

Elementare Zahlentheorie

11ter Übungszettel

Abgabe: Donnerstag, 25.06, 12:00 Uhr
(ins Postfach Ihres Tutors)

Bitte bearbeiten Sie drei Aufgaben. Wenn Sie alle vier bearbeiten, zeigen Sie bitte an, welche in die Bepunktung eingehen sollen. Jede Aufgabe wiegt fünf Punkte.

Aufgabe 1. In der Vorlesung habe ich das Argument vorgetragen, daß eine quadratische Form q entlang eines Kantenweges in $\overline{T}$, der entlang der Kantenorientierungen durchlaufen wird, wächst und darum in der Gegenrichtung fällt. Präzisiere dieses Argument wie folgt: Sei $P - Q$ eine Kante, die von P nach Q orientiert ist (in dieser Richtung ist $h > 0$) und die beiden angrenzenden Gebiete haben q -Werte $a > 0$ und $b > 0$. Sei m das Maximum von q auf den drei Gebieten um den Knoten P und n das Maximum von q auf den drei Gebieten um den Knoten Q . Zeige $m < n$.

Aufgabe 2. Zeige direkt, daß $x^2 - 2y^2$ für unendlich viele primitive Gitterpunkte $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ den Wert 1 annimmt. Hint: Betrachte $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, die der Bedingung

$$(3 + 2\sqrt{2})^k = x + y\sqrt{2}$$

genügen.

Aufgabe 3. Gib einen „visuellen“ Beweis, daß $x^2 - 2y^2$ unendlich oft den Wert 1 annimmt: Trage die Werte der quadratischen Form $x^2 - 2y^2$ in die Komplementären Gebiete eines großen Ausschnitts von $\overline{T}$ ein, so daß klar wird, daß der Wert 1 unendlich oft angenommen wird.

Aufgabe 4. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Die quadratische Form $ax^2 + bxy + cy^2$ nimmt den Wert 0 auf einem Paar $(x, y) \neq (0, 0)$ an.
2. Die quadratische Form $ax^2 + bxy + cy^2$ läßt sich als Produkt zweier ganzzahliger linearer Formen schreiben:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (kx + ly)(mx + ny)$$

mit $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$.

3. Die negative Diskriminante $b^2 - 4ac$ ist eine Quadratzahl.

Bemerkung: In dieser Aufgabe zählt 0 als Quadratzahl.