Die Zeilenstufenform

Def: Sei M eine $m \times n$-Matrix.

Eine Zeile, die nur 0-Einträge hat, heißt <u>0-Zeile</u>.

Eine Nicht-0-Zeile hat also mindestens einen Eintrag $\neq 0$.

Der <u>führende Eintrag</u> einer Nicht-0-Zeile ist derjenige Eintrag $\neq 0$, der am weitesten links steht.

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

führende Einträge

0-Zeilen

Def: Wir sagen, eine Matrix sei in <u>Zeilenstufenform</u>, wenn gilt:

1) Alle Nullzeilen stehen am Fuß der Matrix. D.h.:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Nicht-0-Zeilen} \\ \\ \hline \\ \text{0-Zeilen} \end{array}\right)$$

2) In zwei Nicht-0-Zeilen hat diejenige weiter oben ihren führenden Eintrag weiter links als die Zeile unten.

„je höher, desto links"

[Insbesondere stehen keine zwei führenden Einträge in derselben Spalte]

3) <u>Alle</u> führenden Einträge sind 1.

Wir sagen, die Matrix sei in <u>reduzierter Zeilenstufenform</u>, wenn überdies (1) gilt:

4) In einer Spalte, in der ein führender Eintrag steht, sind alle anderen Einträge 0.

<u>Bsp</u>:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ <u>nicht</u> in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ in reduzierter Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ in Zeilenstufenform, <u>nicht</u> reduziert

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ <u>nicht</u> in Zeilenstufenform

Das Gauss-Jordan-Verfahren

Wir beschreiben ein Verfahren, mit dem sich <u>jede</u> Matrix in (reduzierte) Zeilenstufenform überführen läßt.

Das Verfahren hat zwei Stufen

<u>Stufe 1</u>: Überführe die Ausgangsmatrix M in Zeilenstufenform M^*.

<u>Stufe 2</u>: Überführe die Zeilenstufenform M^* in reduzierte Zeilenstufenform M^{red}.

Zur ersten Stufe

<u>Idee</u>: Suche einen führenden Eintrag, der möglichst weit links steht. Dann:

1) Bringe ihn durch <u>Zeilentausch</u> in die erste Zeile
2) Multipliziere die erste Zeile mit seinem Kehrwert
3) „Töte" alle anderen Einträge in seiner Spalte.

Bsp: $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 3 & 13 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 13 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -9/2 & -9/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 0 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 5 \cdot \mathrm{I} \end{matrix}$$

Ergebnis: Unter der führenden 1 in der ersten Spalte stehen nur Nullen.

Nun: Wende dasselbe Verfahren auf den Block süd-östlich von der obersten führenden 1 an:

Bsp: $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3/2 & 7/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -9/2 & -9/2 \end{array}\right)$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-9/2} & -9/2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & -9/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \times -\frac{2}{9}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{III} - 1 \cdot \text{II}$$

Und so weiter:

Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\times \frac{1}{3}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: Die Matrix ist in Zeilenstufenform, aber möglicherweise noch nicht in reduzierte Zeilenstufenform.

Zur zweiten Stufe

Sei also nun eine Matrix in Zeilenstufenform gegeben.

Beobachtung: Jeder führende Eintrag ist 1 und darunter (nicht darüber) verschwinden alle Einträge

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Idee: Töte die Einträge über den führenden Einsen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{I} - \tfrac{3}{2}\,\overline{\mathrm{II}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mathrm{I} - 2\,\overline{\mathrm{III}} \\ \mathrm{II} - 1\,\overline{\mathrm{III}} \end{matrix}$$

<u>Bem</u>: Man kann auch <u>gleich</u> auf die reduzierte Zeilenstufenform zielen: Mit der jeweils betrachteten führenden 1 lassen sich <u>alle</u> anderen Einträge in der Spalte töten.

<u>Bsp</u>: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - 1\,\mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 3\,\mathrm{I} \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Bem</u>: Hier kann man auch sehen, daß 0-Zeilen plötzlich entstehen können.

Experiment: $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 13 \end{pmatrix}$

1^{ter} Reduktionsweg:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 7/2 \\ 5 & 3 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & -9/2 & -9/2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2^{ter} Reduktionsweg

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 3 & 13 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{13}{5} \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3/5 & \frac{13}{5} \\ 0 & 9/5 & 9/5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3/5 & \frac{13}{5} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3^{ter} Reduktionsweg

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}-2\text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 9 & 9 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}/9} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{I}+3\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hm...

<u>Fakt</u>: Bringt man eine Matrix M durch elementare Zeilenoperationen auf reduzierte Zeilenstufenform, so hängt das Ergebnis M^{red} nur von M ab, nicht aber von der gewählten Folge von Zeilenoperationen.

<u>Bem</u> (Zusammenhang mit Gleichungssystemen)

Sei $A\underline{x} = \underline{b}$ ein Gleichungssystem. Bilde die Matrix $M = (A \mid \underline{b})$ und überführe sie in reduzierte Zeilenstufenform $M^{red} = (A^* \mid \underline{b}^*)$.

Dann ist $A\underline{x} = \underline{b}$ äquivalent zu $A^*\underline{x} = \underline{b}^*$ und in dieser Form lassen sich Lösungen einfach ablesen.

<u>Bsp</u>: $M^{red} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 1x + 0y + 2z + 0t &= 1 \\ 0x + 1y + 1z + 0t &= 2 \\ 0x + 0y + 0z + 1t &= 3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 1 - 2z \\ y &= 2 - 1z \\ t &= 3 \end{aligned}$$

z ist frei wählbar

x, y, t : abhängige Variablen
$\Leftrightarrow$ Spalten mit führender 1

z : unabhängige Variable

Bsp: $M^{red} = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 0x + 1y + 0z + 2t &= 0 \\ 0x + 0y + 1z + 1t &= 0 \\ 0x + 0y + 0z + 0t &= 1 \quad \Leftarrow \lightning \end{aligned}$$

Also: Eine führende 1 in der rechten Spalte von M^{red} zeigt an, daß das Gleichungssystem keine Lösung hat.

<u>Bsp</u>: $M^{red} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 7 \\ y &= 8 \\ z &= 9 \end{aligned}$$

Dies ist wie im ersten Beispiel, bloß daß keine unabhängigen Variablen vorkommen.