

# Elementare Zahlentheorie

1ter Übungszettel

**Abgabe:** Donnerstag, 16.04., 12:00 Uhr  
(ins Postfach Ihres Tutors)

Bitte bearbeiten Sie drei Aufgaben. Wenn Sie alle vier bearbeiten, zeigen Sie bitte an, welche in die Bepunktung eingehen sollen. Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

**Aufgabe 1.** Sei  $2^n + 1$  prim für eine natürliche Zahl  $n$ . Zeige, daß  $n$  eine Zweierpotenz ist.

**Aufgabe 2.** Sei  $2^n - 1$  prim für eine natürliche Zahl  $n$ . Zeige, daß  $n$  selbst prim ist.

**Aufgabe 3.** Zeige, daß es unendlich viele Primzahlen der Form  $4k + 3$  gibt. Hint: Eine zusammengesetzte Zahl der Form  $4k + 3$  hat einen Primfaktor der Form  $4k + 3$ . (warum?)

**Aufgabe 4.** Sei  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und derart, daß  $f(m)$  prim ist für jede natürliche Zahl  $m$ . Zeige, daß  $f$  konstant ist. Hint: Seien  $m$  und  $n$  natürliche Zahlen und  $p$  eine Primzahl. Dann ist  $p$  ein Teiler von  $(n + p)^m - n^m$ . (warum?)

Bemerkung: Das Polynom  $n^2 - 81n + 1681$  nimmt für  $n = 1, 2, \dots, 80$  nur Primzahlwerte an.