Der Satz von Menelaus

Bernd Fidorra

Dieser wird meistens als einer der Zwillingssätze bezeichnet, zusammen mit dem Satz von Ceva.

Menelaus von Alexandria war ein griechischer Astronom und Mathematiker, von dem man nur wenig weiss. Man weiss, dass er in Alexandria, wo er um 70 nach Christi geboren wurde, und Rom gelebt hat. Er hat sich mit dem Übertragen der Begriffe Seite, Winkel und Dreieck von der Ebene auf die Kugel beschäftigt, und entwickelte in der *Sphärik* die Grundlagen der sphärischen Trigonometrie. Die älteste erhaltene Kopie der *Sphärik* ist eine arabische Übersetzung aus dem 9. Jahrhundert. Von Menelaus verlorengegangen sind ein Werk *Über Geraden im Kreis* und eine Abhandlung über spezifische Gewichte. Der heute sogenannte *Satz von Menelaus* wird in der *Sphärik* als bekannt vorausgesetzt.

Giovanni Ceva war ein italienischer Mathematiker. Er wurde 1647 oder 1648 in der Provinz Mailand geboren und starb 1734 in Mantua. Er wurde an dem Jesuiten College in Milan unterrichtet und studierte an der Universität von Pisa. Dort unterrichtete er bis 1686 als er Professor für Mathematik an der Universität von Mantua wurde, was er bis zu seinem Lebensende blieb. Den größten Teil seines Lebens beschäftigte sich Giovanni Ceva mit Geometrie. Er entdeckte einen der wichtigsten Dreieckssätze zwischen der Zeit der griechischen Mathematiker und dem 19. Jahrhundert. Diesen veröffentlichte er 1678 in dem Werk *De lineis rectis*. Außerdem veröffentlichte er 1682 *Opuscula mathematica*, 1692 *Geometria Motus*, 1711 *De Re Nummeraria* und 1728 *Opus hydrostaticum*. Wie man am letzten Titel unschwer erkennen kann, hat sich Giovanni Ceva auch mit Hydraulik beschäftigt.

Einführungslemma

Eine Streckung δ_A fixiert alle Geraden durch ihren Fixpunkt A.

Lemma:

i) Eine Streckung mit einer festen Geraden, und einem nicht auf der Geraden liegenden Punkt, ist die Identität.

ii) Die Hintereinanderschaltung von zwei Streckungen $\delta_{B,b}\delta_{A,a}$ mit $A \neq B$ und $ab \neq 1$ ist wieder eine Streckung mit Zentrum auf der Geraden $\overleftrightarrow{AB}$.

iii) Wenn $\delta_{R,r}\delta_{Q,q}\delta_{P,p} = id$ und einer der Faktoren r, q oder $p \neq 1$, dann sind die Punkte R, Q, P kollinear .

iv) Wenn sich zwei Geraden $\overleftrightarrow{AB}$ und $\overleftrightarrow{PQ}$ im Punkt L schneiden, dann gilt $\delta_{A,a}(P) = \delta_{B,b}(Q) \Longrightarrow \delta_{B,b}^{-1}\delta_{A,a} = \delta_{L,a/b}$.

Beweis:

i) Folgt aus den Eigenschaften einer Streckung.

ii) $\overleftrightarrow{AB}$ ist eine Fixgerade. Aus $ab \neq 1 \Longrightarrow \delta_{B,b}\delta_{A,a} \neq id$, wegen (i) folgt, dass der Fixpunkt auf $\overleftrightarrow{AB}$ liegt.

iii) Gilt $\delta_{R,r}\delta_{Q,q}\delta_{P,p} = id$, dann folgt $\delta_{Q,q}\delta_{P,p} = \delta_{R,r}^{-1}$. Wenn $r = 1$ so folgt wegen (ii) $p = q = 1$. Betrachte also $r \neq 1$: Aus (ii) folgt, dass R auf $\overleftrightarrow{QP}$ liegt.

iv) Sei $\delta_{A,a}(P) = \delta_{B,b}(Q) = V$ und $\delta = \delta_{B,b}^{-1}\delta_{A,a}$.
Dann gilt $a \neq b$, weil ansonsten die Streckenverhältnisse $\underline{AV}/\underline{AP}$ zu $\underline{BV}/\underline{BQ}$ gleich sind und dann nach dem Strahlensatz $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{PQ}$.
Es folgt $a/b \neq 1$ und wegen (ii) liegt dann das Streckzentrum von δ, auf $\overleftrightarrow{AB}$ und wegen der Definition einer Streckung auf $\overleftrightarrow{PQ}$.

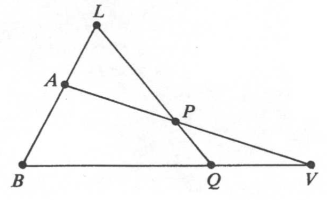

Abbildung 1

Der Satz von Menelaus:

Liegen die Punkte D, E, F auf den orientierten Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$, aber nicht in einer der Ecken, so gilt:
$(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = -1$ genau dann, wenn D, E, F auf einer Geraden liegen.
Seien $f, d, e \in \mathbb{R}$, so dass folgende Bedingungen gelten.
$\delta_{F,f}(B) = A$
$\delta_{D,d}(C) = B$
$\delta_{E,e}(A) = C$
Also sind die Zahlen d, e, f so gewählt, dass für die orientierten Strecken gilt:
$\underline{FA} = f * \underline{FB}$
$\underline{DB} = d * \underline{DC}$
$\underline{EC} = e * \underline{EA}$
Nun betrachtet man eine Streckung $\delta_S = \delta_{F,f}\delta_{D,d}\delta_{E,e}$ die den Punkt A festhält.
Beweis: „$\Longrightarrow$ "
Als erstes betrachten wir den Fall, dass D, E, F kollinear sind und auf der Geraden g liegen. Das heisst $\delta_S = id$, nach Einführungslemma i), und deswegen ist der Streckfaktor fde von δ_S gleich 1. Deshalb ist $(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = -1$.
„$\Longleftarrow$ "
Wenn $(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = -1$, dann ist $fde = 1$ und deshalb $\delta_S = id$.
Da keiner der Streckfaktoren d, e, f gleich 1 ist, müssen die Punkte D, E, F kollinear sein, nach Einführungslemma iii). $\square$

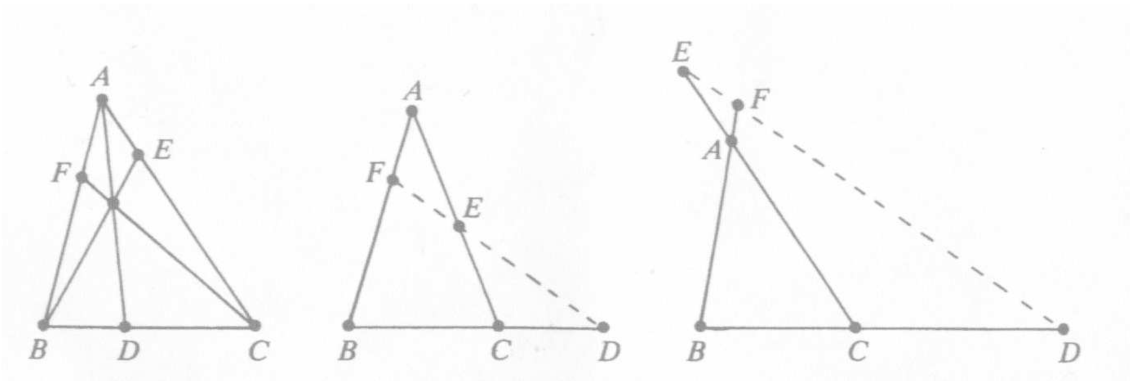

Abbildung 2

Der Satz von Ceva:

Es gelten die gleichen Vorbedingungen wie im Satz von Menelaus.
$(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = 1$ genau dann, wenn sich die Geraden $\overleftrightarrow{FC}$, $\overleftrightarrow{BE}$ und $\overleftrightarrow{DA}$ entweder im Punkt P schneiden oder parallel zueinander sind.
Seien $f, c, d, a \in \mathbb{R}$, so dass folgende Bedingungen gelten:
$\delta_{F,f}(B)=\delta_{C,c}(E)=A$
$\delta_{D,d}(B)=\delta_{A,a}(E)=C$
Mit anderen Worten: die Streckfaktoren sind gleich dem Verhältnis der orientierten Strecken
$f=\underline{FA}/\underline{FB}$
$c=\underline{CA}/\underline{CE}$
$d=\underline{DC}/\underline{DB}$
$a=\underline{AC}/\underline{AE}$
$(fa)/(dc) = \frac{(\underline{FA})(\underline{CA})(\underline{DB})(\underline{AE})}{(\underline{FB})(\underline{CE})(\underline{DC})(\underline{AC})} = (\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA})$
Jetzt gilt nach Strahlensatz, dass $f = c$ genau dann, wenn die Geraden $\overleftrightarrow{FC}$ und $\overleftrightarrow{BE}$ parallel sind. Dann gilt $d = a$ genau dann, wenn die Geraden $\overleftrightarrow{DA}$ und $\overleftrightarrow{BE}$ parallel sind.
Beweis: Dieses besagt also $(fa)/(dc) = (fd)/(df) = 1$.
Wenn die Geraden $\overleftrightarrow{FC}$, $\overleftrightarrow{BE}$ und $\overleftrightarrow{DA}$ sich im Punkt P schneiden, dann konstruiert man eine Streckung δ_1 am Punkt P um f/c, die den Punkt B auf den Punkt E abbildet, und eine Streckung δ_2 am Punkt P um d/a, die den Punkt B auf den Punkt E abbildet, nach Einfürungslemma iv).
Daraus folgt $f/c = d/a$, $fa = dc$ und $fa/dc = 1$.
$(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = 1$ das heisst $(fa)/(dc) = 1$, woraus folgt, dass $f/c = d/a$. Wenn $f/c = d/a = 1$, dann $f = c$ und $d = a$, also der parallele Fall und dort schon gezeigt.
Ist $f/c = d/a \neq 1$, so nimmt man sich eine Streckung δ_1 am Punkt Q, wo sich die Geraden $\overleftrightarrow{FC}$ und $\overleftrightarrow{BE}$ schneiden und eine Streckung δ_2 am Punkt R, wo sich die Geraden $\overleftrightarrow{DA}$ und $\overleftrightarrow{BE}$ schneiden. δ_1 und δ_2 bilden den Punkt B auf den Punkt E ab. Wobei δ_1 um den Faktor f/c streckt und δ_2 um d/a, da $f/c = d/a$. Also $Q = R = P$. $\square$

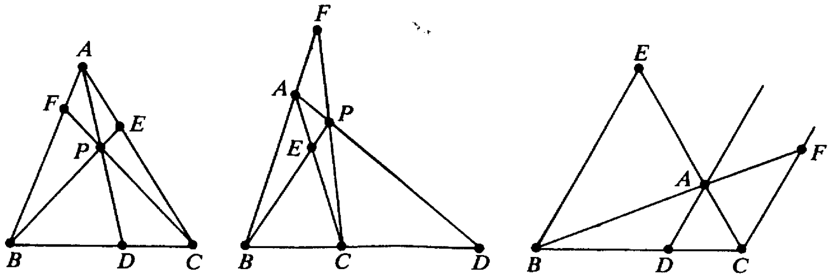

Abbildung 3