

Elementare Zahlentheorie

10ter Übungszettel

Abgabe: Donnerstag, 18.06, 12:00 Uhr
(ins Postfach Ihres Tutors)

Bitte bearbeiten Sie drei Aufgaben. Wenn Sie alle vier bearbeiten, zeigen Sie bitte an, welche in die Bepunktung eingehen sollen. Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Aufgabe 1. Bestimme diejenigen Primzahlpotenzen p^α , für die es x, y teilerfremd zu p gibt mit

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$$

Aufgabe 2. Bestimme diejenigen $n \in \mathbb{N}$, für die es x, y teilerfremd zu n gibt mit

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{n}$$

Aufgabe 3. Sei p eine ungerade Primzahl. Zeige:

$$\sum_{n=1}^p \left(\frac{n(n+1)}{p} \right) = -1$$

Hint: Beachte $\left(\frac{n(n+1)}{p} \right) = \left(\frac{n}{p} \right) \left(\frac{n+1}{p} \right)$.

Folgere, daß für a teilerfremd zu p ebenfalls

$$\sum_{n=1}^p \left(\frac{n(n+a)}{p} \right) = -1$$

gilt.

Aufgabe 4. Sei p eine ungerade Primzahl. Zeige:

$$\sum_{n=1}^p \left(\frac{n^2 + 1}{p} \right) = -1$$