

Elementare Zahlentheorie

5ter Übungszettel

Abgabe abweichend: Mittwoch, 13.05, 12:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Bitte bearbeiten Sie drei Aufgaben. Wenn Sie alle vier bearbeiten, zeigen Sie bitte an, welche in die Bepunktung eingehen sollen. Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Aufgabe 1. Bestimme sämtliche Lösungen der Kongruenz:

$$x^2 + 5x + 24 \equiv 0 \pmod{36}$$

Aufgabe 2. Bestimme sämtliche Lösungen der Kongruenz:

$$x^5 + x^4 + 1 \equiv 0 \pmod{81}$$

Aufgabe 3. Gib ein Beispiel für ein quadratisches Polynom $f(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten, das modulo 24 mindestens drei Nullstellen hat. Gibt es so ein Beispiel auch modulo 25? modulo jeder zusammengesetzten Zahl? Begründe.

Aufgabe 4. Sei $f(x, y, \dots)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten in mehreren, aber endlich vielen, Variablen und p eine Primzahl. Sei $(a, b, \dots)$ eine Nullstelle von f modulo p . Ferner gelte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, \dots) \not\equiv 0 \pmod{p} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, \dots) \not\equiv 0 \pmod{p} \quad \text{oder} \quad \dots$$

Zeige, daß jede der Kongruenzen $f(x, y, \dots) \equiv 0 \pmod{p^k}$ lösbar ist.