Def / Prop: Sei W ein Vektorraum, und seien $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in W$ Vektoren. Dann heißt jeder Ausdruck der Form

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \qquad (\alpha_i \in \mathbb{K})$$

eine Linearkombination der Vektoren $\underline{v}_i$.

Die Menge

$$V := \{ \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \mid \alpha_i \in \mathbb{K} \}$$

aller Linearkombinationen ist ein Vektorraum. Wir nennen V den Aufspann der Vektoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ und schreiben dafür

$$\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle := V$$

Wenn wir betonen möchten, daß V Teilmenge von W ist, sagen wir auch, daß V Unterraum von W ist.

Bew (daß V ein Vektorraum ist)

1) $\quad 0 = 0 \underline{v}_1 + \dots + 0 \underline{v}_n \in V$

2) $\left.\begin{aligned} \underline{a} &= \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v} \\ \underline{b} &= \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n \end{aligned}\right\} \in V$

zu zeigen: $\underline{a} + \underline{b} \in V$

Es ist

$$\underline{a} + \underline{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\underline{v}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)\underline{v}_n \in V$$

3) $\underline{a} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \quad \in V$

$\lambda \in \mathbb{K}$

Dann ist $\lambda \underline{a} = (\lambda \alpha_1)\underline{v}_1 + \dots + (\lambda \alpha_n)\underline{v}_n \in V$. $\boxtimes$

<u>Def</u>: Sei W ein Vektorraum und $M \subseteq V$ eine Teilmenge. Der <u>Aufspann</u> von M ist der Durchschnitt $\langle M \rangle$ aller Unterräume von W, die M enthalten.

<u>Bem</u>: Ist $M = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, dann stimmen beide Definitionen von Aufspann überein:

$$\langle M \rangle = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$$

$\square$

Bem: Die allgemeinere Definition hat auch eine Antwort auf die Frage, welchen Unterraum die leere Menge aufspannt:

$$\langle \emptyset \rangle = \{ 0 \}$$

Def: Sei W ein Vektorraum und seien $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w} \in W$ Vektoren. Dann ist

$$x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n = \underline{w}$$

eine <u>lineare Gleichung</u> in den Unbekannten $x_1, \dots, x_n$.

Bem: Eine lineare Gleichung ist eigentlich ein lineares Gleichungssystem:

Bsp: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 0x_1 + 1x_2 = 0 \\ 1x_1 + 3x_2 = 1 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{array} \right|$$

Beob: Für $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w} \in W$ sind äquivalent:

1) $\underline{w} \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$

2) $x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n = \underline{w}$ hat eine Lösung. $\boxtimes$

Aufgabe: Gegeben $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w} \in W$, entscheide, ob $\underline{w} \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$.

Lösung: Wir schreiben die lineare Gleichung

$$x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n = \underline{w}$$

als Gleichungssystem in der Form

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

und entscheiden die Lösbarkeit durch Zeilenreduktion der Matrix $(A | \underline{b})$.

Bem: Die Spalten von A korrespondieren den Vektoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ und die Spalte $\underline{b}$ korrespondiert $\underline{w}$.

Bsp: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left| \begin{array}{l} 0x_1 + 1x_2 = 0 \\ 1x_1 + 3x_2 = 1 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 = 2 \end{array} \right|$$

Hier wählen wir eine Reihenfolge der Zeilen.

$$\rightsquigarrow (A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{Gauß-Jordan}}{\rightsquigarrow} (A|\underline{b})^{red} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Also</u>: nicht lösbar

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

<u>Bem</u>: Ist $W \subseteq \mathbb{R}^m$, so <u>sind</u> alle $\underline{v}_i$ und $\underline{w} \in W$ bereits Spalten. Es reicht also, die Spalten zu einer Matrix zu kombinieren.

<u>Def</u>: Die Menge $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ heißt <u>linear unabhängig</u>, wenn die <u>homogene</u> lineare Gleichung

$$x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n = 0$$

<u>nur</u> die triviale Lösung $x_1 = \dots = x_n = 0$ hat.

<u>Aufgabe</u>: Gegeben $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in W$, entscheide, ob $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ linear unabhängig ist.

<u>Lösung</u>: Wir schreiben die homogene Gleichung

$$x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n = 0$$

in der Form

$$A\underline{x} = 0$$

und reduzieren die Matrix $(A|0)$. Wenn keine Variable x_i unabhängig ist, dann gibt es nur die triviale Lösung.

Wir können das vereinfachen:

1) Die 0-Spalte bleibt unverändert unter allen Zeilenoperationen.

2) Unabhängige Variablen manifestieren sich in Spalten <u>ohne</u> führende 1.

<u>Also</u>: $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ ist linear unabhängig <u>genau dann</u>, wenn A^{red} in jeder Spalte eine führende 1 hat.

<u>Bsp</u>: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Gauß-Jordan}}{\rightsquigarrow} \quad A^{red} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Also</u>: $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ ist <u>nicht</u> linear unabhängig.

Beob: Wir können A^{red} weiter interpretieren:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \text{entspricht:} \quad x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 = \underline{v}_3$$

$$A^{red} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sagt uns:} \quad \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{array}$$

Also: $\underline{v}_3 \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$ mit

$$2\,\underline{v}_1 - 1\,\underline{v}_2 = v_3$$

Bsp: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow A^{red} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also: $\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \}$ ist linear unabhängig.

Und: $A^{red} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ sagt uns $\underline{v}_3 \notin \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$

Beob: Sei $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ linear unabhängig, so ist jede Teilmenge ebenfalls linear unabhängig:

Wir betrachten die Gleichungen

$$x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + \dots + x_n \underline{v}_n = 0 \qquad \mathrm{I}$$

und
$$x_2 \underline{v}_2 + \dots + x_n \underline{v}_n = 0 \qquad \mathrm{II}$$

Wäre $(a_2, \dots, a_n)$ eine nicht-triviale Lösung von II, so wäre $(0, a_2, \dots, a_n)$ eine nicht-triviale Lösung von I. $\lrcorner$

Beob: Sei $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ linear unabhängig, so ist

$$\langle \underline{v}_1 \rangle \subsetneq \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle \subsetneq \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$$

eine in jedem Schritt echt aufsteigende Kette von Vektorräumen.

$\ulcorner$ Wäre $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_4 \rangle = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_5 \rangle$, so wäre $\underline{v}_5 \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_4 \rangle$ also $\underline{v}_5 = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_4 \underline{v}_4$.

Dann wäre $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_4 \underline{v}_4 - 1 \underline{v}_5 = 0$
und damit $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_5\}$ <u>nicht</u> lin. unabhängig. $\lrcorner$

Bem: Umgekehrt seien $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$, so daß gilt:

$$\underline{v}_1 \neq 0$$
$$\underline{v}_2 \notin \langle \underline{v}_1 \rangle$$
$$\underline{v}_3 \notin \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$$
$$\vdots$$
$$\underline{v}_m \notin \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{m-1} \rangle$$

Dann ist $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ linear unabhängig.

⌜ Wäre $(a_1, \dots, a_m)$ eine nicht-triviale Lösung von

$$x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_m \underline{v}_m = 0$$

und sei k der höchste Index $\neq 0$, so ist

$$\underline{v}_k = \frac{1}{a_k} (a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_{k-1} \underline{v}_{k-1}) \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{k-1} \rangle$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. ⌟

Also: $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ ist linear unabhängig <u>genau dann</u>, wenn gilt:

$$\underline{v}_1 \neq 0, \quad \underline{v}_2 \notin \langle \underline{v}_1 \rangle, \quad \underline{v}_3 \notin \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle, \quad \dots$$

Interpretation von A^{red}:

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in W$

Wir schreiben $x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n = 0$ in Matrixform $A\underline{x} = 0$ und reduzieren A zu A^{red}. Die Stufen in A^{red} korrespondieren exakt den Sprüngen, wo der Aufspann wächst:

Bsp

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_6 \in W$

$$A^{red} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &\underline{v}_1 \in \langle \emptyset \rangle \\ &\underline{v}_2 \notin \langle \underline{v}_1 \rangle = \langle \emptyset \rangle \\ &\underline{v}_3 \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \langle \underline{v}_2 \rangle \\ &\underline{v}_4 \notin \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \langle \underline{v}_2 \rangle \\ &\underline{v}_5 \notin \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \rangle = \langle \underline{v}_2, \underline{v}_4 \rangle \\ &\underline{v}_6 \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5 \rangle = \langle \underbrace{\underline{v}_2, \underline{v}_4, \underline{v}_5}_{\text{Basis}} \rangle \end{aligned}$$