Elementare Zahlentheorie

3ter Übungszettel

Abgabe: Donnerstag, 30.04., 12:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Bitte bearbeiten Sie drei Aufgaben. Wenn Sie alle vier bearbeiten, zeigen Sie bitte an, welche in die Bepunktung eingehen sollen. Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Eine Gruppe G wird *erzeugt* von einer Teilmenge $X \subseteq G$, wenn keine echte Untergruppe von G die Menge X enthält. G heißt *endlich erzeugt*, wenn es eine endliche Teilmenge $X \subseteq G$ gibt, die G erzeugt.

Aufgabe 1. Zeige, daß sich jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ durch eine Kette folgender erlaubter Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix überführen läßt: Vertauschen zweier Zeilen, addieren einer Zeile zu einer anderen, gemeinsamer Vorzeichenwechsel aller Einträge einer Zeile. Hint: der euklidische Algorithmus hilft.

Aufgabe 2. Zeige, daß sich diese Zeilenoperationen als Rechtsmultiplikation mit besonders einfach gebauten Matrizen realisieren lassen. Folgere, daß die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ *endlich erzeugt* ist.

Aufgabe 3. Sei $\alpha = [1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, \ldots]$. Zeige, daß α die Lösung einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten ist.

Aufgabe 4. Bestimme einen unendlichen Kettenbruch, der $\sqrt{2}$ beschreibt. Hint: Schreibe $1 + \sqrt{2}$ als Fixpunkt einer Mögbiustransformation mit ganzzahligen Koeffizienten und stelle diese Möbiustransformation als Verkettung von Transformationen $t \mapsto [a, t]$ dar.

Alternativ läßt sich auch das in der Vorlesung beschriebene Verfahren zur Konstruktion von Kettenbrüchen anwenden.