist also Untergruppe von G und liegt vollständig in SO_2. Nach Fall 1 gilt, daß H zyklisch ist.
Suche einen Erzeuger A von H und ein Element B aus $G - H$ ($B \in O_2 \backslash SO_2$)).
Das Element B ist also eine Spiegelung, also von der Ordnung 2 ($B^2 = I$).
Es gibt nun zwei Mölichkeiten:

1. Ist $A = I$, dann besteht G aus I und B, ist also zyklisch (Ordnung 2).
2. Ist $A \neq I$ ein Element der Ordnung n, $n \geq 2$, dann sind die Elemente von G: $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}, B, AB, \ldots, A^{n-1}B$.
   In diesem Fall bestimmt die Abbildung $A \to r$, $B \to s$ (wobei r Drehung, s Spiegelung Erzeuger eine Diedergruppe) einen Isomorphismus zwischen G und der Diedergruppe $\mathcal{D}_n$. Die Untergruppe G ist also isomorph zu einer Diedergruppe.

$\blacksquare$

3.2 Endliche Untergruppen von SO_3

Satz 2: Jede endliche Untergruppe von SO_3 ist entweder isomorph zu einer zyklischen Gruppe, einer Diedergruppe oder der Drehsymmetriegruppe eines der regulären Polyeder.

Anschaulich:
Die Elemente von SO_3 sind Drehungen des $\mathbb{R}^3$ um eine Achse durch den Ursprung. Positioniert man eine Figur mit ihrem Schwerpunkt im Ursprung im $\mathbb{R}^3$, dann ist ihre Drehsymmetriegruppe eine Untergruppe von SO_3.
Es gibt folgende Möglichkeiten:

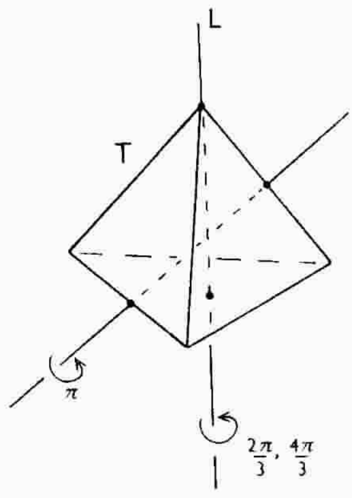


Figure 1.1

reguläres Polyeder *(Abbildung 1.1)*
⇒ Drehsymmetriegruppe eines regulären Polyeders (es gibt nur endlich viele)

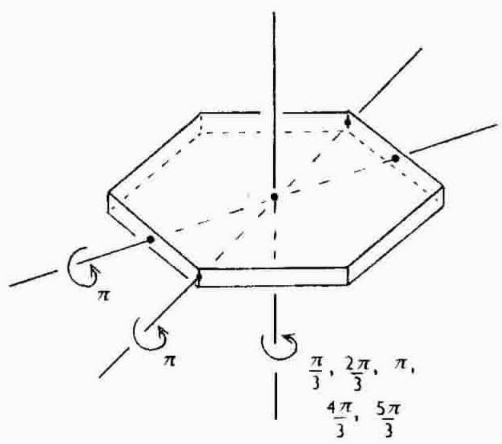


Figure 1.2

reguläres Vieleck ("Platte") *(Abbildung 1.2)*
⇒ Drehsymmetriegruppe ist Diedergruppe $\mathcal{D}_n$ (Anzahl der Elemente ist $2n$)

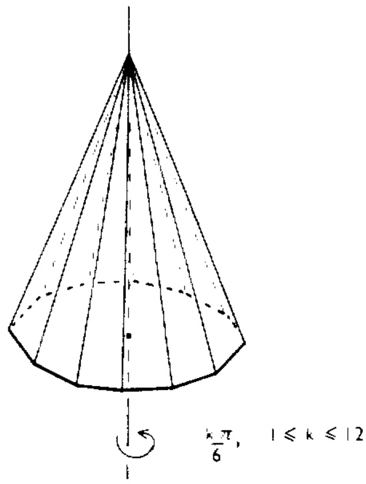


Figure 1.3

Pyramide mit n-seitiger Basis *(Abbildung 1.3)*
$\Rightarrow$ Drehsymmetriegruppe ist zyklische Gruppe der Ordnung n (erzeugt von Drehung um $\frac{2\pi}{2}$)

Es ist leicht einzusehen, daß dies Untergruppen von SO_3 sind. Es bleibt noch zu zeigen, daß dies alle Möglichkeiten für endliche Untergruppen von SO_3 sind.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir:
Die Gruppe G operiere auf einer Menge X.

Orbit (Bahn) : $G(x) := \{g(x) : g \in G\}$
Also die Menge aller Punkte auf die x durch ein Element aus G abgebildet wird.

Stabilisator : $G_x := \{g \in G : g(x) = x\}$
Mit Stabilisator von x bezeichnet man die Menge aller $g \in G$, die x fest lassen.

Pol : Elemente von SO_3 sind Drehungen um eine Achse durch den Ursprung. Die Stellen, an denen die Achse die Einheitskugel schneidet heißen *Pole*. Diese Pole sind die einzigen Punkte auf der Einheitskugel, die unter der gegebenen Drehung fest bleiben.

Counting Theorem : Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Dann ist die Anzahl N der verschiedenen Orbiten/Bahnen:

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

X^g steht für die Menge der Punkte aus X, die unter g fest bleiben.

Orbit-Stabilizer-Theorem :

$$|G| = |G(x)| \cdot |G|,\, x \in X$$

d.h. die Kardinalität einer Gruppe G ist gleich dem Produkt der Kardinalität einer ihrer Bahnen auf X mit der Kardinalität des zugehörigen Stabilisators.

<u>Beweis von Satz 2:</u>
Sei G eine endliche Untergruppe von SO_3. Jedes Element $g \in G$ $(g \neq e)$ stellt eine Drehung des $\mathbb{R}^3$ um eine Achse durch den Ursprung dar. Nenne X die Menge aller Pole der Elemente von $G \setminus \{e\}$.

Sei $x \in X$ und $g \in G$. Sei x Pol des Elementes $h \in G$.
Es gilt $(ghg^{-1})(g(x)) = g(h(x)) = g(x)$. Daraus folgt, daß $g(x)$ Pol von ghg^{-1} ist, also ist $g(x) \in X$. G operiert also auf X.

Sei N die Anzahl der verschiedenen Bahnen. Wähle einen Pol aus jeder Bahn, nenne diese Pole $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Jedes Element aus $G \setminus \{e\}$ hält genau zwei Pole fest, während die Identität alle Punkte fest läßt.
Mit dem *Counting Theorem* folgt:

$$N = \frac{1}{|G|}\{2(|G|-1) + |X|\} = \frac{1}{|G|}\{2(|G|-1) + \sum_{i=1}^{N} |G(x_i)|\};$$

Umformen liefert:

$$2(1 - \frac{1}{|G|}) = N - \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{N} |G(x_i)| \overset{Satz 1}{=} N - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{|G_{x_i}|} = \sum_{i=1}^{N}(1 - \frac{1}{|G_{x_i}|}).$$

Gehen wir davon aus, daß G nicht die triviale Gruppe ist, $|G| \geq 2$, so ist die linke Seite der Gleichung größer gleich 1 und kleiner als 2. Jeder Stabilisator G_{x_i} hat mindestens Ordnung 2 (da x Pol von Element aus $G \setminus \{e\}$ ist, außerdem hält die Identität alle Punkte fest). Es gilt also:

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{|G_{x_i}|} < 1 \text{ für } 1 \leq i \leq N$$

Daraus folgt N ist gleich 2 oder 3.

Ist <u>$N = 2$</u>, folgt aus

$$2(1 - \frac{1}{|G|}) = N - \frac{1}{|G|}\sum_{i=1} N|G(x_i)|,$$

dies ist äquivalent zu:

$$2 - \frac{2}{|G|} = 2 - \frac{1}{|G|}(|G(x_1)| + |G(x_2)|),$$

was wiederrum äquivalent ist zu:

$$2 = |G(x_1)| + |G(x_2)| :$$

Die Ordnung der Bahnen von x_1 und x_2 ist also 1.
Daraus folgt: Es gibt nur 2 Pole.
Diese Pole bestimmen eine Gerade L und jedes Element aus $G \setminus \{e\}$ ist eine Drehung um diese Achse. Die Ebene durch den Ursprung, senkrecht zu L wird durch die Drehung auf sich selbst abgebildet.
Die Gruppe G ist also isomorph zu einer Untergruppe von SO_2 und ist damit zyklisch. (Satz 1)

Ist $\underline{N=3}$, so ist die Situation komplizierter: Schreibe x, y, z für x_1, x_2, x_3.
Es gilt:

$$2(1 - \frac{1}{|G|}) = 3 - (\frac{1}{|G_x|} + \frac{1}{|G_y|} + \frac{1}{|G_z|})$$

Durch Umformung erhalte:

$$1 + \frac{2}{|G|} = \frac{1}{|G_x|} + \frac{1}{|G_y|} + \frac{1}{|G_z|}$$

Die Summe auf der rechten Seite ist größer als 1, es gibt 4 Möglichkeiten:

(a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}$ mit $n \geq 2 \Rightarrow$ Diedergruppe

(b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \Rightarrow$ Drehsymmetriegruppe eines regulären Tetraeders

(c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \Rightarrow$ Drehsymmetriegruppe eines regulären Oktaeders

(d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \Rightarrow$ Drehsymmetriegruppe eines regulären Ikosaeders

Fall (a) : Sei $|G_x| = |G_y| = |G_z| = 2$
Aus $1 + \frac{2}{|G|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ folgt $|G| = 4$.
G ist also eine Gruppe der Ordnung 4, in der jedes Element außer der Identität die Ordnung 2 hat. G ist isomorph zu der Kleinschen Gruppe, die hier als Diedergruppe mit 4 Elementen betrachtet wird. $\Rightarrow$ *G ist also isomorph zu einer Diedergruppe.*
Ist $|G_x| = |G_y| = 2$ und $|G_z| = n \geq 3$, dann ist G eine Gruppe der Ordung $2n$ ($|G| = 2n$ folgt aus Gleichung oben).
Die Achse durch z bleibt jeder Drehung in G_z fest, die Ebene durch den Ursprung, senkrecht zur Achse, die von z erzeugt wird, wird auf sich selbst abgebildet. G_z ist also isomorph zu einer Untergruppe von SO_2 und ist damit zyklische Gruppe der Ordnung n.
Sei g eine minimale Drehung, die G_z erzeugt.
Die Punkte $x, g(x), \ldots, g^{n-1}(x)$ sind alle verschieden. Um dies zu zeigen nehme an, daß $g^r(x) = g^s(x)$ mit $r > s$. Dann gilt $g^{r-s}(x) = x$. Aber z und $-z$ sind die einzigen Pole, die durch g^{r-s} fest gelassen werden, und x kann nicht z

oder $-z$ sein, da $|G_x| = 2$ und $|G_{-z}| = |G_z| = n \geq 3$ und da gilt, daß für alle Elemente einer Bahn die Ordnung des Stabilisators gleich ist. Widerspruch!!
Die Punkte $x, g(x), \ldots, g^{n-1}(x)$ sind also alle verschieden.
Da g Entfernungen erhält (orthogonaler Endomorphismus), gilt:

$$\|x - g(x)\| = \|g(x) - g^2(x)\| = \ldots = \|g^{n-1}(x) - x\|.$$

Deswegen sind $x, g(x), \ldots, g^{n-1}(x)$ die Ecken eines regulären n-Ecks P. Da G aus $2n$ Drehungen besteht, die alle P auf sich selbst abbilden, muß G die Drehsymmetriegruppe von P sein. *G ist also Diedergruppe.*
Die Fläche von P enthält natürlich den Ursprung und ist senkrecht zu der Achse durch z.

Fall (b) : Ist $|G_x| = 2$ und $|G_x| = |G_z| = 3$, dann ist G eine Gruppe der Ordnung 12. Aus dem Orbit-Stabilizer-Theorem folgt, daß die Bahn von z aus 4 Punkten besteht. Wähle einen dieser Punkte, der $0 < \|z - u\| < 2$ erfüllt, nenne diesen Punkt u. Wähle einen Erzeuger g von G_z. Dann sind $u, g(u)$ und $g^2(u)$ alle verschieden. Da g Abstände erhält, sind diese Punkte alle gleichweit entfernt von z und liegen in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Betrachten wir nun u anstatt z sehen wir, daß $z, g(u)$ und $g^2(u)$ den gleichen Abstand von u haben. Deswegen sind $z, u, g(u), g^2(u)$ die Ecken eines *regulären Tetraeders*, das durch jede Drehung in G auf sich selbst abgebildet wird. Weil G außerdem die richtige Ordnung (12) hat, muß es die Drehsymmetriegruppe dieses regulären Polyeders sein.

Fall(c) : Ist $|G_x| = 2, |G_y| = 3$ und $|G_z| = 4$, dann ist G eine Gruppe der Ordnung 24. Es gibt also 6 Punkte in der Bahn von z (Orbit-Stabilizer-Theorem). Wähle einen Punkt, sagen wir u, der nicht z oder $-z$ ist und sei g ein Erzeuger von G_z. Dann sind $u, g(u), g^2(u)$ und $g^3(u)$ verschieden, gleichweit entfernt von z und liegen in den Ecken eines Quadrates. Wir haben nun nur noch Platz für einen weiteren Punkt in $G(z)$, dieser Punkt muß also $-z$ sein. Genauso liegt $-u$ in $G(u) = G(z)$. Dieser Pol $-u$ ist sicher nicht z oder $-z$, und es kann nicht $g(u)$ oder $g^3(u)$ sein, weil $\|g(u) - u\| = \|g^3(u) - u\| < 2$. Also muß $-u$ gleich $g^2(u)$ sein. Deswegen sind $z, u, g(u), g^2(u), g^3(u), -z$ die Ecken eines *regulären Oktaeders*, und G ist seine Drehsymmetriegruppe.

Fall (d) : Ist $|G_x| = 2, |G_y| = 3$ und $|G_z| = 5$, dann ist G eine Gruppe der Ordnung 60. Es sind 12 Punkte im Orbit von z. Wähle zwei dieser Punkte, sagen wir u und v, die $0 < \|z - u\| < \|z - v\| < 2$. Warum können wir dies tun? Sei g eine minimale Drehung, die G_z erzeugt. Dann sind $u, g(u), g^2(u), g^3(u)$ und $g^4(u)$ verschieden, gleichweit entfernt von z und liegen in den Ecken eines regulären Fünfecks. Ebenso sind $v, g(v), g^2(v), g^3(v)$ und $g^4(v)$ verschieden, gleichweit entfernt von z (allerdings weiter weg als u), und auch sie bilden die Ecken eines regulären Fünfecks. Es bleibt $-z$ als einzige Möglichkeit für den zwölften Punkt von $G(z)$. Konzentrieren wir uns nun auf u, so sehen wir, daß $-u \in G(u) = G(z)$. Weil $-u$ im Abstand 2 zu u liegt, muß es einer der Punkte $v, g(v), g^2(v), g^3(v)$ oder $g^4(v)$ sein. Wir können nun erreichen (evtl. durch Umbennenung), daß $-u = v$ wenn $-g^r(u) = g^r(v)$, $1 \leq r \leq 4$. Betrachten wir dies von u aus, so sehen wir elf Punkte und die fünf, die u am nächsten sind, müssen alle den gleichen Abstand von u haben. Diese Punkte sind $z, g(u), g^2(u), g^3(u)$ und $g^4(u)$. Es gilt:

$$\|u - v\| = \|u - g(u)\| = \|u - g^2(v)\|.$$

Es ist nun leicht zu sehen, daß die zwölf Punkte in den Ecken eines *regulären Ikosaeders* liegen. G ist somit die Drehsymmetriegruppe eines regulären Ikosaeders.

$\blacksquare$