Elementare Zahlentheorie

4ter Übungszettel

Abgabe: Donnerstag, 07.05., 12:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Bitte bearbeiten Sie drei Aufgaben. Wenn Sie alle vier bearbeiten, zeigen Sie bitte an, welche in die Bepunktung eingehen sollen. Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Eine Gruppe G wird *erzeugt* von einer Teilmenge $X \subseteq G$, wenn keine echte Untergruppe von G die Menge X enthält. G heißt *endlich erzeugt*, wenn es eine endliche Teilmenge $X \subseteq G$ gibt, die G erzeugt.

Aufgabe 1. Zeige, daß jede rationale Zahl > 1 auf genau zwei Weisen als abbrechender Kettenbruch mit natürlichen Koeffizienten darstellbar ist.

Aufgabe 2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$ beliebig. Zeige:

$$a^m \equiv a^{m-\varphi(m)} \mod m$$

Aufgabe 3. Sei d ein Teiler von n. Zeige:

$$d\varphi(n) \leq n\varphi(d)$$

und folgere:

$$\varphi(n) \sum_{d|n} d \leq n^2$$

Aufgabe 4. Zeige, daß die Abbildung $n \mapsto n\varphi(n)$ injektiv ist. (Hint: Betrachte die Primfaktorzerlegung von n und nutze aus, daß die Abbildung multiplikativ ist.)