Proseminar: Symmetrie- und Spiegelungsgruppen

Friesgruppen

Nicolas Hanscher

1 Einleitung

Wenn man so nichtsahnend in einem alten Dorf spazierengeht, kann es durchaus passieren, dass man von der Mathematik überrascht wird. Bei alten Bauernhäusern wurde häufig um das Gebäude herum ein Muster gemalt, das aus sich wiederholenden Motiven besteht. Wir wollen uns nun im folgenden mit solchen Mustern (**Friesen**) und deren Klassifikation beschäftigen. Wir werden feststellen, dass es nur sieben verschieden Möglichkeiten gibt, ein solches Muster zu erstellen.

2 Die sieben Friesgruppen

Definition 1 (Friesgruppe)
Eine Gruppe von Isometrien der Ebene, die eine gegebene Gerade c festlässt und deren Translationen eine unendliche zyklische Gruppe bilden, heißt Friesgruppe.

Wir brauchen folgende Schreibweisen:

- Sei c die Linie, die ein Fries fixiert.
- Sei τ die kürzeste (nichtidentische) Translation, die c bestimmt.
- Sei $\mathcal{F}$ die zu einem Fries zugehörige Symmetriegruppe.
- Wenn $\mathcal{F}$ eine Halbdrehung enthält, so ist A der Drehmittelpunkt, falls $\mathcal{F}$ eine Spiegelung an einer Senkrechten zu c enthält, so ist A der Schnittpunkt der beiden Geraden und sonst ist A irgendein Punkt auf c.
- Sei $A_0 := A$ und $A_i := \tau^i(A)$.
  Es gilt ebenfalls $\tau^n(A_i) := \tau^{n+i}(A)$ für $n \in \mathbb{N}$.
  Jede Translation in $\mathcal{F}$ bildet A_i auf A_j ab für geeignetes $j \in \mathbb{N}_0$.

- Sei M der Mittelpunkt von $\overline{AA_1}$. Sei $M_i := \tau^i(M)$. Also ist M_i der Mittelpunkt von A_i und A_{i+1} und ebenfalls von A_0 und A_{2i+1}.
- Sei σ_x die Spiegelung an der Spiegelachse x und
  σ_A die Halbdrehung am Punkt A.
- Sei γ die Gleitspiegelung mit Achse c und $\gamma^2 = \tau$.

Satz 1
Sei $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Sei P ein Symmetriepunkt und l eine Symmetrieachse von S. Sei α eine Isometrie von S.
Dann ist $\alpha(P)$ ein Symmetriepunkt von S und $\alpha(l)$ eine Symmetrieachse von S.

Beweis:
Sei G die Symmetriegruppe von S. Seien α, $\sigma_P \in G$. Dann ist auch $\sigma_{\alpha(P)} \in G$, da $\alpha\sigma_P\alpha^{-1}$ in G liegt. Ebenso ist $\sigma_{\alpha(l)} \in G$, da $\alpha\sigma_l\alpha^{-1} \in G$. □

Satz 2 (die sieben Friesgruppen)
Sei $\mathcal{F}$ eine Friesgruppe mit Mittelachse c, deren Translationen eine von τ erzeugte Untergruppe bilden. Dann ist $\mathcal{F}$ isomorph zu einer der folgenden sieben Friesgruppen:

$$\mathcal{F}_1 = \langle\tau\rangle, \quad \mathcal{F}_1^1 = \langle\tau, \sigma_c\rangle, \quad \mathcal{F}_1^2 = \langle\tau, \sigma_a\rangle, \quad \mathcal{F}_1^3 = \langle\gamma\rangle$$

$$\mathcal{F}_2 = \langle\tau, \sigma_A\rangle, \quad \mathcal{F}_2^1 = \langle\tau, \sigma_A, \sigma_c\rangle, \quad \mathcal{F}_2^2 = \langle\gamma, \sigma_A\rangle$$

.

Beweis:

1. Sei $\mathcal{F}_1 := \langle\tau\rangle$.
   Ein Fries mit $\mathcal{F}_1$ als Symmetriegruppe hat keine Drehungen und Spiegelungen und wird nicht durch eine Gleitspiegelung bestimmt.

2. Außer Translationen sind Halbdrehungen um C die einzigen orientierungserhaltenden Isometrien, die den Punkt C festhalten.
   Enthalte $\mathcal{F}$ eine Halbdrehung. Es gilt ebenfalls $\sigma_M \in \mathcal{F}$, da $\sigma_M = \tau\sigma_A$. Nach Satz 1 sind dann auch alle Halbdrehungen um A_i, M_i in $\mathcal{F}$. Sei P Mittelpunkt einer Halbdrehung in $\mathcal{F}$. Dann ist $\sigma_P\sigma_A \in \mathcal{F}$. Da die Hintereinanderschaltung zweier Drehungen eine Translation ist, bildet $\sigma_P\sigma_A$ A auf A_n für ein n ab. Also ist $\sigma_P(A) = A_n$ und P ist der Mittelpunkt von $\overline{AA_n}$. Also sind in $\mathcal{F}$ genau die Halbdrehungen mit Mittelpunkt A_i oder M_i. Sei $\mathcal{F}_2 := \langle\tau, \sigma_A\rangle$
   Da $\tau\sigma_A$ eine Involution ist, gilt $\tau\sigma_A = \sigma_A\tau^{-1}$. Also ist jedes Element von $\mathcal{F}$ von der Form τ^i oder $\sigma_A\tau^i$ mit $i \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\mathcal{F}_2 := \langle\tau, \sigma_A\rangle = \langle\sigma_M, \sigma_A\rangle$, da $\sigma_M\tau = \sigma_A$

ist.
Ein Fries mit $\mathcal{F}_2$ als Symmetriegruppe hat einen Symmetriepunkt aber keine Spiegelachse.

3. Wenn $\mathcal{F}$ nur orientierungserhaltende Isometrien enthält, so ist die zugehörige Symmetriegruppe $\mathcal{F}_1$ oder $\mathcal{F}_2$.
Es bleibt also nur übrig, $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ mit orientierungsumkehrenden Isometrien zu ergänzen. Die Spiegelung σ_l fixiert c falls $l = c$ oder $l \perp c$.
Als erstes ergänzen wir $\mathcal{F}_1$ mit einer Spiegelung σ_c und definieren $\mathcal{F}_1^1 := \langle \tau, \sigma_c \rangle$. Da $\tau\sigma_c = \sigma_c\tau$ ist, ist $\mathcal{F}_1^1$ abelsch und jedes Element in $\mathcal{F}_1^1$ ist von der Form $\sigma_c^j \tau^i$. Falls $n \neq 0$ ist, enthält $\mathcal{F}_1^1$ die Gleitspiegelung mit Achse c, die A auf A_n abbildet.
Ein Fries mit Symmetriegruppe $\mathcal{F}_1^1$ hat keinen Symmetriepunkt und die Mittelachse ist eine Spiegelachse.

4. Sei $\mathcal{F}_2^1 := \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$. Da σ_c mit τ und σ_A kommutiert, folgt, dass jedes Element von $\mathcal{F}_2^1$ von der Form $\sigma_c^k \sigma_A^j \tau^i$ ist. $\mathcal{F}_2^1$ enthält auch die Gleitspiegelung, die A auf A_n abbildet für ein $n \neq 0$. Die Spiegelung in der Senkrechten zu c in A_i ($\tau^{2i}\sigma_A\sigma_c$) und in der Senkrechten zu c in zu M_i ($\tau^{2i+1}\sigma_A\sigma_c$) ist ebenfalls in $\mathcal{F}_2^1$. Wenn a die Senkrechte zu c in A ist, dann gilt $\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_a, \sigma_c \rangle$.
Dieses Fries hat einen Symmetriepunkt und die Mittelachse ist eine Spiegelachse.

5. Enthalte nun $\mathcal{F}$ keine Drehung, sondern die Spiegelung in einer Linie $a \perp c$. Sei A der Schnittpunkt von a und c. Dann sind $\tau^{2i}\sigma_a$ (Spiegelung an A_i) und $\tau^{2i+1}\sigma_a$ (Spiegelung an M_i) in $\mathcal{F}$. Wir nehmen jetzt an, dass $\mathcal{F}$ noch eine Spiegelung σ_l enthält. Dann ist $l \neq c$, da die Halbdrehung $\sigma_c\sigma_a$ nicht in $\mathcal{F}$ liegt. Also ist $l \perp c$ und $\mathcal{F}$ enthält die Translation $\sigma_l\sigma_a$, die A auf A_n verschiebt für ein n. Dann ist $\sigma_l(A) = A_n$ für ein $n \neq 0$ und l ist senkrecht zu c in einem A_i oder M_i. Also enthält $\mathcal{F}$ die Spiegelungen σ_a mit $a \perp c$ in A_i und M_i für alle i. Wir haben nun alle Möglichkeiten, Spiegelungen zu $\mathcal{F}_1$ hinzuzufügen, betrachtet. Sei $\mathcal{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle$, wobei $a \perp c$ in A. Da $(\tau\sigma_a)^2 = 1$ ist, folgt $\tau\sigma_a = \sigma_a\tau^{-1}$, und damit lässt sich jedes Element von $\mathcal{F}_1^2$ von der Form $\sigma_a^j \tau^i$ schreiben. Die Gruppe $\mathcal{F}_1^2$ enthält nicht σ_c, aber die Spiegelungen senkrecht zu c in A_i und M_i.
Ein Fries mit der Symmetriegruppe $\mathcal{F}_1^2$ enthält keinen Symmetriepunkt, sondern eine Spiegelung, aber die Mittelachse ist keine Spiegelachse.

6. Enthalte nun $\mathcal{F}$ eine Halbdrehung und eine Spiegelung in einer Linie q. Falls $q = c$, $q \perp c$ in A oder $q \perp c$ in M, dann befinden wir uns in $\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle = \langle \tau, \sigma_a, \sigma_c \rangle$. Damit wir eine neue Gruppe bilden, darf q nicht auf A_i, M_i sein. Da $\sigma_q(a)$ der Drehmittelpunkt einer Halbdrehung aus $\mathcal{F}$ sein muss, ist q der Mittelpunkt von $\overline{AM_i}$ für i. Nach Satz 1 enthält $\mathcal{F}$ alle Spiegelungen in den Senkrechten zu den Mittelpunkten von $\overline{AM_i}$ für alle i. Also enthält $\mathcal{F}$ σ_p, wobei p die Mittelsenkrechte von $\overline{AM_i}$ ist. Falls $a \perp c$ in A, kann $\mathcal{F}$ nicht σ_a und σ_p gleichzeitig enthalten, da

$\sigma_p\sigma_a$ A auf M abbildet, welches ein Wiederspruch zur Wahl von τ als kürzesten Translation ist. Da $\sigma_p\sigma_a = \sigma_p\sigma_c\sigma_A$, kann $\mathcal{F}$ nicht σ_p und σ_c enthalten.
Damit haben wir alle Möglichkeiten betrachtet Spiegelungen zu $\mathcal{F}_2$ hinzuzufügen. Sei $\mathcal{F}_2^2 := \langle\tau, \sigma_A, \sigma_p\rangle$, wobei p senkrecht zu c im Mittelpunkt von $\overline{AM}$ steht. Weiterhin enthält $\mathcal{F}_2^2$ die Gleitspiegelung $\gamma = \sigma_p\sigma_A$ mit Achse c. Da $\tau = \gamma^2$ und $\sigma_p = \gamma\sigma_A$ folgt $\mathcal{F}_2^2 = \langle\gamma, \sigma_A\rangle$. Die Gruppe $\mathcal{F}_2^2$ enthält nicht σ_c.
Ein Fries mit Symmetriegruppe $\mathcal{F}_2^2$ hat einen Symmetriepunkt, eine Spiegelachse, aber die Mittelachse ist keine Spiegelachse.

7. Wir haben alle Möglichkeiten betrachtet, dass $\mathcal{F}$ nicht zwingend eine Gleitspiegelung enthält. Also: Habe $\mathcal{F}$ eine Gleitspiegelung α. Dann hat α die Achse c als Spiegelachse und α^2 ist eine Translation, die c fixiert. Betrachte folgende Fälle: $\alpha^2 = \tau^{2n}$ und $\alpha^2 = \tau^{2n+1}$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Sei nun $\alpha^2 = \tau^{2n}$. Weil α und τ kommutieren gilt $(\alpha\tau^{-n})^2 = Id$. Da $\sigma_c^2 = Id$ ist, folgt, die orientierungsumkehrende Isometrie $\alpha\tau^{-n}$ ist σ_c. Also gilt $\alpha = \sigma_c\tau^n$. Dann enthält $\mathcal{F}$ σ_c und $\sigma_c\tau^m$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Wenn $\mathcal{F}$ keine Halbdrehung enthält sind wir in dem Fall $\mathcal{F}_1^1$, bei einer Halbdrehung in $\mathcal{F}_2^1$.
Sei nun $\alpha^2 = \tau^{2n+1}$. Dann ist $(\tau^{-n}\alpha)^2 = \tau$. Sei $\gamma = \tau^{-n}\alpha$, dies ist eine orientierungsumkehrende Isometrie, deren Quadrat τ ist. Daraus folgt, γ ist die einzige Gleitspiegelung mit Achse c, die A auf M abbildet. Da $\gamma^{2m} = \tau^m$ und $\gamma^{2m+1} = \tau^m\gamma$ sind die Gleitspiegelungen in $\mathcal{F}$ gerade die der Form $\tau^m\gamma$.
Sei $\mathcal{F}_1^3 := \langle\gamma\rangle$, wobei γ die Gleitspiegelung mit Achse c und $\gamma^2 = \tau$ ist.
Ein Fries mit $\mathcal{F}_1^3$ hat keine Drehzentren, Spiegelachsen und wird durch eine Gleitspiegelung fixiert.

8. Enthalte $\mathcal{F}$ zusätzliche Isometrien zu denen, die durch γ mit $\gamma^2 = \tau$ erzeugt werden. Da $(\sigma_c\gamma)^2 = \tau$ ist, ist $\sigma_c\gamma \notin \langle\tau\rangle$. Also $\sigma_c \notin \mathcal{F}$.
Falls $\sigma_l \in \mathcal{F}$ mit $l \perp c$, dann enthält $\mathcal{F}$ die Halbdrehung $\sigma_l\gamma$. Wenn $\mathcal{F}$ eine Halbdrehung enthält, dann auch σ_A. Also enthält $\mathcal{F}$ σ_A und γ mit $\gamma^2 = \tau$. Daraus folgt $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2^2$.

□

3 Literaturhinweise

- George Martin: Transformation Geometry
- Erhard Quaisser: Diskrete Geometrie, Spektrum Akademischer Verlag