

Elementare Zahlentheorie

6ter Übungszettel

Abgabe: Donnerstag, 21.05, 12:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Bitte bearbeiten Sie drei Aufgaben. Wenn Sie alle vier bearbeiten, zeigen Sie bitte an, welche in die Bepunktung eingehen sollen. Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Aufgabe 1. Zeige: Ist eine Zahl teilerfremd zu 30, so läßt ihre vierte Potenz den Rest 1 bei Division durch 240. Hint: $30 = 2 \times 3 \times 5$ und $240 = 2^4 \times 3 \times 5$.

Aufgabe 2. Zeige, daß $n\varphi(n) = \varphi(n^2)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. Sei p eine Primzahl, a teilerfremd zu p und n teilerfremd zu $p - 1$. Zeige, daß die Kongruenz

$$x^n \equiv a \pmod{p}$$

genau eine Lösung modulo p hat.

Aufgabe 4. Berechne explizit die Potenzen von 3 modulo 17 und zeige damit, daß 3 ein primitives Element der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$ ist. Finde nun die Lösungen der folgenden Kongruenzen:

$$x^{12} \equiv 16 \pmod{17}$$

$$x^{48} \equiv 9 \pmod{17}$$

$$x^{20} \equiv 13 \pmod{17}$$

$$x^{11} \equiv 9 \pmod{17}$$

Hint: nutze den Isomorphismus (Logarithmus/Exponentialabbildung) von $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$ und $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$.