

Elementare Zahlentheorie

2ter Übungszettel

Abgabe: Donnerstag, 23.04., 12:00 Uhr
(ins Postfach Ihres Tutors)

Bitte bearbeiten Sie drei Aufgaben. Wenn Sie alle vier bearbeiten, zeigen Sie bitte an, welche in die Bepunktung eingehen sollen. Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Aufgabe 1. Zeige daß unendlich viele verschiedene Primzahlen als Faktoren von *Fermat-Zahlen* $2^{2^n} + 1$ auftreten.

Aufgabe 2. Es sei $2^m + 1 = ab$ wobei a und b natürliche Zahlen > 1 sind. Dann gilt für jede natürliche Zahl m

$$2^m | (a - 1) \iff 2^m | (b - 1)$$

Aufgabe 3. Die Teilmenge $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}] := \{a + i\sqrt{6}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ ist ein Teilring (abg. gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation). Zeige, daß $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ unzerlegbar aber nicht prim ist. Hint: Zeige, daß die Elemente 2 , 3 und $i\sqrt{6}$ unzerlegbar sind durch Betrachtung der *Norm*:

$$\begin{aligned} N : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto |z|^2 \end{aligned}$$

Es gilt damit nämlich $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.

Aufgabe 4. Zeige: $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Hauptidealring. Hint: Formuliere und beweise mittels der Norm (siehe oben) eine Variation der Division mit Rest.